

Информатика, вычислительная техника и управление

УДК 517.977.56

СИНТЕЗ АЛГОРИТМОВ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ ИНДУКЦИОННОГО НАГРЕВА СТАЛЬНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЗАГОТОВКИ ПРИ НЕПОЛНОМ ИЗМЕРЕНИИ СОСТОЯНИЯ

М.Х. Артур

Самарский государственный технический университет
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 24

Рассматривается задача синтеза оптимального управления процессом периодического индукционного нагрева стальной цилиндрической заготовки в системе с обратной связью по температуре, измеряемой в одной из точек по объему заготовки. В качестве критерия оптимальности используется взвешенная сумма интегральных квадратичных ошибок приближения температурного поля к заданному распределению и энергетических затрат на реализацию процесса управления. Поведение температурного поля описывается одномерным уравнением Фурье с нелинейными граничными условиями, учитывающими теплопотери за счет конвекции и излучения. Для синтеза алгоритма управления используется метод динамического программирования, основанный на принципе оптимальности Беллмана.

Ключевые слова: *объект с распределенными параметрами, синтез оптимального управления, индукционный нагрев, динамическое программирование, измеритель состояния.*

Введение

В настоящее время одним из наиболее широко используемых в промышленности видов термической обработки металлов является индукционный нагрев, который обладает следующими несомненными преимуществами по сравнению с другими видами термической обработки: высокой скоростью нагрева, относительно низким энергопотреблением, меньшими потерями металла в окалину и трудозатратами на эксплуатацию, возможностью встраивания в технологическую линию производственного комплекса и относительной простотой автоматизации производственных операций [1, 2].

Возмущения, возникающие в процессе индукционного нагрева, могут привести к несоблюдению требуемых температурных кондиций заготовки и впоследствии к браку изготавливаемых изделий. Минимизировать создаваемые возмущениями отклонения от требуемого поведения температурного поля можно с помощью системы оптимальной стабилизации с обратной связью по температуре заготовки.

В статье формулируется и решается задача поиска алгоритма оптимального

управления процессом периодического индукционного нагрева стальной цилиндрической заготовки в системе с обратной связью по температуре, измеряемой в одной из точек по объему заготовки. Для синтеза алгоритма оптимального управления процессом нагрева заготовки, представляющей объект с распределенными параметрами (ОРП), применялся метод динамического программирования, основанный на принципе оптимальности Беллмана. Для моделирования поведения температурного поля в процессе индукционного нагрева с оптимальным управлением использовался метод конечных разностей.

Постановка задачи синтеза алгоритма оптимального управления в замкнутой системе автоматического регулирования

Рассмотрим задачу синтеза алгоритма оптимального управления процессом индукционного нагрева в замкнутой системе, обеспечивающего минимальное в квадратичной метрике отклонение изменяющегося во времени t и по пространственной координате x температурного поля цилиндрической заготовки $\Theta(x, t)$ от требуемого равномерного температурного распределения Θ_{req} за конечное время t_{end} .

Применительно к процессам периодического осесимметричного индукционного нагрева цилиндрической заготовки, длина которой значительно превышает ее радиус, можно пренебречь распределением температурного поля по длине заготовки и использовать одномерное уравнение теплопроводности для описания изменения во времени радиального распределения температуры. В исследуемом случае замкнутая система представляет собой систему оптимальной стабилизации, которая минимизирует отклонения от заданного поведения температурного поля заготовки, реализуемого в основной системе программного управления. Вследствие малости отклонений можно пренебречь зависимостью от температуры теплофизических свойств материалов и использовать для описания поведения температурного поля в процессе индукционного нагрева уравнение следующего вида [3]:

$$\frac{\partial \Theta(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \Theta(x, t)}{\partial x^2} + \frac{a}{x} \frac{\partial \Theta(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{c \gamma} F(x, t) \quad (1)$$

с краевыми условиями:

$$\Theta(x, 0) = \Theta_0(x); \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, t)}{\partial x} = 0;$$

$$\lambda \frac{\partial \Theta(x_R, t)}{\partial x} = \alpha (\Theta_{amb} - \Theta(R, t)) + \sigma_{SB} \varepsilon_{st} \left((\Theta_{amb}^4 - \Theta^4(R, t)) \right) \quad (3)$$

$$0 < t \leq t_1,$$

где λ – теплопроводность;

c – теплоемкость;

γ – плотность;

$a = \lambda / c \gamma$ – коэффициент температуропроводности стали;

Θ_{amb} – температура окружающей среды;

σ_{SB} – постоянная Стефана – Больцмана;

ε_{st} – степень черноты стали;

α – коэффициент теплообмена;

$F(x, t)$ – мощность внутренних источников тепла, которая может быть

представлена в следующем виде:

$$F(x, t) = W(x)F^*(t), \quad (4)$$

где $F^*(t)$ – сосредоточенное управляющее воздействие;
 $W(x)$ – функция пространственного распределения внутренних источников тепла следующего вида [2]:

$$W(x) = \hat{\xi} \frac{ber'^2(\hat{\xi}x/R) + bei^2(\hat{\xi}x/R)}{(ber\hat{\xi}ber'\hat{\xi} + bei\hat{\xi}bei'\hat{\xi})}, \quad (5)$$

где $\hat{\xi} = R\sqrt{2\pi f \mu_{abs} \sigma}$;

f – частота питающего индуктор тока,

μ_{abs} – абсолютная магнитная проницаемость;

σ – удельная электропроводность стали.

В качестве характерного квадратичного критерия оптимальности рассмотрим функционал качества следующего вида:

$$I = \int_0^{t_{end}} S(t) dt \rightarrow \min, \quad (6)$$

где $S(t)$ имеет следующий вид [4]:

$$S(t) = \int_{x_0}^{x_R} \int_{x_0}^{x_R} \omega_1(x, \xi) (\Theta(x, t) - \Theta_{req}) (\Theta(\xi, t) - \Theta_{req}) dx d\xi + \omega_2 \int_{x_0}^{x_R} F^2(x, t) dx \quad (7)$$

и $\omega_1(x, \xi)$, ω_2 – весовые коэффициенты.

В связи с тем, что отклонения температурного поля $\Theta(x, t)$ от требуемого значения Θ_{req} малы и минимизация этих отклонений входит в критерий оптимальности, можно пренебречь ограничениями на поведение температурного поля заготовки $\Theta(x, t)$ и управляющего воздействия $F^*(t)$ [4].

Исходя из сказанного можно сформулировать следующую задачу: для объекта, описываемого уравнением (1) с краевыми условиями (2) и (3), необходимо найти оптимальный алгоритм управления с обратной связью $F^*(t)$, обеспечивающий минимум критерия оптимальности (6).

Алгоритмы оптимального управления

Для построения замкнутых систем управления объектами с распределенными параметрами желательно иметь информацию об управляемой величине в каждый момент времени и в каждой точке пространственной области, занимаемой объектом. Однако полную информацию о функции состояния ОРП получить практически невозможно. Таким образом, для ОРП можно осуществить только неполное измерение состояния объекта, характеризуемого бесконечным количеством управляемых величин с помощью конечного числа измерителей [5]. Однако для рассматриваемого случая индукционного нагрева, когда мощность внутренних источников тепла представлена в виде произведения изменяющегося во времени сосредоточенного управляющего воздействия и заранее фиксируемой функции распределения внутреннего управления (5), можно синтезировать внутреннее сосредоточенное управляющее воздействие по сосредоточенным сигналам измерения состояния системы в отдельных фиксированных точках пространственной области [4].

Исследуем случай с одним точечным измерителем состояния, выходом которого является температура $\Theta_M(t)$ в одной фиксированной точке заготовки x_M

(способ ее выбора будет пояснен далее). Будем считать процесс измерения безынерционным, следовательно, сигнал с выхода измерителя можно представить в следующем виде [4]:

$$\Theta_M(t) = \int_{x_0}^{x_R} G_M(x) \Theta(x, t) dx, \quad (8)$$

где функция Грина точечного измерителя $G_M(x)$ представляет собой δ -функцию:

$$G_M(x) = \delta(x - x_M), \text{ при } x_M \in [x_0, x_R]. \quad (9)$$

Алгоритм оптимального управления можно найти с помощью метода динамического программирования, основное уравнение которого имеет следующий вид:

$$\min_{F^*(t)} \left(\frac{dV}{dt} + S(t) \right) = \left(\frac{dV}{dt} + S(t) \right)_{F^*(t)=F_{opt}^*(t)} = 0, \quad (10)$$

где $F_{opt}^*(t)$ – оптимальное управление;

V определяется следующим выражением:

$$V = \int_{x_0}^{x_R} \int_{x_0}^{x_R} v(x, \xi) (\Theta_M(t) - \Theta_{req})^2 dx d\xi, \quad (11)$$

$v(x, \xi)$ – подлежащая определению функция пространственных координат [4].

Поскольку $\Theta_M(t)$ – сосредоточенный сигнал, не зависящий от пространственных координат, то согласно (11) [4]

$$V = (\Theta_M(t) - \Theta_{req})^2 \int_{x_0}^{x_R} \int_{x_0}^{x_R} v(x, \xi) dx d\xi = Z (\Theta_M(t) - \Theta_{req})^2, \quad (12)$$

$$Z = \int_{x_0}^{x_R} \int_{x_0}^{x_R} v(x, \xi) dx d\xi.$$

С учетом уравнения измерения (8) выражение (12) можно записать следующим образом:

$$V = \int_{x_0}^{x_R} \int_{x_0}^{x_R} G_M(x) Z G_M(\xi) ((\Theta(x, t) - \Theta_{req})(\Theta(\xi, t) - \Theta_{req})) dx d\xi. \quad (13)$$

Если выполняется равенство

$$v(x, \xi) = G_M(x) Z G_M(\xi), \quad (14)$$

то можно, используя методику, предложенную в [4], найти решение поставленной задачи.

При выполнении условия

$$x_0 < x_M < x_R \quad (15)$$

можно, используя уравнение модели объекта (1) и соотношение (13), после простых преобразований получить при $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\delta(x_0 - x_M)}{x_0} = 0$ [6] следующее выражение

для производной dV/dt :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \int_{x_0}^{x_R} \int_{x_0}^{x_R} L(v) (\Theta(x, t) - \Theta_{req}) (\Theta(\xi, t) - \Theta_{req}) d\xi dx + \\ &+ \frac{1}{c\gamma} \int_{x_0}^{x_R} F(x, t) \left[\int_{x_0}^{x_R} [v(x, \eta) + v(\eta, x)] (\Theta(\eta, t) - \Theta_{req}) d\eta \right] dx, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$L(v) = a \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, \xi) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{a}{x} v(x, \xi) \right) + a \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} v(x, \xi) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{a}{\xi} v(x, \xi) \right). \quad (17)$$

Оптимальное управление находится из условия минимизации суммы $(dV/dt) + S$ по F , которое без учета ограничений на управляющее воздействие сводится к равенству

$$\frac{\partial(dV/dt) + S}{\partial F} = 0; \quad \text{для всех } t \in (0, t_{end}), \quad (18)$$

принимающему после простых преобразований в соответствии с (4) следующий вид:

$$\int_{x_0}^{x_R} \left\{ 2\omega_2 F^*(t) W^2(x) + \frac{1}{c\gamma} W(x) \int_{x_0}^{x_R} [v(x, \eta) + v(\eta, x)] (\Theta(\eta, t) - \Theta^*) d\eta \right\} dx = 0 \quad (19)$$

для всех $t \in (0, t_{end})$.

Приравнявая к нулю выражение в фигурных скобках под знаком интеграла (19), получим алгоритмы оптимального управления в искомой форме закона обратной связи по управляемой функции состояния:

$$F_{opt}^*(t) = - \left(Z / \omega_2 c\gamma \int_{x_0}^{x_R} W^2(x) dx \right) (\Theta(x_M, t) - \Theta_{req}) W(x_M). \quad (20)$$

Подставляя найденное выражение (20) в уравнение (1) и решая уравнение с начальными и граничными условиями вида (2), (3), можно найти температурное поле в процессе оптимального индукционного нагрева.

Используя основное уравнение метода динамического программирования (10), найдем весовой множитель $\omega_1(x, \xi)$, для которого можно обеспечить выполнение определяющего равенства (14) при $Z = const \neq 0$. Для этого преобразуем уравнение (10) с учетом (20) и получим выражение следующего вида:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dV}{dt} + S(t) \right)_{F=F^*} &= \int_{x_0}^{x_R} \int_{x_0}^{x_R} \left\{ L(v) + \omega_1(x, \xi) - \right. \\ &- \left[1 / 4\omega_2(c\gamma)^2 \int_{x_0}^{x_R} W^2(x) dx \right] \left[\int_{x_0}^{x_R} W(\eta) [v(\eta, x) + v(x, \eta)] d\eta \int_{x_0}^{x_R} W(\eta) [v(\eta, \xi) + v(\xi, \eta)] d\eta \right] \times \\ &\left. \times (\Theta(x, t) - \Theta_{req}) (\Theta(\xi, t) - \Theta_{req}) dx d\xi \right\} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Равенство (21) обеспечивается для всех $t \in (0, t_{end})$ равенством нулю подинтегральной функции в фигурных скобках формулы (21):

$$L(v) + \omega_1(x, \xi) - \left(\frac{1}{4\omega_2(c\gamma)^2} \int_{x_0}^{x_R} W^2(x) dx \right) \times \left\{ \int_{x_0}^{x_R} W(\eta) [v(\eta, x) + v(x, \eta)] d\eta \int_{x_0}^{x_R} W(\eta) [v(\eta, \xi) + v(\xi, \eta)] d\eta \right\} = 0. \quad (22)$$

Преобразовав (22) с учетом (9), (14) и (17), получим для $\omega_1(x, \xi)$ выражение следующего вида:

$$\begin{aligned} \omega_1(x, \xi) = & \left(Z^2 / \omega_2(c\gamma)^2 \int_{x_0}^{x_R} W^2(x) dx \right) \left(W^2(x_M) \delta(x - x_M) \delta(\xi - x_M) \right) - \\ & - Z \left[\delta(\xi - x_M) \left(a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta(x - x_M) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{a}{x} \delta(x - x_M) \right) + \right. \\ & \left. + \delta(x - x_M) \left(a \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \delta(\xi - x_M) - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{a}{\xi} \delta(\xi - x_M) \right) \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Подставив полученное выражение в (7), после ряда преобразований получим следующую формулу для расчета $S(t)$ в зависимости от $\Theta(x_M, t)$ [4]:

$$\begin{aligned} S(t) = & \frac{Z^2 W^2(x_M)}{\omega_2(c\gamma)^2 \int_{x_0}^{x_R} W^2(x) dx} (\Theta(x_M, t) - \Theta_{req})^2 + \omega_2 F^{*2}(t) \int_{x_0}^{x_R} W^2(x) dx - \\ & - 2Z (\Theta(x_M, t) - \Theta_{req}) \left(a \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\Theta(x_M, t) - \Theta_{req}) + \frac{a}{x_M} \frac{\partial}{\partial x} (\Theta(x_M, t) - \Theta_{req}) \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Таким образом, найденный алгоритм управления (20) обеспечивает в соответствии с (6), (24) минимум взвешенной суммы отклонения температуры в точке измерения от требуемой и энергетических затрат, а также минимум первой и второй производных отклонения температуры в точке измерения от требуемой по пространственной координате.

Численное решение задачи

Численное решение уравнения (1) при найденном алгоритме оптимального управления (20) с краевыми условиями (2), (3) было получено методом конечных разностей для следующих параметров процесса индукционного нагрева: радиус цилиндра $R = 0,05$ м, время нагрева $t_{end} = 70$ с, коэффициент теплопроводности $\lambda = 28,7$ Вт/(м $^\circ$ С), плотность $\gamma = 7486$ кг/м 3 ; удельная теплоемкость $c = 647$ Дж/К, относительная магнитная проницаемость $\mu = 1$, удельная электропроводность $\sigma = 8,2 \cdot 10^5$ См/м, постоянная Стефана – Больцмана $\sigma_{SB} = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт \cdot м $^{-2} \cdot$ К $^{-4}$, температура окружающей среды $\Theta_{amb} = 20$ $^\circ$ С, приведенная степень черноты заготовки $\varepsilon_{st} = 0,7$, коэффициент теплообмена $\alpha = 10$ Вт/(м $^2 \cdot$ $^\circ$ С), требуемая температура $\Theta_{req} = 1200$ $^\circ$ С; $\omega_2 = 1 \cdot 10^{-12}$ м 5 /с \cdot Вт 2 , $Z = 1$ К $^{-2}$.

Исходя из требований практической реализации замкнутой системы управления процессом индукционного нагрева с точечным измерителем состояния в качестве точки измерения предпочтительно выбрать точку на поверхности заготовки $x_M = x_R$. Однако это недопустимо в связи с наложенным ограничением (15), поэтому была выбрана точка $x_M = 0,99 R$, температура в которой пренебре-

жительно мало отличается от температуры в точке на поверхности заготовки.

Учет нелинейных граничных условий (3) существенно повышает точность расчета в условиях, когда температура поверхности заготовки значительно превышает температуру окружающей среды.

Система уравнений, полученная после аппроксимации производных в (1) – (3) конечными разностями, была решена методом прогонки в программном пакете MatLab [7].

Результаты численного решения задачи представлены на рис. 1–3. На рис. 1 показано распределение температурного поля по радиусу заготовки в моменты времени $t = 0$, $t = 0,3 t_{end}$, $t = 0,6 t_{end}$, $t = t_{end}$; рис. 2 демонстрирует изменение температуры в процессе индукционного нагрева в точках $x = 0$, $x = 0,5 R$, $x = x_M$, $x = R$.

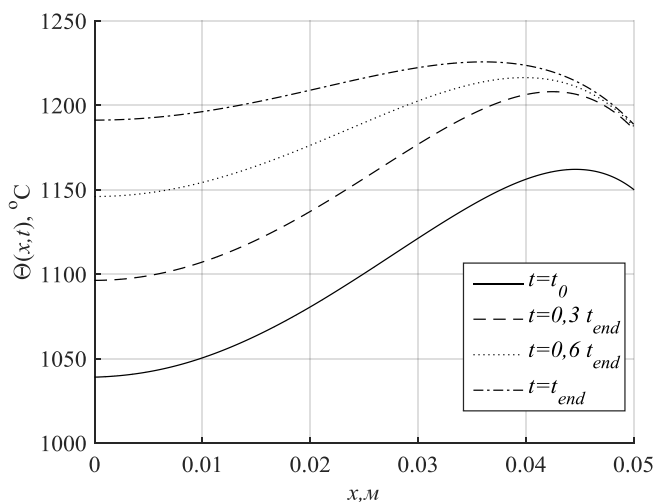


Рис. 1. Распределение температурного поля по радиусу заготовки в моменты времени $t = 0$, $t = 0,3 t_{end}$, $t = 0,6 t_{end}$, $t = t_{end}$

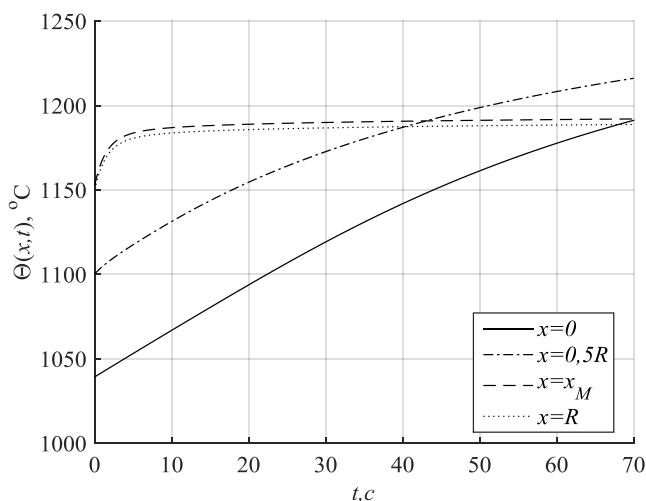


Рис. 2. Изменение температуры в процессе индукционного нагрева в точках $x = 0$, $x = 0,5 R$, $x = x_M$, $x = R$

Из представленных данных видно, что температуры в точке измерения $\Theta(x_M, t)$ и на поверхности заготовки $\Theta(R, t)$ практически совпадают на протяжении всего процесса нагрева, максимальное отклонение от требуемого распределения в конечный момент времени не превышает $26\text{ }^\circ\text{C}$, погрешность нагрева в точке измерения меньше $10\text{ }^\circ\text{C}$. На рис. 3 представлено изменение сосредоточенного управляющего воздействия в процессе нагрева.

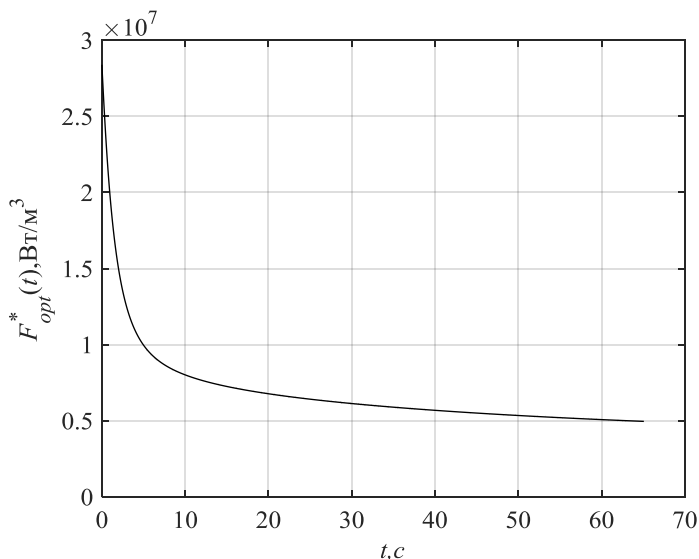


Рис. 3. Изменение управляющего воздействия в процессе индукционного нагрева

Заключение

В работе сформулирована и решена задача поиска алгоритма оптимального по критерию (23) управления внутренними источниками тепла в процессе индукционного нагрева стальной цилиндрической заготовки в замкнутой системе. Полученный алгоритм управления обеспечивает нагрев заготовки погрешностью не более $26\text{ }^\circ\text{C}$, что удовлетворяет технологическим требованиям в большинстве практических задач.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Немков В.С., Демидович В.Б. Теория и расчет устройств индукционного нагрева. – Д.: Энергоатом-издат, 1988. – 280 с.
2. Рапопорт Э.Я., Плишивцева Ю.Э. Оптимальное управление температурными режимами индукционного нагрева. – М.: Наука, 2012. – 309 с. – ISBN 978-5-02-037501-7 (в пер.).
3. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел: Учеб. пособие. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 2001. – 550 с.: ил.
4. Рапопорт Э.Я. Оптимальное управление системами с распределенными параметрами: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 2009. – 677 с.: ил.
5. Рапопорт Э.Я. Анализ и синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 2005. – 292 с.: ил.
6. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. – 2-е изд. переработ. и доп. – М.: Наука; Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 384 с.
7. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Разностные методы решения задач теплопроводности: Учеб. пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2007. – 172 с.

Статья поступила в редакцию 20 августа 2017 г.

SYNTHESIS OF OPTIMAL CONTROL ALGORITHMS FOR PROCESS OF INDUCTION HEATING OF STEEL

M.H. Artur

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya str., Samara, 443100

This paper considers the task of searching for optimal control algorithm of periodic induction heating process in temperature feedback system. Temperature is measured in one of the points of heated cylindrical steel billet. The criterion of optimality is the weighted sum of integral squared error of temperature field approaching to required distribution and energy costs for heating process implementation. Temperature field behavior is described by Fourier equation with nonlinear boundary conditions taking into account radiation and convection heat losses. Dynamic programming method based on Bellman's optimality principle is used for feedback optimal control algorithm synthesis.

Keywords: *Object with distributed parameters, optimal control synthesis, induction heating, dynamic programming method, temperature measurement.*