

УДК 621.311:519.216

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАСЧЕТНЫХ МАКСИМУМОВ КВАДРАТИЧНОГО ИНЕРЦИОННОГО СГЛАЖИВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Э.Г. Куренный, А.А. Булгаков

Донецкий национальный технический университет
Украина, 83001, г. Донецк, ул. Артема, 58

Рассматривается нелинейная задача о квадратичном инерционном сглаживании показателей режима и ЭМС систем электроснабжения. Исходный процесс считается случайным, эргодическим с нормальным законом распределения. Применимость приближенных законов распределения оценивается сопоставлением со статистически точным имитационным решением – по допустимой погрешности определения расчетных инерционных максимумов (квантилей). Определены границы нормализации распределений. Найдены области неоднозначности и применимости усеченных рядов Грамма – Шарлье и Эджворта. В практических задачах рекомендуется использовать квантили гамма-распределения и предложенный «метод разностей».

Ключевые слова: электрическая нагрузка, показатели ЭМС, квадратичное инерционное сглаживание, инерционные максимумы, имитация, нормализация, приближенные методы, области применимости.

Постановка задачи

Для оценки электромагнитной совместимости (ЭМС) и нагрева проводников используют квадратичное инерционное сглаживание параметров ЭМС и электрической нагрузки, при котором рассматриваемый объект моделируется инерционным звеном с постоянной времени T .

В сетях электроснабжения исходные процессы $x(t)$ изменения параметров режима на участках стационарности обычно являются случайными, эргодическими, с нормальным распределением ординат. Аналитическое решение задачи о расчетных максимумах квадратичного инерционного процесса (КИП) $w_T(t)$ отсутствует. В приближенных методах применяются различные упрощающие допущения. В статье дается оценка возникающих вследствие этого погрешностей по сравнению с имитационным методом [1]. Для краткости изложение дается для исходного процесса с экспоненциальной корреляционной функцией (КФ). Примером является электрическая нагрузка группы электроприемников [2, (1–46)].

Математические модели

Процесс $x(t)$ имеет нормальное распределение со средним значением x_c , среднеквадратическим отклонением (СКО) σ_x и КФ:

Эдуард Григорьевич Куренный, профессор кафедры «Электроснабжение промышленных предприятий и городов».

Александр Александрович Булгаков, старший преподаватель кафедры «Электрические системы».

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 \exp\{-\alpha|\tau|\} = \sigma_x^2 \exp\{-|\tau|/\tau_k\}, \quad (1)$$

где τ – аргумент; α – параметр, обратный времени корреляции τ_k . Для общности введем систему относительных единиц (о.е., символ $*$) с базовыми величинами: σ_x – для ординат и τ_k – для абсцисс. В этой системе $x_{c*} = x_c/\sigma_x$, $\sigma_{x*} = 1$, $T_* = T/\tau_k = \alpha T$.

При оценке нагрева ординаты $w_{T*} = w_T/\sigma_x^2$ в о.е. совпадают с температурой перегрева объекта. КИП связан с исходным $x_* = x/\sigma_x$ дифференциальным уравнением

$$T_* w'_{T*} + w_{T*} = x_*^2. \quad (2)$$

В соответствии с принципом практической уверенности расчетный максимум* w_{TM*} определяется с заданной интегральной вероятностью E_i , которую, как и в [3], примем равной 0,95. Максимум вычисляется по интегральной функции распределения $F(w_{T*})$ путем решения уравнения

$$F(w_{TM*}) = E_i. \quad (3)$$

В практике расчетные максимумы представляют формулой

$$w_{TM*}^{(\beta)} = x_{e*}^2 + \beta_{wT} \sqrt{D_{wT*}}, \quad (4)$$

в которой при известной функции распределения статистический коэффициент β_{wT} выражается через E_i .

Поскольку объекты могут иметь разную инерционность, целью расчетов является определение T -характеристики: зависимости расчетных максимумов от T .

Рассмотрим решения, которые можно использовать для оценки погрешностей (тестовые задачи в [1]). Во всем диапазоне средних значений исходного процесса и постоянных инерции среднее и СКО процесса $w_{T*}(t)$ определяются точно:

$$w_{Tc*} = w_{Tc}/\sigma_x^2 = \sigma_{x*}^2 + x_{c*}^2 = 1 + x_{c*}^2 = x_{e*}^2; \quad (5)$$

$$\sigma_{wT*} = \sigma_{wT}/\sigma_x^2 = \sqrt{2/(1+2T_*) + 4x_{c*}^2/(1+T_*)}, \quad (6)$$

где $x_{e*} = x_e/\sigma_x$ – эффективное значение процесса $x(t)$. Как видно из (5), среднее w_{Tc*} не зависит от постоянной инерции.

В частном случае нулевого среднего значения исходного процесса можно найти асимметрию и эксцесс [1, (15)]:

$$\text{Sk}_{wT} = \frac{2\sqrt{2}}{1+T_*} \sqrt{1+2T_*}; \quad \text{Ex}_{wT} = \frac{36+50T_*}{3+5T_*+2T_*^2}. \quad (7)$$

Точное решение известно лишь при отсутствии сглаживания при $T=0$, когда $w_0 = x^2$, а расчетный максимум w_{0M*} является начальной ординатой T -характеристики. В этом случае плотность распределения определяется по формуле (6) из [1], что позволяет рассчитать числовые характеристики и расчетные максимумы, а по ним – статистические коэффициенты β_{w0} (табл. 1).

* В терминах теории вероятностей – квантиль порядка 100 E_i , %.

Точные числовые характеристики процесса $w_{T^*}(t)$ при $T = 0$ в зависимости от x_{c^*}

x_{c^*}	0	1	2	3	4	5
w_{0c^*}	1	2	5	10	17	26
σ_{w0^*}	$\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$	$3\sqrt{2}$	$\sqrt{38}$	$\sqrt{66}$	$\sqrt{102}$
Sk_{w0}	$4/\sqrt{2}$	2,177	1,362	0,956	0,731	0,590
Ex_{w0}	12	6,667	2,519	1,230	0,716	0,466
w_{0M^*}	3,842	7,002	13,29	21,58	31,87	44,15
β_{w0}	2,010	2,042	1,954	1,878	1,830	1,797

При $T > 0$ для оценки погрешностей будем использовать найденное в [1] имитационное решение (символ \wedge) задачи о расчетных максимумах \hat{w}_{TM^*} . Имитационный метод можно считать статистически точным, поскольку обработка ведется по ансамблю из большого количества реализаций исходного процесса (250 шт.), а в тестовых задачах контролируются погрешности воспроизведения числовых характеристик, которые не должны превосходить заданные значения (1 % – для x_e).

Приближенные методы

Простейшим из них является «метод статистического коэффициента» (МСК), основанный на допущении о неизменности от T множителя перед СКО в формуле (4). Например, в [4, (V.10)] принято значение $\beta_w = \sqrt{3}$. При больших T происходит нормализация КИП, что позволяет использовать ту же формулу, но при $\beta_w = 1,645$.

Существует несколько методов, использующих ИТ-характеристику $x_{TM}(T)$ исходного процесса, по которой рассчитывается искомая КИТ-характеристика КИП. Инерционное сглаживание нормального процесса также дает нормальный инерционный процесс $x_T(t)$ с тем же средним значением x_{c^*} и СКО [4, (II.53)]:

$$\sigma_{xT^*} = 1/\sqrt{1+T^*}, \quad (8)$$

поэтому

$$x_{TM^*} = x_{c^*} + \beta\sigma_{xT^*} = x_{c^*} + \beta/\sqrt{1+T^*},$$

где коэффициент $\beta = 1,645$ не зависит от T .

Не останавливаясь на истории совершенствования таких методов, отметим, что наименьшую погрешность дает «метод разностей» из [5]. В нем предполагается, что коэффициент разности

$$k_{pM} = (\sqrt{w_{0M^*}} - x_{e^*})/(x_{0M^*} - x_{c^*})$$

не зависит от T . С учетом формулы (10) из [5] расчетные максимумы

$$w_{TM^*}^{(p)} \approx [(1 - k_{pM})x_{0M^*} + k_{pM}x_{TM^*}]^2. \quad (9)$$

Для описания случайных величин, ограниченных с одной стороны, исполь-

зуется гамма-распределение [6]. В этом случае при $w_T \geq 0$ плотность распределения определяется параметром масштаба λ с размерностью $(\text{о.е.})^{-2}$ и безразмерным параметром η :

$$f_{\Gamma}(w_T) = \frac{\lambda^{\eta}}{\Gamma(\eta)} w_T^{\eta-1} \exp\{-\lambda w_T\}, \quad (10)$$

где $\Gamma(\eta)$ – полная гамма-функция. С учетом формул (1.11) и (1.12) из [6] параметры выразим через (5) и (6):

$$\lambda = x_{e*}^2 / \sigma_{wT*}^2; \quad \eta = x_{e*}^4 / \sigma_{wT*}^2.$$

Функция распределения (неполная гамма-функция) получается интегрированием (10) от 0 до w_T . По ней согласно (3) вычисляются расчетные максимумы $w_{T\text{МГ}}$ КИП.

Приближенные методы, основанные на представлении плотностей ортогональными рядами, частично рассмотрены в приложении.

Оценка применимости приближенных методов

Будем выполнять оценку по точности расчета T -характеристики. Для определенности допустимую погрешность δ_d примем равной 5 %.

Рассмотрим вначале гамма-распределение. В числителях столбцов табл. 2 частично представлены имитационные максимумы из [1, табл. 1], а в знаменателях – $w_{T\text{МГ}}$. Во всех случаях относительные погрешности δ_{Γ} по абсолютному значению не превысили 1,4 %, поэтому ограничений по применению этого распределения для определения квантилей КИП нет. Следует подчеркнуть, что полученное приближенное равенство $\hat{w}_{T\text{МГ}} \approx w_{T\text{МГ}}$ свидетельствует о согласованности соответствующих законов распределения только в окрестностях квантилей*, но отнюдь не во всем диапазоне значений w_{T*} .

Перейдем к МСК. На примере случая с $T=0$ видно, что статистический коэффициент в формуле (4) не остается постоянным (см. табл. 1), поэтому МСК дает погрешность, зависящую от T . Левые граничные значения $T_{\beta*}$ применимости МСК (табл. 3) соответствуют погрешности 5 %. Правой границы нет, поскольку при больших T и (или) x_c погрешности не превышают 5 %.

Аналогично обстоит дело и при определении граничных значений T_{n*} применимости формулы (4) для нормального распределения. Следует отметить, что в [6] граница $T_{n\eta*}$ нормализации принимается из условия $\eta = 30$, однако при этом не указывается ни E_i , ни δ_d . Получаемые в этом случае данные в несколько раз превышают T_{n*} , что свидетельствует о том, что значение $\eta = 30$ относится к интегральной вероятности, существенно большей, чем 0,95.

Метод разностей не имеет ограничений по применению. Действительно, согласно табл. 2 из [5] даже в самом тяжелом случае нулевого среднего его наибольшая погрешность $3,47 < 5\%$. При $x_{c*} > 0$ расхождения уменьшаются.

* При необходимости выбор аппроксимирующего теоретического закона распределения производится путем проверки по критерию Пирсона – это не обязательно будет гамма-распределение.

Сопоставление квантилей гамма-распределения с имитационными при $E_i = 0,95$

x_{c*}	$T = 0$		1		2		5	
	$\frac{\hat{w}_{TM*}}{w_{TMГ*}}$	$\delta_{\Gamma}, \%$						
0	$\frac{3,830}{3,842}$	0,31	$\frac{2,596}{2,605}$	0,35	$\frac{2,219}{2,214}$	-0,23	$\frac{1,801}{1,789}$	-0,67
0,5	$\frac{4,759}{4,732}$	-0,57	$\frac{3,401}{3,383}$	-0,53	$\frac{2,937}{2,907}$	-1,02	$\frac{2,384}{2,352}$	-1,34
1	$\frac{7,002}{6,928}$	-1,06	$\frac{5,272}{5,210}$	-1,18	$\frac{4,588}{4,537}$	-1,11	$\frac{3,746}{3,229}$	-0,80
2	$\frac{13,29}{13,37}$	-0,60	$\frac{10,59}{10,61}$	0,15	$\frac{9,479}{9,476}$	-0,03	$\frac{8,054}{8,060}$	0,07
5	$\frac{44,15}{44,53}$	0,86	$\frac{38,50}{38,71}$	0,55	$\frac{36,10}{36,23}$	0,35	$\frac{33,06}{33,10}$	0,12

Как показано в приложении, границы применимости усеченных ортогональных рядов имеют большой разброс, особенно при небольших средних значениях. Из табл. 3 видно, что при $x_{c*} = 0$ для ряда Эджворта граница $T_{E*} = 4$ даже меньше T_{n*} , но уже при $x_{c*} = 0,5$ она возрастает в десятки раз, затем при $x_{c*} = 1$ уменьшается до единицы, что меньше $T_{n*} = 6,1$, а затем снова возрастает до 17,5. Лишь после $x_{c*} = 3$ область применимости не ограничивается. Аналогично изменяется и граница T_{GSH*} , но ряд Грамма – Шарлье класса А во всех случаях дает худший количественный результат.

Таблица 3

Границы применимости приближенных методов

x_{c*}	0	0,5	1	2	3	4	5
$T_{\beta*}$	1,8	2,8	2,6	0,9	0,1	0	0
T_{n*}	4,9	6,5	6,1	2,7	1,0	0,2	0
$T_{n\eta*}$	29,5	37,7	36,6	19,4	10,1	5,7	3,9
T_{E*}	4	>50	1	17,5	0	0	0
T_{GSH*}	18,6	>50	8,1	26,7	0,2	0	0

Вывод

Сопоставление приближенных методов показывает, что если нет возможности находить имитационные решения задачи КИП случайных электроэнергетических процессов, то расчетные максимумы следует определять по гамма-распределению или методом разностей.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В прикладных методах теории случайных функций в качестве приближенных решений используются разложения плотности КИП в ортогональные ряды – чаще всего Грамма – Шарлье класса А и Эджворта [7, 8]. При этом вынужденно ограничиваются моментами распределения до четвертого порядка включительно. Ряды выражаются через плотность $\varphi(u)$ стандартного нормального распределения. Для компактности записи введем обозначение

$$\Pi_{w_T} = (w_T - w_{Tc})/\sigma_{w_T} = (w_{T*} - w_{Tc*})/\sigma_{w_{T*}}.$$

В этом случае формула (17.6.5) из [7] для плотности ряда Грамма – Шарлье (индекс 1) принимает вид

$$f_{1*}(w_{T*}) = \sigma_{w_T} f_1(w_T) \approx \varphi(\Pi_{w_T}) - \frac{\text{Sk}_{w_T}}{3!} \varphi^{(3)}(\Pi_{w_T}) + \frac{\text{Ex}_{w_T}}{4!} \varphi^{(4)}(\Pi_{w_T}),$$

где производные берутся по w_{T*} .

С увеличением T_* распределение приближается к нормальному: кривая плотности становится одновершинной, а ее ветви по обе стороны от вершины при $w_{T*} \rightarrow 0$ и ∞ мало отличаются от нуля [9]. В этих случаях применяют ряд Эджворта* (индекс 2) [7, (17.7.5)]:

$$f_{2*}(w_{T*}) \approx \varphi(\Pi_{w_T}) - \frac{\text{Sk}_{w_T}}{3!} \varphi^{(3)}(\Pi_{w_T}) + \frac{\text{Ex}_{w_T}}{4!} \varphi^{(4)}(\Pi_{w_T}) + \frac{10\text{Sk}_{w_T}^2}{3!} \varphi^{(6)}(\Pi_{w_T}).$$

В приведенных формулах абсциссы считаются неограниченными. В частности, функции распределения $F_{1,2}(w_T)$ получают интегрированием от $-\infty$ до w_T . В действительности же ординаты $w_T(t)$ являются сугубо положительными. Такое несоответствие устраняется путем использования усеченных распределений. С учетом общих формул (I.11) и (I.12) из [4] получим соответствующие плотности и функции распределения (индекс «у»):

$$f_{1,2y*}(w_{T*}) = \frac{1}{1 - F_{1,2*}(0)} f_{1,2*}(w_{T*}) \text{ при } w_{T*} \geq 0;$$

$$F_{1,2y*}(w_{T*}) = \frac{1}{1 - F_{1,2*}(0)} [F_{1,2*}(w_{T*}) - F_{1,2*}(0)],$$

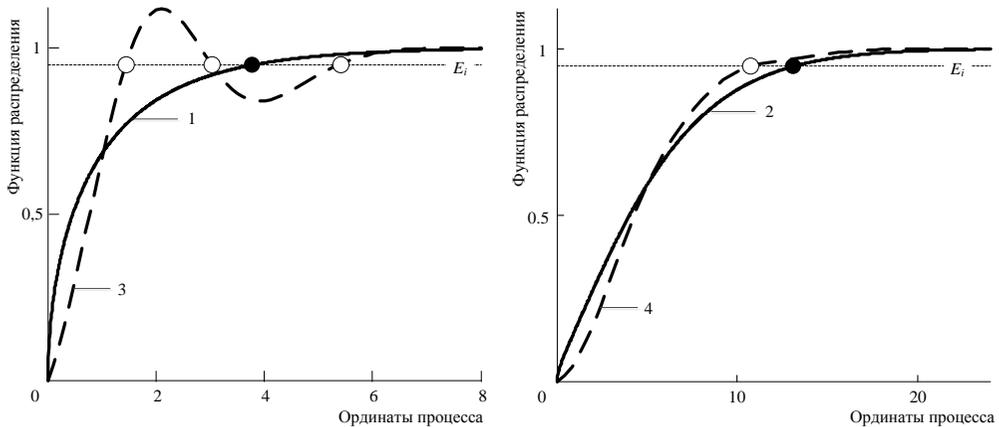
где учтено, что при неограниченном верхнем пределе $F_{1,2}(\infty) = 1$.

Переходя к оценке применимости ортогональных рядов, рассмотрим вначале случай $T = 0$, когда известны распределения и начальные ординаты T -характеристики (см. табл. 1). Точные плотности при любых $x_{c*} > 0$ являются одновершинными и располагаются в первом квадранте координатных осей w_{0*} и $f(w_{0*})$. Соответствующие функции распределения (кривые 1 и 2 на рисунке) также имеют только положительные координаты, монотонно возрастая от 0 до 1.

Иначе обстоит дело с приближенными законами распределения. При $x_{c*} = 0$ неусеченные плотности располагаются во всех квадрантах, а усеченные – в первом и во втором, а также имеют локальные максимумы и минимумы, что противоречит физическому смыслу. Функции распределения ряда Грамма – Шарлье (кривая 3) и ряда Эджворта (кривая 4) превышают единицу, чего не должно быть

* В аналогичной формуле из [10] допущена описка: перед вторым слагаемым должен быть знак минус, а не плюс. Кроме того, в ней отсутствует четвертый член ряда.

по определению. Немонотонность функции распределения приводит к неоднозначности в определении расчетного максимума w_{0M*} . Действительно, кривая 1 пересекает горизонталь $E_i = 0,95$ один раз (темный кружок), в то время как кривая 3 – три раза (светлые кружки). С увеличением среднего значения неоднозначность исчезает, однако даже единственная точка пересечения кривой 4 и горизонтали E_i может располагаться сравнительно далеко от точного значения.



Функции распределения процесса $x^2(t)$:

1, 2 – точные; 3 – усеченный ряд Грамма – Шарлье класса А; 4 – усеченный ряд Эджворта (1 и 3 – при $x_{c*} = 0$; 2 и 4 – при $x_{c*} = 2$)

Перейдем к постоянным времени, отличным от нуля. Здесь приближенные функции распределения будем сравнивать с имитационными $F(\hat{w}_T)$. При определении последних требуется статистически точное воспроизведение нормального закона распределения исходного процесса и его КФ. Асимметрия же и эксцесс КИП используются лишь для тестовых проверок качества реализаций $w_T(t)$, отрицательный результат которых приводит к их отбраковке на стадии создания ансамбля. Однако в приближенных методах эти характеристики являются определяющими. Даже при имитации* их разброс очень большой: допустимая погрешность для асимметрии в 12 раз превышает погрешность для дисперсии, а эксцесса – в 20 раз. Поэтому и границы областей применимости рядов также имеют большой разброс. Исследования показали, что зоны неоднозначности одинаковы для обоих рядов: в осях x_{c*} и T_* правые граничные точки этих зон имеют координаты (0; 3), (0,5; 2), (1; 0). Левые границы применимости T_{E*} усеченного ряда Эджворта и T_{GSH*} ряда Грамма – Шарлье класса А приведены в табл. 3.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Куренный Э.Г., Дмитриева Е.Н., Булгаков А.А. Статистическое решение задачи о квадратичном инерционном сглаживании случайных электроэнергетических процессов // Изв. РАН. Энергетика. – 2016. – № 4. – С. 109-122.

* В экспериментальных исследованиях погрешности будут еще большими, поскольку в действующих электрических сетях далеко не всегда удастся обеспечить одни и те же условия проведения каждого опыта.

2. Основы построения промышленных электрических сетей / Г.М. Каялов, А.Э. Каждан, И.Н. Ковалев, Э.Г. Куренный. – М.: Энергия, 1978. – 352 с.
3. Дмитриева Е.Н. Принцип практической уверенности в задачах электроэнергетики // Электричество. – 2008. – № 6. – С. 15-21.
4. Шидловский А.К., Куренный Э.Г. Введение в статистическую динамику систем электроснабжения. – Киев: Наукова думка, 1984. – 271 с.
5. Куренный Э.Г., Булгаков А.А. Методы расчета эффективных максимумов параметров режима систем электроснабжения // Изв. вузов. Электромеханика. – 2016. – № 5 (547). – С. 75-80.
6. Плескунин В.И., Воронина Е.Д. Теоретические основы организации и анализа выборочных данных в эксперименте. – Л.: Изв-во Ленингр. ун-та, 1976. – 232 с.
7. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1978. – 719 с.
8. Куренный Э.Г. К вопросу об определении расчетных электрических нагрузок по нагреву // Электричество. – 1969. – № 1. – С. 23-29.
9. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
10. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. – М.: Наука, 1986. – 463 с.

Статья поступила в редакцию 2 февраля 2017 г.

APPROXIMATE METHODS TO DETERMINE CALCULATED MAXIMA OF SQUARE INERTIA SMOOTHING OF STOCHASTIC ELECTRIC-POWER PROCESSES

E.G. Kourennyi, A.A. Bulgakov

Donetsk National Technical University
58, Artema st., Donetsk, 83001, Ukraine

The nonlinear problem of the square inertia smoothing of mode and EMC parameters of power-supply systems is considered. The initial process is regarded as a stochastic ergodic normal process. Applicability of approximate distribution laws is estimated by comparing them with statistically accurate simulating solution on the basis of admissible error of calculated inertia maxima (quantiles). Distribution normalization borders have been determined. Ambiguity zones and applicability domains of truncated Gram-Charlier and Edgeworth series have been defined. For practice purposes it is recommended to use quantiles of gamma distribution and the proposed «differences method».

Keywords: electrical load, EMC parameters, square inertia smoothing, inertia maxima, simulation, normalization, approximate methods, applicability domains.

*Eduard G. Kourennyi, Professor.
Alexander A. Bulgakov, Senior Lecture.*