

УДК 536. 2. 075

ПОЛУЧЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПРОВОДНИКОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

И.В. Кудинов

Самарский государственный технический университет
443100, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

E-mail: totig@yandex.ru

На основе метода разделения переменных получено точное аналитическое решение телеграфного уравнения относительно напряжения для длинной линии с равномерно распределенными параметрами (индуктивностями, сопротивлениями, емкостями и утечками электричества через изоляцию). Исследования решения позволили сделать вывод, что движение электричества в проводнике происходит в виде волны, на фронте которой наблюдается скачок напряжения (силы тока). Наличие скачка свидетельствует о бесконечной величине градиента потенциала искомой функции в данной точке. После достижения фронтом волны противоположного конца проводника наблюдается обратная волна со скачком противоположного знака. С течением времени амплитуда колебаний прямых и обратных волн уменьшается вплоть до полного затухания колебательного процесса. При каких-то больших значениях активного сопротивления скачкообразное изменение напряжения наблюдается лишь при малых значениях времени на начальных участках проводника и прекращается до момента времени, при котором фронт волны достигает противоположного конца проводника. С увеличением времени напряжение по длине проводника монотонно (без скачков) уменьшается вплоть до установления равновесного (стационарного) состояния, когда напряжение во всех точках проводника одинаково и неизменно во времени.

Ключевые слова: телеграфное уравнение, точное аналитическое решение, распределенные параметры, волновые колебания, фронт возмущения, скачки искомой функции, бесконечная скорость распространения потенциалов.

Электрические линии с сосредоточенными параметрами описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, в которых искомые функции (напряжение U или сила тока I) не зависят от пространственной переменной и являются функциями лишь времени. При этом считается, что все элементы линии при прохождении электрического тока не выделяют теплоту; что переменный магнитный поток индуцирует электродвижущую силу лишь в катушке индуктивности, а токи электрического смещения появляются только между обкладками конденсатора. Указанные предположения считаются допустимыми в случае, когда линейные размеры всех элементов цепи намного меньше длины электромагнитной волны в окружающей ее среде диэлектрике.

Протяженность длинных цепей (например, телеграфных или линий передачи электрической энергии) при используемых на практике частотах сопоставима с длиной электромагнитной волны. Такие цепи будут уже не с сосредоточенными

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16 – 38 – 00059 мол_а.

Игорь Васильевич Кудинов (к.т.н.), доцент.

ми, а с распределенными параметрами, и при их исследовании необходимо учитывать индуктивность линий, активное сопротивление проводов, утечки тока вследствие несовершенства изоляции, а также взаимную емкость между проводами (или между проводом и землей) [1, 2].

Ниже будет рассмотрена однородная однопроводная линия с равномерно распределенными параметрами, заряженная до потенциала E по отношению к земле, потенциал которой равен нулю. Один конец линии ($x = 0$) изолирован, а другой ($x = l$) в начальный момент времени заземлен. Необходимо определить распределение напряжения по длине линии во времени. Математическая постановка задачи в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + a^2 \left[(RC + LG) \frac{\partial U}{\partial t} + RGU - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right] = 0 ; (t > 0; 0 < x < l) \quad (1)$$

$$U(x, 0) = E ; \quad (2)$$

$$\frac{\partial U(x, 0)}{\partial t} = 0 ; \quad (3)$$

$$\frac{\partial U(0, t)}{\partial x} = 0 ; \quad (4)$$

$$U(l, t) = 0, \quad (5)$$

где U – напряжение, B ;

x – координата, m ;

t – время, c ;

I – сила тока, A ;

R – активное сопротивление, Om ;

C – емкость, $\Phi = Кл / B$;

L – индуктивность, $\Gamma = B \cdot c / A$;

G – проводимость изоляции, $1 / Om$;

Φ – фарада; $Кл$ – кулон; B – вольт; A – ампер; c – секунда; Γ – Ген-

ри;

l – длина линии, m ;

R, C, L, G рассчитаны на единицу длины провода; Δx – длина элементарного участка, m ;

E – начальный потенциал линии относительно земли, B ;

$a = 1 / \sqrt{LC}$ – скорость распространения электрических колебаний, равная скорости света в воздухе, m / c .

Вывод уравнения (1) базируется на законе Ома, записанном в виде следующих двух соотношений:

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = L \frac{\partial I}{\partial t} + IR ; \quad (6)$$

$$-\frac{\partial I}{\partial x} = C \frac{\partial U}{\partial t} + GU . \quad (7)$$

Согласно соотношению (6) разность напряжений ΔU в начале и в конце рассматриваемого участка проводника Δx (по отношению к нулевому потенциалу земли) равна сумме падения напряжения на активном сопротивлении (IR) и индуктивного падения напряжения ($L \partial I / \partial t$). Из (7) следует, что изменение силы тока ΔI на этом же участке Δx равно величине тока, требуемого для за-

рядки данного участка проводника ($C\partial U/\partial t$), и количеству тока, теряемого вследствие несовершенства изоляции (GU).

Дифференцируя соотношение (6) по переменной x , а соотношение (7) – по переменной t (предварительно умножив его на L), и затем вычитая из первого уравнения второе, получаем телеграфное уравнение вида (1).

Для получения аналогичного уравнения для силы тока I продифференцируем (6) по t (умножив на C), а (7) по x и, вычитая из первого уравнения второе, находим

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - CL \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - (RC + LG) \frac{\partial I}{\partial t} - GRI = 0 . \quad (8)$$

Для получения точного аналитического решения задачи (1) – (5) введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\Theta = \frac{U}{E} ; \xi = \frac{x}{l} ; Fo = \frac{at}{l} ; F_1 = al(RC + LG) ; F_2 = l^2 RG ,$$

где Θ , ξ , Fo – соответственно безразмерные напряжение, координата, время; F_1 , F_2 – безразмерные комплексы.

С учетом принятых обозначений задача (1) – (5) будет

$$\frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo^2} + F_1 \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} + F_2 \Theta(\xi, Fo) = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} ; (Fo > 0; 0 < \xi < 1); \quad (9)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1 ; \quad (10)$$

$$\partial \Theta(\xi, 0) / \partial Fo = 0 ; \quad (11)$$

$$\Theta(0, Fo) / \partial \xi = 0 ; \quad (12)$$

$$\Theta(1, Fo) = 0 . \quad (13)$$

Если пренебречь потерями через изоляцию ($G = 0$) и активным сопротивлением провода ($R = 0$), то $F_1 = F_2 = 0$ и уравнение (9) приводится к классическому гиперболическому уравнению, описывающему незатухающие волновые колебания искомой функции:

$$\partial^2 \Theta / \partial Fo^2 = \partial^2 \Theta / \partial \xi^2 . \quad (14)$$

Следуя методу разделения переменных, решение задачи (9) – (13) примем в виде [3]

$$\Theta(\xi, Fo) = \varphi(Fo)\psi(\xi) , \quad (15)$$

где $\varphi(Fo)$, $\psi(\xi)$ – соответственно функции времени Fo и координаты ξ .

Подставляя (15) в (9), находим

$$\varphi'' + F_1 \varphi' + v\varphi = 0 ; \quad (16)$$

$$\psi'' + (F_2 + v)\psi = 0 , \quad (17)$$

где v – некоторая постоянная; $\varphi' = d\varphi/dFo$; $\varphi'' = d^2\varphi/dFo^2$; $\psi'' = d^2\psi/d\xi^2$.

Подставляя (15) в (12), (13), находим граничные условия к уравнению (17)

$$d\psi(0)/d\xi = 0; \quad \psi(1) = 0. \quad (18)$$

Решение краевой задачи Штурма – Лиувилля (17), (18) принимается в виде

$$\psi(\xi) = \cos(r\pi\xi/2) . (r = 2k - 1; k = \overline{1, \infty}) . \quad (19)$$

Очевидно, что соотношение (19) удовлетворяет граничным условиям (18). Подставляя (19) в (17), находим формулу для определения собственных чисел краевой задачи Штурма – Лиувилля:

$$v_k = r^2 \pi^2 / 4 - F_2 . \quad (r = 2k - 1; \quad k = \overline{1, \infty}). \quad (20)$$

Собственные функции с точностью до постоянного множителя, который в данном случае можно положить равным единице [1], находятся из (19).

Характеристическое уравнение для уравнения (16) будет

$$z^2 + F_1 z + v_k = 0 . \quad (k = \overline{1, \infty}). \quad (21)$$

Уравнение (21) имеет следующие корни:

$$z_{1,2} = \left(-F_1 \pm \sqrt{F_1^2 - 4v_k} \right) / 2 . \quad (k = \overline{1, \infty}). \quad (22)$$

В случае, если подкоренное выражение соотношения (22) больше нуля $(F_1^2 - 4v_k) > 0$, будем иметь два действительных отрицательных корня. Решение уравнения (16) в этом случае записывается в виде

$$\varphi_k(F_0) = C_{1k} \exp(z_{1k} F_0) + C_{2k} \exp(z_{2k} F_0), \quad (23)$$

где C_{1k} и C_{2k} – постоянные интегрирования.

Подставляя (19), (23) в (15), находим

$$\Theta(\xi, F_0) = (C_{1k} e^{z_{1k} F_0} + C_{2k} e^{z_{2k} F_0}) \cos(r\pi\xi/2) . \quad (r = 2k - 1; \quad k = \overline{1, \infty}). \quad (24)$$

Каждое частное решение (24) удовлетворяет уравнению (9) и граничным условиям (12), (13), но ни одно из них не удовлетворяет начальным условиям (10), (11). С целью их выполнения составим сумму частных решений:

$$\Theta(\xi, F_0) = \sum_{k=1}^{\infty} (C_{1k} e^{z_{1k} F_0} + C_{2k} e^{z_{2k} F_0}) \cos(r\pi\xi/2) . \quad (r = 2k - 1). \quad (25)$$

Для определения постоянных интегрирования C_{1k} , C_{2k} используются начальные условия (10), (11). Подставляя (25) в (11), получаем

$$C_{1k} = -C_{2k} z_{2k} / z_{1k} . \quad (k = \overline{1, \infty}). \quad (26)$$

Подставляя (25) в (10), с учетом (26) находим

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_{2k} (1 - z_{2k} / z_{1k}) \cos(r\pi\xi/2) = 1 . \quad (r = 2k - 1). \quad (27)$$

Соотношение (27) представляет разложение единицы в ряд Фурье по косинусам на отрезке $[0; 1]$. Умножим (27) на $\cos(j\pi\xi/2)$ и найдем интеграл от полученного соотношения:

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k} (1 - z_{2k} / z_{1k}) \cos(r\pi\xi/2) \cos(j\pi\xi/2) d\xi = \int_0^1 \cos(j\pi\xi/2) d\xi . \quad (28)$$

$$(j = r = 2k - 1; \quad k = \overline{1, \infty})$$

Соотношение (28) с учетом ортогональности косинусов приводится к виду

$$\int_0^1 C_{2k} (1 - z_{2k} / z_{1k}) \cos^2(r\pi\xi/2) d\xi - \int_0^1 \cos(r\pi\xi/2) d\xi = 0 . \quad (29)$$

$$(r = 2k - 1; \quad k = \overline{1, \infty}).$$

Определяя интегралы в (29), находим

$$C_{2k} = 4z_{1k} \sin(r\pi/2) / ((z_{1k} - z_{2k})(\sin(r\pi) + r\pi)) . \quad (r = 2k - 1; k = \overline{1, \infty}). \quad (30)$$

После определения постоянных интегрирования C_{1k} и C_{2k} точное аналитическое решение задачи (9) – (13) находится из (25). Непосредственной подстановкой (25) во все уравнения задачи (9) – (13) можно убедиться в их точном выполнении.

В случае, если в отношении (22) подкоренное выражение меньше нуля $(F_1^2 - 4v_k) < 0$, будем иметь следующие комплексные корни [4]:

$$z_1 = \gamma + i\beta ; z_2 = \gamma - i\beta ; \quad (31)$$

где $i = \sqrt{-1}$; $\gamma = -F_1/2$; $\beta = (\sqrt{(F_1^2 - 4v_k)})/2$.

Решение уравнения (16) с учетом (31) будет

$$\varphi_k(\text{Fo}) = C_{1k} \exp((\gamma + i\beta)\text{Fo}) + C_{2k} \exp((\gamma - i\beta)\text{Fo}), \quad (32)$$

где C_{1k} , C_{2k} – постоянные интегрирования.

Соотношение (32) можно представить в виде

$$\varphi_k(\text{Fo}) = \exp(\gamma\text{Fo})(C_{1k} \exp(i\beta\text{Fo}) + C_{2k} \exp(-i\beta\text{Fo})). \quad (33)$$

Используя формулы Эйлера $\exp(is) = \cos s + i \sin s$; $\exp(-is) = \cos s - i \sin s$, соотношение (33) приводим к виду [3]

$$\varphi_k(\text{Fo}) = \exp(\gamma\text{Fo})(C_{1k} + C_{2k})\cos(\beta\text{Fo}) - i(C_{2k} - C_{1k})\sin(\beta\text{Fo}). \quad (34)$$

Обозначив $B_{1k} = C_{1k} + C_{2k}$; $B_{2k} = i(C_{2k} - C_{1k})$, находим

$$\varphi_k(\text{Fo}) = \exp(\gamma\text{Fo})(B_{1k} \cos(\beta\text{Fo}) - B_{2k} \sin(\beta\text{Fo})). \quad (35)$$

Подставляя (19), (35) в (15) и составляя сумму частных решений, получаем

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp(\gamma \text{Fo})(B_{1k} \cos(\beta\text{Fo}) - B_{2k} \sin(\beta\text{Fo}))\cos(r\pi\xi/2) . \quad (r = 2k - 1). \quad (36)$$

Для нахождения постоянных B_{1k} , B_{2k} используются начальные условия (10), (11). Подставляя (36) в (11), находим

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\gamma B_{1k} - \beta B_{2k}) \cos(r\pi\xi/2) = 0 . \quad (r = 2k - 1).$$

Отсюда получаем

$$B_{2k} = \gamma B_{1k} / \beta . \quad (37)$$

Подставляя (36) в (10), находим

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_{1k} (r\pi\xi/2) = 1 . \quad (r = 2k - 1). \quad (38)$$

Умножая обе части соотношения (38) на $\cos(j\pi\xi/2)$ ($j = \overline{1, \infty}$) и определяя интеграл в пределах от $\xi = 0$ до $\xi = 1$, находим

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} B_{1k} \cos(r\pi\xi/2) \cos(j\pi\xi/2) d\xi = \int_0^1 \cos(j\pi\xi/2) d\xi . \quad (j = r = 2k - 1). \quad (39)$$

Соотношение (39) с учетом ортогональности косинусов приводится к виду

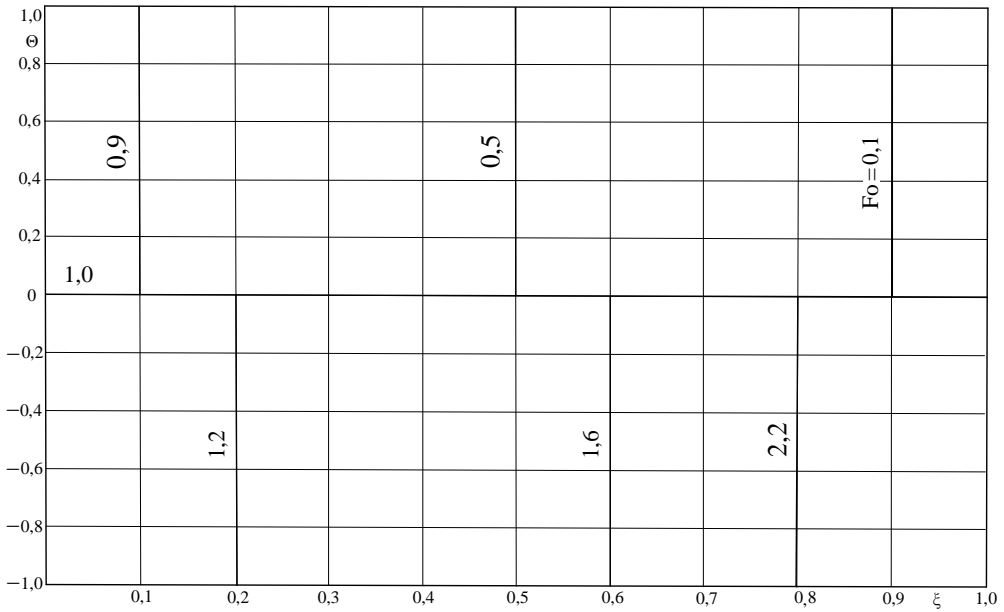


Рис. 2. Изменение напряжения по длине проводника для отдельных значений времени:
 $F_1 = F_2 = 0$; $n = 1000$

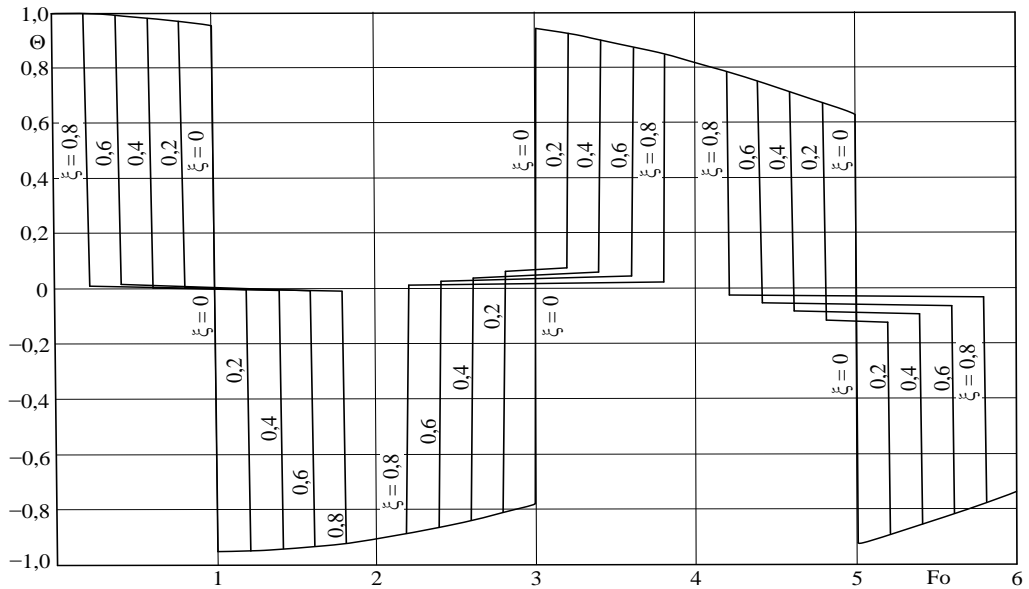


Рис. 3. Изменение напряжения во времени:
 $F_1 = F_2 = 0,1$; $n = 1000$

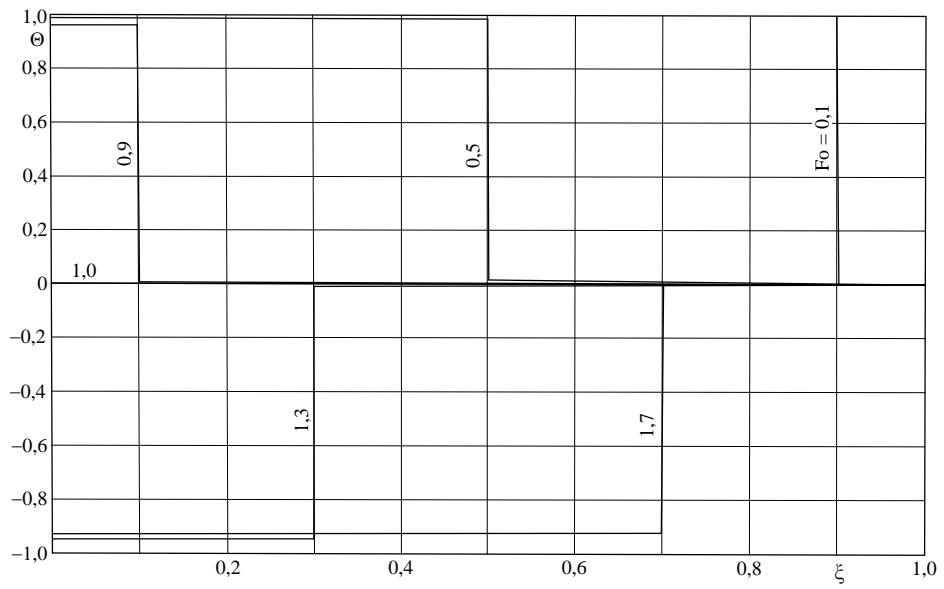


Рис. 4. Изменение напряжения по длине проводника:
 $F_1 = F_2 = 0,1; n = 1000$

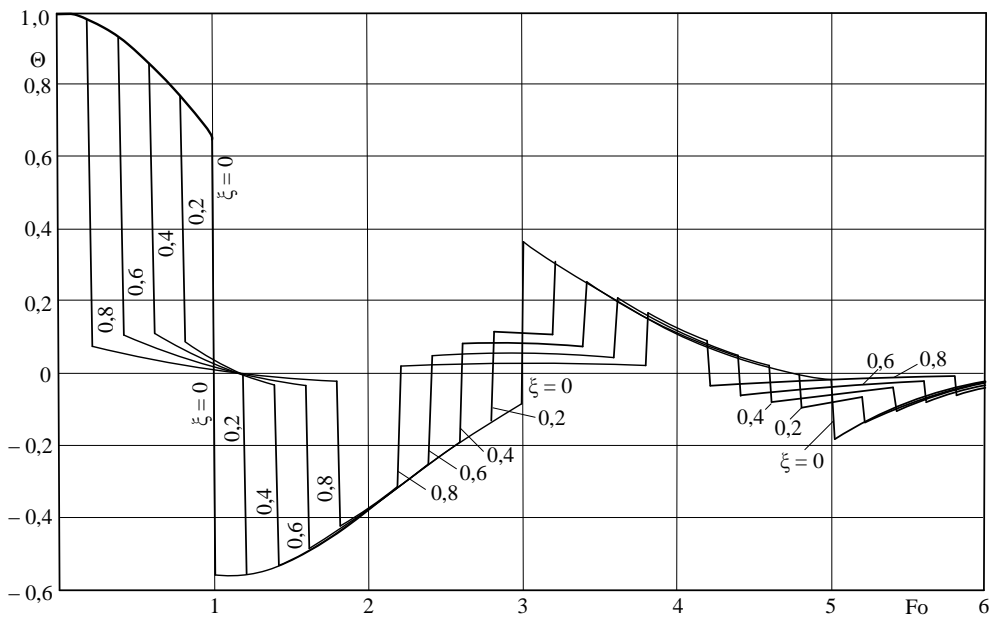


Рис. 5. Изменение напряжения во времени:
 $F_1 = F_2 = 1,0; n = 1000$

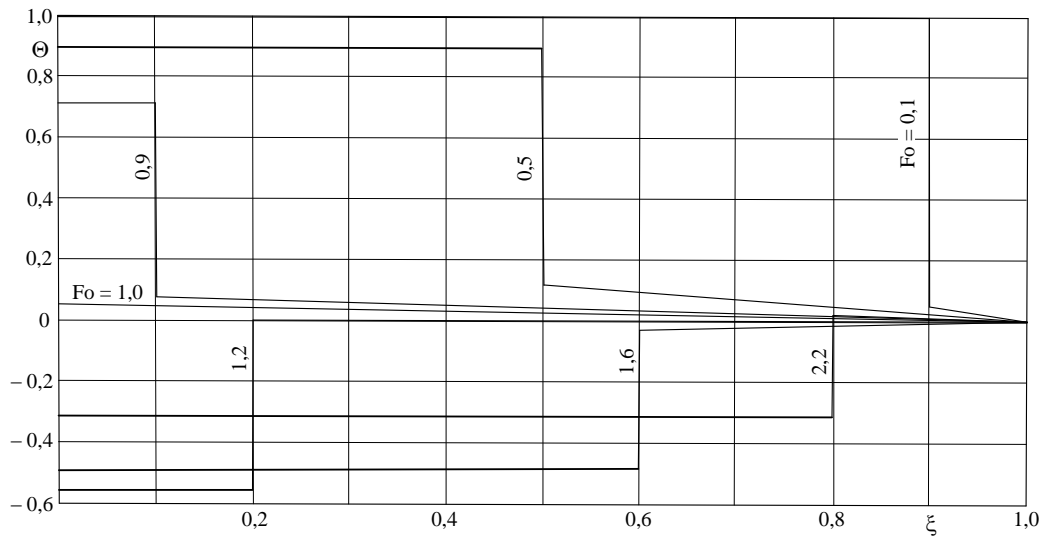


Рис. 6. Изменение напряжения по длине проводника:
 $F_1 = F_2 = 1,0; n = 1000$

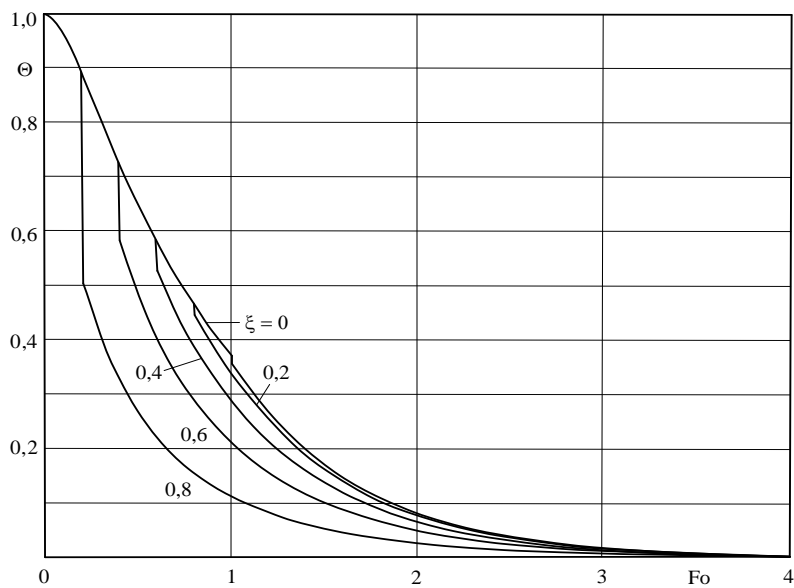


Рис. 7. Изменение напряжения во времени:
 $F_1 = F_2 = 10; n = 1000$

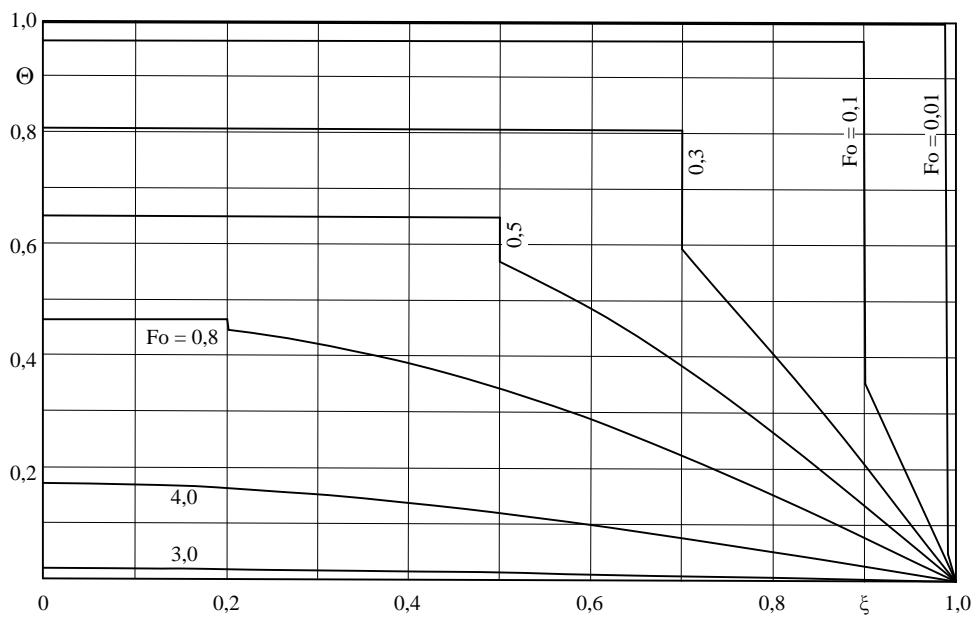


Рис. 8. Изменение напряжения по длине проводника:
 $F_1 = F_2 = 10; n = 1000$

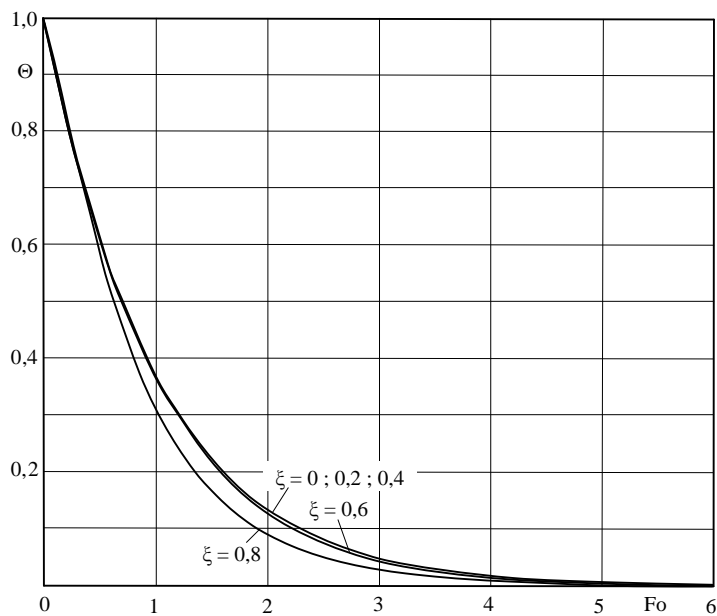


Рис. 9. Изменение напряжения во времени: $F_1 = F_2 = 100; n = 1000$

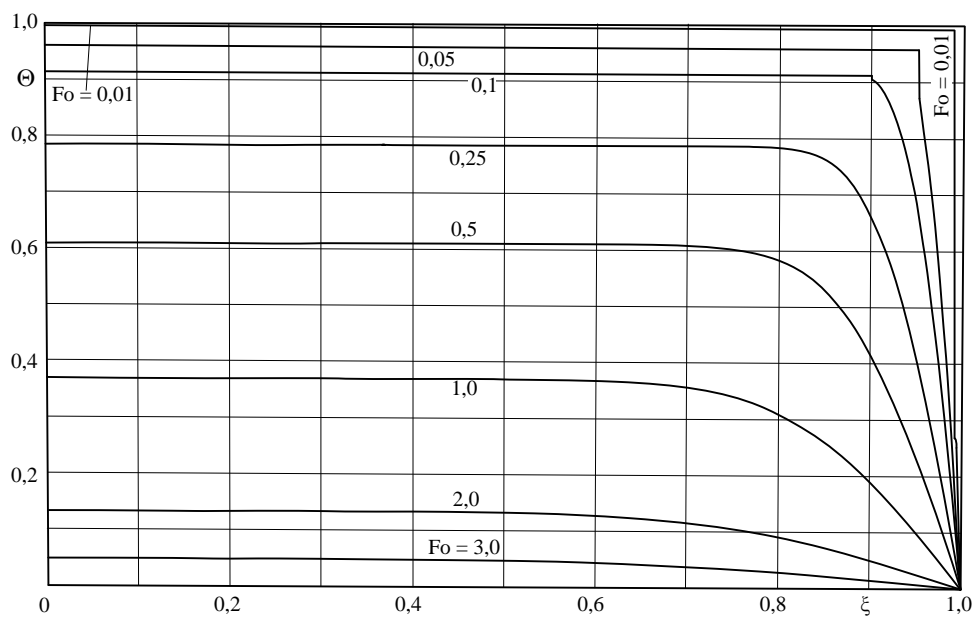


Рис. 10. Изменение напряжения по длине проводника:
 $F_1 = F_2 = 100; n = 1000$

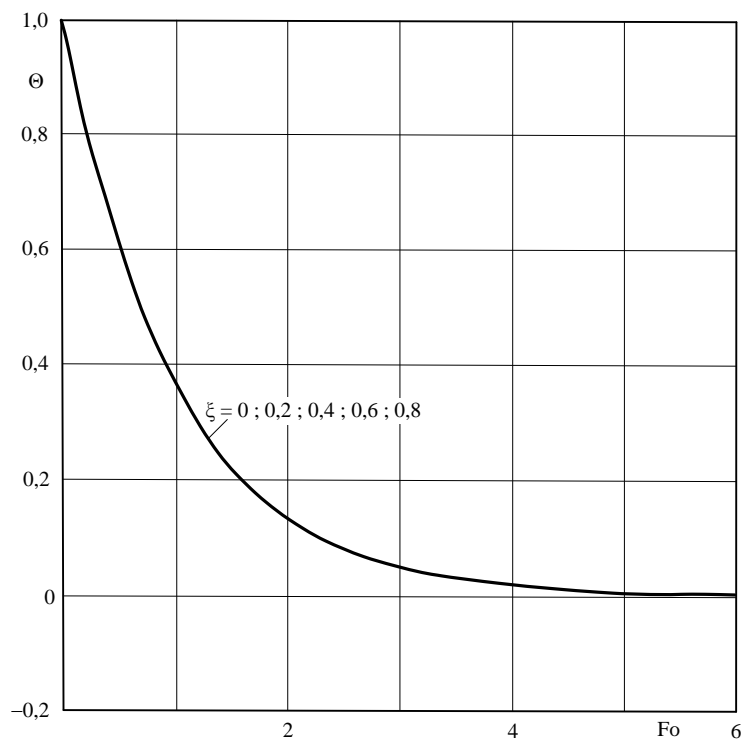


Рис. 11. Изменение напряжения во времени:
 $F_1 = F_2 = 75000; n = 1000$

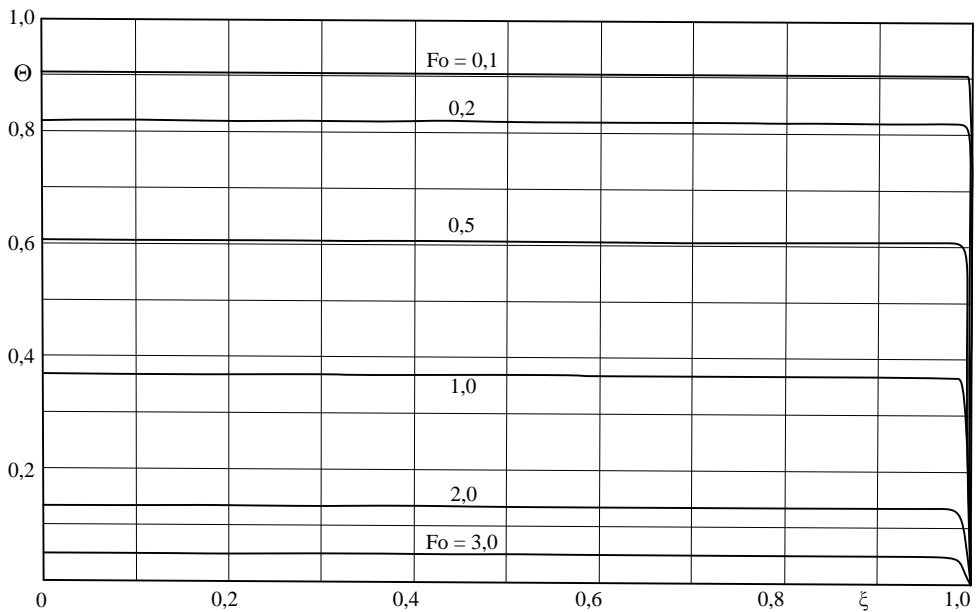


Рис. 12. Изменение напряжения по длине проводника:
 $F_1 = F_2 = 75000$; $n = 1000$

В случае, когда безразмерные комплексы F_1 и F_2 не равны нулю, колебания напряжения будут затухающими вплоть до достижения нулевого значения напряжения, заданного граничным условием (13). И, в частности, на рис. 3 и 4 приведены результаты расчетов при $F_1 = F_2 = 0,1$, из анализа которых следует, что скачкообразное изменение напряжения в прямой и обратной волнах сохраняется.

С увеличением F_1 и F_2 ($F_1 = F_2 = 1,0$; см. рис. 5, 6) колебательный процесс смещается в область положительных значений напряжений. При $F_1 = F_2 = 10$ после достижения фронтом волны конца проводника ($\xi = 0$) скачки напряжения прекращаются и при дальнейшем увеличении F_0 напряжение монотонно уменьшается вплоть до $U = 0$ при $F_0 \approx 4$ (см. рис. 7, 8).

При $F_1 = F_2 = 100$ скачки напряжения прекращаются уже при $\xi = 0,85$, и в дальнейшем уменьшение напряжения вплоть до нулевого его значения происходит практически при отсутствии градиента напряжения по длине проводника (см. рис. 9, 10). И при каких-то больших значениях F_1 и F_2 ($F_1 = F_2 = 75000$) падение напряжения в проводнике происходит без скачков и при отсутствии градиента напряжений по длине проводника (см. рис. 11, 12).

Выводы

1. Анализ точного аналитического решения телеграфного уравнения (9), представленного в безразмерном виде, позволяет заключить, что при малых значениях безразмерных комплексов F_1 и F_2 изменение напряжения по длине проводника происходит скачкообразно со сменой знака напряжения в прямой и обратной волнах вплоть до полного затухания колебаний.

2. С увеличением F_1 и F_2 происходит смещение колебательного процесса в область положительных значений напряжения. При этом его скачкообразное изменение происходит лишь на части длины проводника, а на оставшейся длине напряжение уменьшается практически при отсутствии градиента напряжения по пространственной переменной.

3. При дальнейшем увеличении F_1 и F_2 изменение напряжения происходит без скачков и при отсутствии градиента напряжений по длине проводника.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.–Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951. – 659 с.
2. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1969. – 287 с.
3. Кудинов И.В., Кудинов В.А. Аналитические решения параболических и гиперболических уравнений теплопереноса. – М.: ИНФРА-М, 2013. – 391 с.
4. Кабисов К.С., Камалов Т.Ф., Лурье В.А. Колебания и волновые процессы: Теория. Задачи с решениями. – М.: Ком-Книга, 2010. – 360 с.

Статья поступила в редакцию 14 января 2017 г.

RECEIVING AND RESEARCH OF THE ANALYTICAL SOLUTION OF THE CABLE EQUATION FOR CONDUCTORS WITH THE DISTRIBUTED PARAMETER

I.V. Kudinov

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

On the basis of a method of variables separation the exact analytical solution of a telegraph equation concerning tension for the long line with uniformly distributed parameters is received (inductance, resistance, capacities and leak of electricity through insulation). Researches of the decision allowed to draw a conclusion that movement of an electricity in the conductor happens in a wave mode, at the front which watches voltage surge (current intensity). Existence of a saltus testifies to the infinite value of a potential gradient of required function in this point. After achievement the wave front of the opposite end of the conductor watches backward wave with a saltus of an opposite sign. Eventually the vibration amplitude of straight lines and backward waves decreases up to total attenuation of oscillatory process. In case of some great values of the pure resistance spasmodic voltage variation is watched only in case of small values of time on initial sections of the conductor and stops before timepoint in case of which the wave front reaches the opposite end of the conductor. With increase in time tension on the conductor's length monotonically (without saltuses) decreases up to establishment of an equilibrium (stationary) status when tension in all points of the conductor is identical and invariable in time.

Keywords: telegraph equation, exact analytical decision, distributed parameters, wave oscillations, front of perturbation, gallop of required function, the infinite speed of distribution of potentials.