УДК 519.872

ПОЛУМАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ НЕНАДЕЖНОЙ ВОССТАНАВЛИВАЕМОЙ РЕЗЕРВИРОВАННОЙ ОДНОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОТЕРЯМИ[1]

А.И. Песчанский

Севастопольский государственный университет
Россия, 299053, г. Севастополь, ул. Университетская, 33 г

E-mail: peschansky_sntu@mail.ru

Объектом исследования является однолинейная ненадежная система обслуживания с потерями, в которой во время обслуживания заявки может нарушиться работоспособность канала. Сразу же начинается восстановление его работоспособности, а обслуживание заявки продолжается за счет временного резерва, который является случайной величиной. Если временного резерва оказывается достаточно для завершения обслуживания заявки, то следующая заявка принимается на обслуживание только после завершения восстановления канала. Если резерва времени недостаточно, то заявка теряется и больше на дообслуживание не возвращается, а следующая заявка принимается на обслуживание только после восстановления работоспособности канала. Если во время обслуживания заявки за счет временного резерва канал успевает восстановиться, то он продолжает обслуживание заявки. Определяются стационарные характеристики системы в предположении, что все случайные величины, описывающие ее функционирование, имеют общий вид.

Ключевые слова: *ненадежная однолинейная система обслуживания, полумарковский процесс с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний, стационарное распределение вложенной цепи Маркова, финальные вероятности состояний, среднее стационарное время пребывания в состояниях.*

Для практических приложений большую важность представляет исследование систем, в которых обслуживающие каналы выходят из строя, требуя восстановления. Анализ методов обеспечения и повышения надежности таких систем, а также обзор литературы по этой тематике можно найти, например, в [1–4]. В частности, одним из важных способов повышения надежности является временное резервирование, когда для устранения отказа система имеет определенный запас времени, в течение которого она может выполнять заданные функции. Примером такого резервирования является использование источника бесперебойного питания для снабжения энергией соединенного с ним персонального компьютера в случае сбоя питания. Отказ системы наступает в тот момент, когда полностью исчерпывается резерв времени и к этому моменту не удается восстановить ее работоспособность. Определение стационарных характеристик описанной системы усложняется, если предполагать, что все случайные величины, которые описывают систему обслуживания, имеют общие законы распределения. Для решения этой проблемы в данной работе привлекается аппарат теории полумарковских процессов с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний [5].

Алексей Иванович Песчанский (д.т.н.), профессор кафедры «Высшая математика».

Постановка задачи. Рассмотрим одноканальную систему обслуживания $GI/G/1/0$ с потерями и ненадежным обслуживающим каналом. Время между поступлениями заявок – случайная величина (СВ) β с функцией распределения $G(t)=P\{\beta\le t\}$. Длительность времени обслуживания заявки СВ $-\alpha$ с функцией распределения $F(t)=P\{\alpha\le t\}$. Во время обслуживания заявки может нарушиться работоспособность канала. Длительность времени от начала обслуживания заявки до момента нарушения работоспособности канала – СВ γ с функцией распределения $\Phi(t)=P\{\gamma\le t\}$. Сразу же после отказа канала начинается его восстановление, которое длится случайное время σ с функцией распределения $\Psi(t)=P\{\sigma\le t\}$. Обслуживание заявки после потери работоспособности канала продолжается за счет временного резерва, который представляет собой СВ ξ с функцией распределения $R(t)=P\{\xi\le t\}$. В случае расходования временного резерва заявка, находящая на обслуживании, теряется и больше на дообслуживание не возвращается. Система находится в отказе и приступает к обслуживанию заявок только после восстановления канала. Если во время обслуживания заявки за счет временного резерва канал успевает восстановиться, то он продолжает обслуживание заявки. В случае повторного отказа канала обслуживание заявки опять продолжается за счет временного резерва, который пополняется до случайной величины ξ с той же функцией распределения $R(t)$. Таким образом, за счет неоднократного использования временного резерва может быть завершено обслуживание принятой каналом заявки в случае его отказов.

Предполагается, что случайные величины α, β, γ, σ и ξ независимы, имеют плотности распределения вероятностей $f(t)$, $g(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $r(t)$, конечные математические ожидания $E\alpha$, $E\beta$, $E\gamma$, $E\sigma$, $E\xi$ и дисперсии соответственно.

Цель работы – найти финальные вероятности пребывания системы в состоянии обслуживания заявки каналом, обслуживания за счет временного резерва, восстановления канала и ожидания заявки, а также определить средние стационарные времена пребывания системы в этих состояниях.

Построение полумарковской модели. Рассматриваемая система обслуживания может находиться в следующих физических состояниях: 11 – канал обслуживает заявку; 12 – заявка обслуживается за счет резерва; 2 – резерв исчерпан, заявка потеряна, канал восстанавливается; 02 – обслуживание заявки закончено за счет резерва, канал восстанавливается; 0 – система работоспособна и ожидает поступления заявки. Расширим фазовое пространство физических состояний до пространства полумарковских состояний добавлением непрерывных координат, которые обеспечат марковское свойство в моменты изменения физических состояний. В результате фазовое пространство системы будет иметь вид

$$E=\{11, 11z, 12z, 02ux, 2ux, 0x\}.$$

Коды состояний системы расшифровываются следующим образом:

11 – начинает обслуживаться заявка, поступившая в свободную систему;

$12z$ – произошел отказ канала и начинается его восстановление, обслуживание заявки продолжается за счет временного резерва; с начала обслуживания заявки прошло время z;

$11z$ – канал восстановился и продолжает обслуживание заявки, с момента начала обслуживания которой прошло время z;

$02ux$ – обслуживание заявки закончено за счет резерва; до конца восстановления канала осталось время u, а до момента поступления ближайшей заявки – время x;

$2ux$ – резерв времени исчерпан, заявка потеряна, до конца восстановления основного канала осталось время u, а до момента поступления ближайшей заявки – время x;

$0x$ – канал закончил обслуживание заявки либо восстановился; до момента поступления ближайшей заявки осталось время x.

Для описания функционирования системы используем процесс марковского восстановления $\{S_n, \theta_n, n \geq 0\}$, где $S_n \in E$ – полумарковские состояния системы, θ_n – время пребывания системы в различных состояниях, и соответствующий ему полумарковский процесс $S(t)$ [5]. Для задания процесса марковского восстановления необходимо определить переходные вероятности вложенной цепи Маркова $\{S_n,\ n \geq 0\}$ и функции распределения случайных величин θ_n.

Времена пребывания системы в состояниях определяются выражениями

$$\theta_{11} = \alpha \wedge \gamma,\ \theta_{02ux} = \theta_{2ux} = u,\ \theta_{0x} = x,\ \theta_{11z} = \gamma \wedge [\alpha - z]_+,$$

$$\theta_{12z} = \sigma \wedge \xi \wedge [\alpha - z]_+,$$

где $\wedge$ – знак минимума, а $[\alpha - z]_+$ – время, оставшееся до конца обслуживания заявки, с плотностью распределения вероятностей $\dfrac{f(x+z)}{\overline{F}(z)}$.

Граф переходов и временная диаграмма функционирования системы представлены на рис. 1 и рис .2 соответственно.

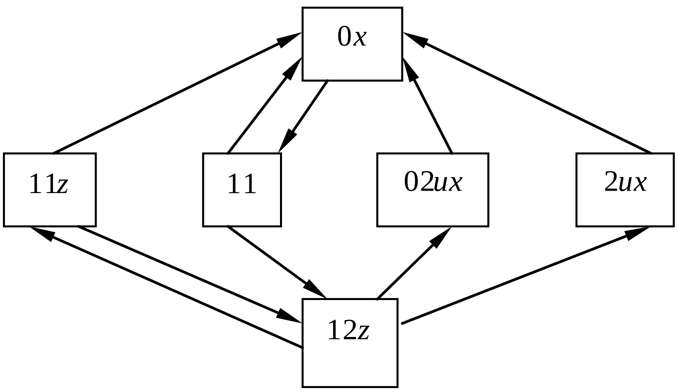

Рис. 1. Граф переходов системы

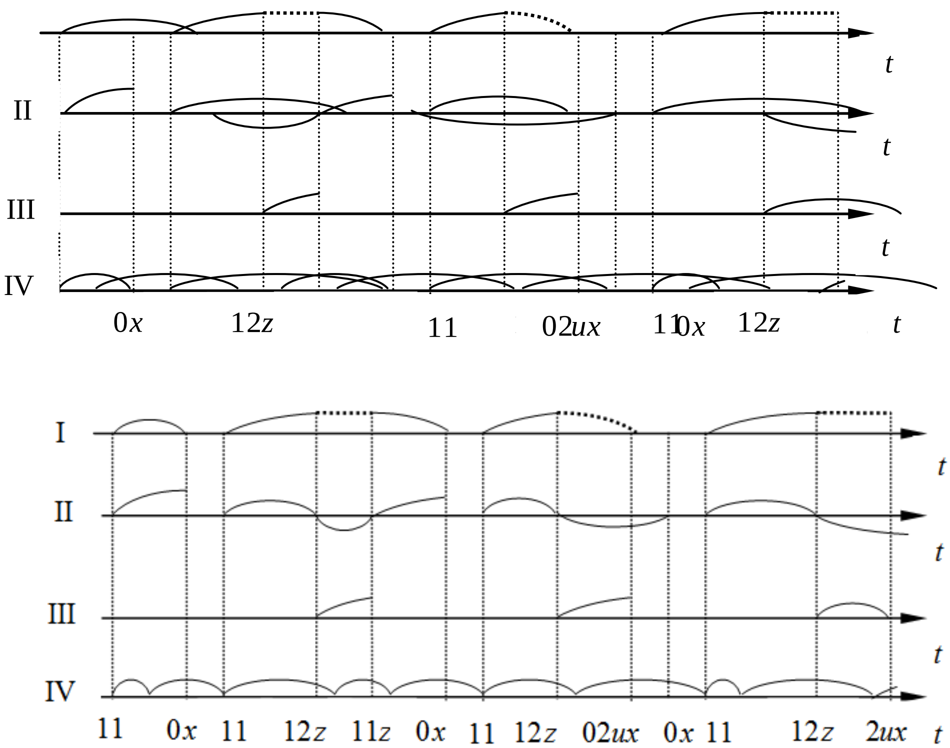

Рис. 2. Временная диаграмма функционирования системы:
I – процесс обслуживания заявок; II – работоспособность и восстановление канала;
III – временной резерв; IV – входящий поток заявок

Опишем события и плотности вероятностей переходов системы из состояния 11. Если за время обслуживания заявки канал не откажет, т. е. $\alpha < \gamma,$ то система освободится и будет ожидать следующую заявку (перейдет в состояние $0x$). Плотность вероятности этого перехода

$$p_{11}^{0x} = P\{\alpha \in dt, \alpha < \gamma, \beta_t \in dx\} = \int_0^\infty f(t)\bar{\Phi}(t) v_g(t,x)dt, \ x > 0 .$$

Здесь $\bar{\Phi}(t) = 1 - \Phi(t)$; $v_g(u,x)$ – плотность распределения вероятностей прямого остаточного времени восстановления β_t процесса восстановления, порожденного СВ β :

$$v_g(t,x) = g(t+x) + \int_0^t h_g(t-s)g(s+x)ds,$$

$h_g(x)$ – плотность функции восстановления $H_g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{*(n)}(t)$,

где $G^{*(n)}(t)$ – n-кратная свертка функции $G(t)$. Величина β_t фиксирует время после момента t до ближайшего момента восстановления во входящем потоке заявок (см., например, [6]).

В случае отказа канала ($\gamma < \alpha$) заявка продолжается обслуживаться за счет временного резерва, т. е. система переходит в состояние $12z$ с плотностью вероятности перехода

$$p_{11}^{12z} = P\{\gamma \in dz,\ \gamma < \alpha\} = \varphi(z)\overline{F}(z), \quad z > 0.$$

Аналогично устанавливаются плотности и плотности вероятностей переходов системы из других состояний:

$$P_{0x}^{11} = 1;\quad P_{02ux}^{0,x-u} = P_{2ux}^{0,x-u} = 1,\ u < x;\ P_{02ux}^{0y} = P_{2ux}^{0y} = v_g(u - x, y),\ y > 0,\ u > x;$$

$$p_{11z}^{0x} = \int_0^\infty \frac{f(z+t)}{\overline{F}(z)}\overline{\Phi}(t)v_g(z+t, x)dt,\ x > 0;\ p_{11z}^{12w} = \varphi(w - z)\frac{\overline{F}(w)}{\overline{\overline{F}}(z)},\ w > z;$$

$$p_{12z}^{11w} = \psi(w - z)\overline{R}(w - z)\frac{\overline{F}(w)}{\overline{\overline{F}}(z)},\ w > z;$$

$$p_{12z}^{02ux} = \int_0^\infty \frac{f(z+t)}{\overline{F}(z)}\overline{R}(t)\psi(t+u)v_g(z+t, x)dt,\ u > 0,\ x > 0;$$

$$p_{12z}^{2ux} = \int_0^\infty \frac{\overline{F}(z+t)}{\overline{F}(z)}r(t)\psi(t+u)v_g(z+t, x)dt,\ u > 0,\ x > 0.$$

Стационарное распределение вложенной цепи Маркова. Значение стационарного распределения ρ_{11} для состояния 11 и плотностей стационарного распределения $\rho(11z)$, $\rho(12z)$, $\rho(02ux)$, $\rho(2ux)$ и $\rho(0x)$ для состояний $11z$, $12z$, $02ux$, $2ux$ и $0x$ соответственно найдем из системы интегральных уравнений:

$$\begin{cases}
\rho(11z) = \int_0^z \psi(t)\overline{R}(t)\rho(12, z - t)dt,\\
\rho(12z) = \int_0^z \varphi(t)\frac{\overline{F}(z)}{\overline{\overline{F}}(z - t)}\rho(11, z - t)dt + \rho_{11}\varphi(z)\overline{F}(z),\\
\rho(02ux) = \int_0^\infty dy\int_0^\infty \rho(12t)\frac{f(t+y)}{\overline{F}(t)}\psi(y+u)\overline{R}(y)v_g(t+y, x)dt,\\
\rho(2ux) = \int_0^\infty dy\int_0^\infty \rho(12t)\frac{\overline{F}(t+y)}{\overline{F}(t)}\psi(y+u)r(y)v_g(t+y, x)dt,\\
\rho(0x) = \rho_{11}\int_0^\infty f(t)\overline{\Phi}(t)v_g(t, x)dt + \int_0^\infty dy\int_0^\infty \rho(11t)\frac{f(t+y)}{\overline{F}(t)}\overline{\Phi}(y)v_g(t+y, x)dt +\\
+\int_0^\infty [\rho(02t, t+x) + \rho(2t, t+x)]dt + \int_0^\infty dt\int_0^\infty v_g(s, x)[\rho(02, s+t, t) + \rho(2, s+t, t)]ds,\\
\rho_{11} = \int_0^\infty \rho(0x)dx.
\end{cases}$$

Исключая функцию $\rho(11z)$ из первых двух уравнений, приходим к уравнению восстановления относительно функции $\rho(12z)/\overline{F}(z)$:

$$\frac{\rho(12z)}{\overline{F}(z)} = \int_0^z (\varphi * \psi\overline{R})(z - y)\frac{\rho(12y)}{\overline{F}(y)}dy + \rho_{11}\varphi(z).$$

Решением этого уравнения является функция $\rho(12z)=\rho_{11}\overline{F}(z)h^{(2)}(z)$, где $h^{(2)}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi*(\varphi*\psi\overline{R})^{*(k-1)}\right](z)$ – плотность функции $H^{(2)}(z)$ нечетных восстановлений (т. е. отказов канала) обрывающегося альтернирующего процесса восстановления, который порождается случайной величиной γ с плотностью распределения вероятностей $\varphi(z)$ и случайной величиной с несобственным распределением и плотностью $\psi(z)\overline{R}(z)$.

После этого находятся выражения для остальных плотностей стационарного распределения:

$$\rho(11z)=\rho_{11}\overline{F}(z)h^{(1)}(z),$$

где $h^{(1)}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi*\psi\overline{R})^{*(k)}(z)$ – плотность функции $H^{(1)}(z)$ четных восстановлений (т. е. восстановлений работоспособности канала) того же обрывающегося альтернирующего процесса восстановления;

$$\rho(02ux)=\rho_{11}\int_0^{\infty}dy\int_0^{\infty}h^{(2)}(t)f(t+y)\psi(y+u)\overline{R}(y)v_g(t+y,x)dt;$$

$$\rho(2ux)=\rho_{11}\int_0^{\infty}dy\int_0^{\infty}h^{(2)}(t)\overline{F}(t+y)\psi(y+u)r(y)v_g(t+y,x)dt;$$

$$\rho(0x)=\rho_{11}\int_0^{\infty}f(t)\overline{\Phi}(t)v_g(t,x)dt+\rho_{11}\int_0^{\infty}dy\int_0^{\infty}h^{(1)}(t)f(t+y)\overline{\Phi}(y)v_g(t+y,x)dt+$$

$$+\rho_{11}\int_0^{\infty}ds\int_0^{\infty}dy\int_0^{\infty}h^{(2)}(z)\psi(y+s)v_g(z+y+s,x)\left[f(z+y)\overline{R}(y)+\overline{F}(z+y)r(y)\right]dz.$$

Стационарная вероятность ρ_{11} находится из условия нормировки и равна

$$\rho_{11}=\left[2+2\int_0^{\infty}f(t)H^{(2)}(t)dt\right]^{-1}. \tag{1}$$

Финальные вероятности состояний. Разобьем фазовое пространство состояний E на следующие непересекающиеся подмножества состояний: $E_{11}=\{11,11z\}$ – заявка обслуживается каналом; $E_{12}=\{12z\}$ – канал восстанавливается и заявка обслуживается за счет временного резерва; $E_2=\{02ux,2ux\}$ – резерв исчерпан либо завершено обслуживание заявки за счет резерва, при этом продолжается восстановление канала; $E_0=\{0x\}$ – канал свободен, находится в работоспособном состоянии и ожидает заявку.

Финальные вероятности пребывания системы в различных физических состояниях найдем с помощью предельных соотношений [5]

$$p_i^* = \lim_{t\to\infty} P\left\{S(t)\in E_i \;/ S(0)=x\right\} =$$
$$= \int_{E_i} m(x)\rho(dx) \left(\int_E m(x)\rho(dx)\right)^{-1}, \; i = 11,\ 12,\ 2,\ 0, \qquad (2)$$

где $m(x)$ – среднее время пребывания системы в состоянии $x\in E$; $\rho(\cdot)$ – стационарное распределение вложенной цепи Маркова.

Средние времена пребывания системы в состояниях определяются следующими формулами:

$$E\theta_{11} = \int_0^\infty \overline{F}(t)\overline{\Phi}(t)dt;\; E\theta_{11z} = \int_0^\infty \frac{\overline{F}(t+z)\overline{\Phi}(t)}{\overline{F}(z)}dt;\; E\theta_{12z} = \int_0^\infty \frac{\overline{F}(t+z)\overline{\Psi}(t)\overline{R}(t)}{\overline{F}(z)}dt;$$
$$E\theta_{0x} = x\;;\; E\theta_{02ux} = E\theta_{2ux} = u\,.$$

С учетом выражений для средних времен, а также найденной плотности стационарного распределения вложенной цепи Маркова интегралы в формуле (2) в результате преобразований принимают вид

$$\int_{E_{11}} m(x)dx = \rho_{11}\int_0^\infty \overline{F}(t)\overline{\Phi}(t)dt + \int_0^\infty \rho(11)dz\int_0^\infty \frac{\overline{F}(t+z)\overline{\Phi}(t)}{\overline{F}(z)}dt = \rho_{11}\int_0^\infty \overline{F}(t)\overline{\Phi}(t)dt +$$
$$+\rho_{11}\int_0^\infty h^{(1)}(z)dz\int_0^\infty \overline{F}(t+z)\overline{\Phi}(t)dt = \rho_{11}\left[E\alpha + \int_0^\infty \overline{F}(t)\left[H^{(1)}(t)-H^{(2)}(t)\right]dt\right];$$

$$\int_{E_{12}} m(x)dx = \rho_{11}\int_0^\infty h^{(2)}(z)dz\int_0^\infty \overline{F}(t+z)\overline{\Psi}(t)\overline{R}(t)dt;$$

$$\int_{E_{11}\cup E_{12}} m(x)dx = \rho_{11}\left[E\alpha - \int_0^\infty H^{(2)}(t)dt\int_0^\infty \overline{F}(t+y)\overline{\Psi}(y)r(y)dy\right];$$

$$\int_{E_2} m(x)dx = \int_0^\infty dx\int_0^\infty u\left[\rho(02ux)+\rho(2ux)\right]du =$$
$$= \rho_{11}\left[E\sigma\int_0^\infty f(t)H^{(2)}(t)dt - \int_0^\infty h^{(2)}(y)dy\int_0^\infty \overline{F}(t+y)\overline{\Psi}(t)\overline{R}(t)dt\right];$$

$$\int_{E_0} m(x)dx = \rho_{11}\left[E\beta\overline{N} - E\alpha - \int_0^\infty \overline{F}(t)\left[H^{(1)}(t)-H^{(2)}(t)\right]dt - E\sigma\int_0^\infty f(t)H^{(2)}(t)dt\right];$$

$$\int_E m(x)dx = \rho_{11}E\beta\overline{N}\,,$$

где $\overline{N} = 1 - \int_0^\infty H_g(t)\frac{d}{dt}\left[\overline{F}(t)(1+H^{(1)}(t)-H^{(2)}(t)\right]dt + \int_0^\infty \overline{F}(t)h^{(2)}(t)dt\int_0^\infty \psi(s)\left[H_g(s+t)-H_g(t)\right]ds$ – среднее число заявок, поступающих в систему между двумя соседними моментами начала обслуживания заявок.

Таким образом, финальные вероятности пребывания системы в состоянии обслуживания, ожидания заявки и восстановления определяются формулами

$$p_{11}^* = \left[E\alpha + \int_0^\infty \overline{F}(t)\left[H^{(1)}(t) - H^{(2)}(t)\right]dt \right] \Big/ E\beta\overline{N};$$

$$p_{12}^* = \left[\int_0^\infty h^{(2)}(z)dz \int_0^\infty \overline{F}(t+z)\overline{\Psi}(t)\overline{R}(t)dt \right] \Big/ E\beta\overline{N}; \qquad (3)$$

$$p_{11}^* + p_{12}^* = \left[E\alpha - \int_0^\infty H^{(2)}(t)dt \int_0^\infty \overline{F}(t+y)\overline{\Psi}(y)r(y)dy \right] \Big/ E\beta\overline{N};$$

$$p_0^* = 1 - p_{11}^* - p_{12}^* - p_2^*;$$

$$p_2^* = \left[E\sigma \int_0^\infty f(t)H^{(2)}(t)dt - \int_0^\infty h^{(2)}(y)dy \int_0^\infty \overline{F}(t+y)\overline{\Psi}(t)\overline{R}(t)dt \right] \Big/ E\beta\overline{N}.$$

Вероятность того, что принятая к обслуживанию заявка будет обслужена полностью, равна

$$P = \int_0^\infty F(t)dt \int_0^\infty h^{(2)}(s)r(t-s)\overline{\Psi}(t-s)ds.$$

Средние стационарные времена пребывания в состояниях. Найдем средние стационарные времена $T(E_i)$ пребывания системы в состояниях с помощью соотношений [5]

$$T(E_i) = \int_{E_i} m(x)\rho(dx) \left[\int_{E \setminus E_i} \rho(dx)P(x, E_i) \right]^{-1}, \quad i = 11, 12, 2, 0, \qquad (4)$$

где $P(x, E_i)$ – вероятности переходов из состояния x в подмножество состояний E_i. Учитывая вероятности переходов вложенной цепи Маркова из состояний, а также вид стационарного распределения, интегралы в знаменателях дробей формул (4) преобразуем к виду

$$\int_{E \setminus E_0} \rho(dx)P(x, E_0) = \int_{E \setminus E_{11} \cup E_{12}} \rho(dx)P(x, E_{11} \cup E_{12}) = \rho_{11};$$

$$\int_{E \setminus E_{11}} \rho(dx)P(x, E_{11}) = \rho_{11}\left[1 + \int_0^\infty f(t)H^{(1)}(t)dt \right];$$

$$\int_{E \setminus E_{12}} \rho(dx)P(x, E_{12}) = \rho_{11} \int_0^\infty f(t)H^{(2)}(t)dt;$$

$$\int_{E \setminus E_2} \rho(dx)P(x, E_2) = \rho_{11} \int_0^\infty f(t)\left[H^{(2)}(t) - H^{(1)}(t)\right]dt.$$

В результате подстановки найденных выражений в формулы (4) приходим к следующим соотношениям:

$$T(E_{11}) = \left[E\alpha + \int_0^\infty \overline{F}(t)\left[H^{(1)}(t) - H^{(2)}(t)\right]dt\right] \Big/ \left[1 + \int_0^\infty f(t)H^{(1)}(t)dt\right];$$

$$T(E_{12}) = \left[\int_0^\infty h^{(2)}(z)dz \int_0^\infty \overline{F}(t+z)\overline{\Psi}(t)\overline{R}(t)dt\right] \Big/ \int_0^\infty f(t)H^{(2)}(t)dt$$

$$T(E_{11} \cup E_{12}) = E\alpha - \int_0^\infty H^{(2)}(t)dt \int_0^\infty \overline{F}(t+y)\overline{\Psi}(y)r(y)dy; \qquad (5)$$

$$T(E_2) = \frac{E\sigma\int_0^\infty f(t)H^{(2)}(t)dt - \int_0^\infty h^{(2)}(y)dy \int_0^\infty \overline{F}(t+y)\overline{\Psi}(t)\overline{R}(t)dt}{\int_0^\infty f(t)\left[H^{(2)}(t) - H^{(1)}(t)\right]dt};$$

$$T(E_0) = E\beta\overline{N} - E\alpha - \int_0^\infty \overline{F}(t)\left[H^{(1)}(t) - H^{(2)}(t)\right]dt - E\sigma\int_0^\infty f(t)H^{(2)}(t)dt.$$

Стационарные характеристики для системы $M/M/1/0$. В качестве частного случая рассмотрим систему обслуживания $M/M/1/0$. Пусть время β между поступлениями заявок в систему имеет плотность $g(t) = \lambda e^{-\lambda t}$; время α обслуживания заявки – плотность $f(t) = \mu e^{-\mu t}$; время γ безотказной работы канала – плотность $\varphi(t) = \eta e^{-\eta t}$; время σ восстановления канала – плотность $\psi(t) = \nu e^{-\nu t}$; резерв времени ξ – плотность $r(t) = \kappa e^{-\kappa t}$. Тогда формулы (3) и (5) для определения финальных вероятностей и средних стационарных времен пребывания в состояниях принимают вид

$$p_{11}^* = \frac{\rho}{1+z};\; p_{12}^* = \frac{\eta\rho}{(\mu+\nu+\kappa)(1+z)};\; p_{11}^* + p_{12}^* = \frac{\rho}{1+z}\left(1 + \frac{\eta}{\mu+\nu+\kappa}\right);$$

$$p_2^* = \frac{\eta(\kappa+\mu)\rho}{\nu(\mu+\nu+\kappa)(1+z)};\; p_0^* = \frac{1}{1+z};$$

$$T(E_{11}) = \frac{1}{\mu+\eta};\; T(E_{12}) = \frac{1}{\mu+\nu+\kappa};\; T(E_2) = \frac{1}{\nu}; \qquad (6)$$

$$T(E_{11} \cup E_{12}) = \frac{\mu+\nu+\kappa+\eta}{\mu^2 + \mu(\nu+\eta+\kappa) + \eta\kappa}.$$

Здесь $\rho = \dfrac{\lambda(\mu+\nu+\kappa)}{\mu^2 + \mu(\nu+\eta+\kappa) + \eta\kappa}$ и $z = \rho(1 + \dfrac{\eta}{\nu})$ – пропускная способность канала.

Заметим, что без резерва времени финальная вероятность $\tilde{p}_0^*$ принятия заявки для ненадежной системы обслуживания без резерва времени равна [7]

$$\tilde{p}_0^* = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu + \nu}\left(1 + \frac{\eta}{\nu}\right)\right]^{-1}.$$

Для ненадежной системы без временного резерва вероятность того, что принятая в систему заявка будет обслужена, равна $\tilde{P} = \frac{\mu}{\mu + \eta}$, а для системы с временным резервом эта же вероятность принимает значение

$$P = \frac{\mu^2 + \mu(\nu + \eta + \kappa)}{\mu^2 + \mu(\nu + \eta + \kappa) + \eta\kappa}.$$

Численный пример

Рассмотрим систему обслуживания $E_n / E_m / 1/0$, в которой все описывающие ее случайные величины имеют распределение Эрланга: время между поступлениями заявок β – 2-го порядка с математическими ожиданием 2 мин; время обслуживания заявки α – 2-го порядка с математическими ожиданием 4 мин; резерв времени ξ – 2-го порядка с математическими ожиданием 10/3 мин; время восстановления канала σ – 2-го порядка с математическими ожиданием 2,5 мин и время безотказной работы канала γ – 3-го порядка со средним значением 9 мин.

Вычисления стационарных характеристик системы по формулам (3) и (5) приводят к следующим результатам: $p_{11}^* = 0{,}74$; $p_{12}^* = 0{,}04$; $p_2^* = 0{,}04$; $p_0^* = 0{,}18$; $T(E_{11}) = 3{,}91$ мин; $T(E_{12}) = 1{,}21$ мин; $T(E_{11} \cup E_{12}) = 3{,}89$ мин; $T(E_2) = 1{,}99$ мин; $T(E_0) = 1{,}02$ мин. Принятая к обслуживанию заявка будет обслужена до конца с вероятностью $P = 0{,}96$.

Заметим, что в случае отсутствия временного резерва в этой системе финальные вероятности пребывания в состояниях обслуживания заявки $\tilde{p}_1^*$, восстановления $\tilde{p}_2^*$, свободном состоянии $\tilde{p}_0^*$, а также средние стационарные времена пребывания в этих состояниях принимают следующие значения: $\tilde{p}_1^* = 0{,}64$; $\tilde{p}_2^* = 0{,}08$; $\tilde{p}_0^* = 0{,}28$; $T(E_1) = 3{,}51$ мин; $T(E_2) = 2{,}5$ мин; $T(E_0) = 1{,}52$ мин.

Вероятность полного обслуживания принятой заявки в этом случае будет равна $\tilde{P} = 0{,}82$. Следовательно, наличие резерва уменьшает вероятность принятия заявки к обслуживанию на $36\ \%$, но на $17\ \%$ увеличивает вероятность ее полного обслуживания.

Если в системе обслуживания все случайные величины имеют показательное распределение с такими же математическими ожиданиями, как и в рассмотренном выше примере, то расчеты по формулам (6) приводят к численным значениям стационарных характеристик: $p_{11}^* = 0{,}53$; $p_{12}^* = 0{,}06$; $p_2^* = 0{,}08$; $p_0^* = 0{,}33$; $T(E_{11}) = 2{,}77$ мин; $T(E_{12}) = 1{,}05$ мин; $T(E_{11} \cup E_{12}) = 3{,}55$ мин; $T(E_2) = 2{,}5$ мин;

$T(E_0) = 2$ мин. Принятая к обслуживанию заявка будет обслужена полностью с вероятностью $P = 0{,}89$.

Характеристики этой же системы обслуживания без временного резерва равны $\tilde{p}_1^* = 0{,}5$; $\tilde{p}_2^* = 0{,}14$; $\tilde{p}_0^* = 0{,}36$; $T(E_1) = 2{,}77$ мин; $T(E_2) = 2{,}5$ мин; $T(E_0) = 2$ мин. Вероятность полного обслуживания принятой к обслуживанию заявки в этом случае будет равна $\tilde{P} = 0{,}69$. Таким образом, наличие резерва уменьшает вероятность принятия заявки к обслуживанию на $8\ \%$, но на $29\ \%$ увеличивает вероятность того, что она не потеряется при обслуживании.

Выводы

В предположении общего вида распределений всех случайных величин, описывающих ненадежную одноканальную систему обслуживания, с помощью аппарата полумарковских процессов построена модель функционирования такой системы, в которой за счет случайного временного резерва продолжается обслуживание заявки после выхода из строя обслуживающего канала. В результате нахождения плотности стационарного распределения вложенной цепи Маркова как решения системы интегральных уравнений найдены эффективные выражения для вычисления стационарных характеристик системы. Показано, что вид законов распределения времен между поступлениями заявок в систему, их обслуживания, отказов и восстановлений канала оказывают существенное влияние на численные значения стационарных характеристик системы и эффективность метода временного резервирования для повышения надежности системы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ushakov I.A.* Probabilistic Reliability Models. – Wiley, 2012. – 244 p.
2. *Половко А.М., Гуров С.В.* Основы теории надежности. – 2-е изд., перераб. и доп. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 704 с.
3. *Черкесов Г.Н.* Надежность аппаратно-программных комплексов: Учеб. пособие. – СПб.: Питер, 2005. – 479 с.
4. *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1987. – 336 с.
5. *Королюк В.С., Турбин А.Ф.* Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. – К.: Наук. думка, 1982. – 236 с.
6. *Байхельт Ф., Франкен П.* Надежность и техническое обслуживание. Математический подход. – М.: Радио и связь, 1988. – 392 с.
7. *Якушев Ю.Ф.* Об одной задаче обслуживания потока вызовов ненадежными приборами // Проблемы передачи информации. – 1969. – Т. V. – Вып. 4. – С. 84-88.

Статья поступила в редакцию 15 января 2017 г.

SEMI-MARKOV MODEL OF UNRELIABLE RESTORABLE REDUNDANT LOSS ONE-SERVER QUEUEING SYSTEM

A.I. Peschansky

Sevastopol State University
33, Yniversitetskaya, Sevastopol, 299053

E-mail: peschansky_sntu@mail.ru

The object of research is one-server unreliable loss queueing system. The server can fail while customer service. Then immediately server restoration begins. The customer service continues due to time redundancy which is a random variable. If time redundancy is enough to complete the service, the service goes on and the next customer is taken into service after the end of restoration only. If time redundancy is not enough to complete the service, the customer is lost and does not arrive again, the next customer is taken into service after the end of restoration. Stationary characteristics of the queueing system are obtained under the assumption that all the random variables describing the system have distributions of general type.

Keywords: *unreliable one-server queueing system, semi-Markov process with a discrete-continuous phase state space, the embedded Markov chain stationary distribution, final probabilities of states, average stationary sojourn time in states.*

Aleksey I. Peschansky (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.