УДК 536.21

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЦИКЛИЧЕСКОГО КОНТАКТНОГО ТЕПЛООБМЕНА ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ПЛОСКИХ ТЕЛ ПРИ ИНИЦИИРОВАНИИ ТЕПЛОТЫ ДЕФОРМАЦИИ

В.В. Стулин

Самарский государственный технический университет
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

E-mail: stulinvv@mail.ru

С помощью интегрального преобразования Лапласа получены аналитические решения ряда циклических тепловых задач для плоских тел, включая задачу контактного теплообмена для системы двух бесконечных пластин с термическим сопротивлением в зоне контакта при различных условиях внешнего теплообмена. Для квазиустановившейся стадии процесса решение получено методом сопряжения в форме системы двух интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Решение учитывает циклическое инициирование теплообразующего источника пластического деформирования одной из пластин, при этом использованы два аналитических подхода: метод последовательных допущений (учитывает специальные условия теплообмена отдельных элементов контактной системы в произвольном цикле) и метод сопряжения (учитывает необходимые условия для образования системы интегральных уравнений).

Ключевые слова: *нестационарная теплопроводность, контактный теплообмен, бесконечная пластина, интегральное уравнение, теплообразующий источник, переменные во времени начальные и граничные условия, бесконечная скорость распространения теплоты, точное аналитическое решение, временные параметры циклического теплообмена, квазиустановившаяся стадия, термическое сопротивление, деформация.*

Вопросы управления и оптимизации большой группы процессов технологической теплофизики (это прежде всего процессы горячей обработки металлов давлением) связаны с необходимостью решения тепловых задач циклического контактного теплообмена (ЦКТ) с чередующимися краевыми условиями (IV $\rightleftarrows$ II) (или (IV $\rightleftarrows$ III), (IV $\rightleftarrows$ I)) рода на контактной поверхности. Обычно задачи такого класса решаются на основе редукции, а это неизбежно приводит к схематизации контактных систем разобщенными (одноэлементными) моделями с однородными граничными условиями II или I рода, при этом автоматически возникают и во многом остаются открытыми вопросы выбора мощности и точности задания разнородных и одновременно действующих тепловых источников (определение которых требует решения обратных тепловых задач) как в зонах контактирования объектов, так и в зонах их пространственной аккумуляции. К последним следует прежде всего отнести тепловые потоки q_v от трения тел по контактной поверхности, тепловые потоки q_w от пластического формоизменения отдельных элементов контактной системы и тепловые потоки q_f от началь-

Владимир Васильевич Стулин (к.т.н.), доцент кафедры «Высшая математика и прикладная информатика».

ного теплосодержания элементов. С позиций временной схематизации и циклического характера реальных теплоконтактных систем в математической модели циклическое температурное воздействие можно представить состоящим из непрерывной последовательности следующих друг за другом единичных циклов контактирования (m – номер произвольного цикла), каждый цикл включает контактный период длительностью τ_c и неконтактный длительностью τ_r (длительность цикла $\tau^+ = \tau_c + \tau_r$). Контактный период характеризуется возникновением пограничного термического слоя, который фактически неизвестен и поэтому формально выражается через некоторый условный коэффициент теплообмена α^{Σ} (термическое сопротивление пограничного слоя $\rho = 1/\alpha^{\Sigma}$, а его толщина $L(\rho)$). Именно это обстоятельство приводит в дальнейшем к некоторым особенностям математической постановки тепловой задачи и ее решения для неустановившейся (переходной) стадии ЦКТ.

Наиболее важной с практической точки зрения является квазиустановившаяся стадия процесса $(m \to \infty)$, когда достигаются предельно допустимые эксплуатационные температуры технических объектов, поэтому ниже применяются два возможных аналитических подхода определения указанных температур, причем первый из них учитывает некоторые специальные условия (последовательные допущения для разобщенной теплоконтактной системы), а второй – условия теплового сопряжения элементов контактной системы [1]. Каждый из подходов может быть реализован как для одного теплоисточника, так и для их совокупности, но в последнем случае математические выкладки и итоговые решения становятся весьма громоздкими. Поэтому ниже при решении задачи ЦКТ учитывается только теплоисточник пластической деформации q_w одного элемента контактной системы (металлозаготовки, при этом соответствующим величинам приписывается индекс w). С целью наглядности и возможности последующего численного анализа решена задача циклического контактирования двух плоских объектов (пластины конечных размеров l_1 для металлозаготовки и l_2 для инструмента), имеющих одну плоскость контактирования ($x = 0$) в принятой системе координат одномерной теплопередачи, при этом в математической постановке циклической краевой задачи учитывается следующее: толщина пограничного термического слоя равна нулю, температура окружающей среды $T_0 = 0$, $q_w \neq 0, q_v = 0, q_f = 0$ (физико-технологическое обоснование принятых допущений дано по тексту ниже приведенной формулировки задачи ЦКТ для неустановившейся стадии процесса $(m = const)$):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a_i \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) T_{wi}^{(m)}(x,t) = \frac{\delta_{1i} q_w}{c_i \gamma_i} \sum_{k=1}^{m} \left\{ \eta\left[t - (k-1)\tau^+\right] - \eta\left(t - k\tau^+ + \tau_r\right) \right\}, \quad (1)$$

$$(i = 1, 2), \quad t > 0, \quad m \in \mathrm{N},$$

где T – температура, K;

x – координата, м;

t – время, с;

c – удельная теплоемкость, Дж/(кг·К);

γ – плотность материала, кг/м^3;

q_w – объемная плотность источника теплоты, Вт/м^3;

a – коэффициент температуропроводности, м^2/с;

λ – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К);

δ_{1i} – символ Кронекера;

$\eta(t-\tau)$ – функция Хевисайда с параметром запаздывания τ. Индекс 1 добавляется ко всем величинам, относящимся к заготовке, а индекс 2 – к инструменту.

Граничные условия для контактной системы:

– при $x = l_2$

$$\frac{\partial T_{w2}^{(m)}(x,t)}{\partial x} + H_2 T_{w2}^{(m)}(x,t) = 0, \quad t > 0; \tag{2}$$

– при $x = -l_1$

$$\frac{\partial T_{w1}^{(m)}(x,t)}{\partial x} = 0, \quad t > 0; \tag{3}$$

– при $x = 0$

$$K_\lambda \frac{\partial T_{w1}^{(m)}(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial T_{w2}^{(m)}(x,t)}{\partial x} = H_2^{\Sigma}\left[T_{w2}^{(m)}(x,t) - T_{w1}^{(m)}(x,t)\right], \quad t \in \left[\tau^+(m-1), \tau^+(m-1) + \tau_c\right]; \tag{4}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_{w1}^{(m)}(x,t)}{\partial x} + \alpha_1' T_{w1}^{(m)}(x,t) = 0, \quad t \in \left[\tau_c + \tau^+(m-1), \tau^+ m\right]; \tag{5}$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_{w2}^{(m)}(x,t)}{\partial x} - \alpha_2' T_{w2}^{(m)}(x,t) = 0, \quad t \in \left[\tau_c + \tau^+(m-1), \tau^+ m\right]. \tag{6}$$

Начальные условия:

$$T_{w1}^{(m)}(x,t) = 0, \quad t \in (m-1)\tau^+, \quad m \in \mathrm{N}. \tag{7}$$

$$T_{w2}^{(1)}(x,t) = 0 \text{ при } t = 0; \; T_{w2}^{(m)}(x,t) = T_{w2}^{(m-1)}(x,t), \; t \in (m-1)\tau^+, \; m \geq 2. \tag{8}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$H_2 = \frac{\alpha_2}{\lambda_2}, \quad K_\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad H_2^{\Sigma} = \frac{\alpha^{\Sigma}}{\lambda_2},$$

α_1' и α_2' – коэффициенты теплообмена на контактной поверхности пластин на стадии их охлаждения $t \in (\tau_c, \tau^+)$ по закону Ньютона.

Постановка задачи вида (1)–(8) – это условно-обобщенная постановка задачи ЦКТ двух плоских тел до выхода на квазиустановившуюся стадию процесса.

Граничное условие (4) – это символическое двойное равенство, которое в компактной форме записи представляет, как и в [1], наиболее реальный характер единичного теплоконтактного взаимодействия двух пластин. Фактически определяющими этот процесс являются условно задаваемые (в технологически обоснованных пределах) величины ρ, α^{Σ} и $L(\rho)$:

$$\lambda_1 \frac{\partial T_{w1}^{(m)}(x,t)}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial T_{w2}^{(m)}(x,t)}{\partial x}, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_{w1}^{(m)}(x,t)}{\partial x} = \alpha^{\Sigma}\left[T_{w2}^{(m)}(x,t) - T_{w1}^{(m)}(x,t)\right],$$

$$T_{w1}^{(m)}(0,t) \neq T_{w2}^{(m)}(0,t), \quad L(\rho) = 0, \quad t \in \left[\tau^+(m-1), \tau^+(m-1) + \tau_c\right].$$

Сказанное выше относительно двойного равенства тепловых потоков автоматически означает, что в зоне контакта по температуре наблюдается скачок (размах которого зависит от α^{Σ}). Это обусловлено наличием пограничного термического сопротивления нулевой толщины, а по условиям сложного реального технологического контактного взаимодействия термическое сопротивление зависит от номера цикла $\rho(m) = 1/\alpha^{\Sigma}(m)$. Таким образом, для переходного циклического теплового процесса задача решается только методом постадийных решений (расчетов), который трудоемок и малоэффективен. Кроме того, согласно (5) и (6) дополнительно изменяются начальные и граничные условия в пределах цикла и при переходе от цикла к циклу ($m = var$). При такой последовательности решения задачи выполняются все граничные условия: для контактного периода выполняются условия (2), (3) и двойное равенство тепловых потоков (4), явный теплофизический вид которого при именованных физических константах получается после умножения всех его составляющих выражений на λ_2; для неконтактного периода условие (4) не функционирует и остаются условия (2), (3), (5), (6).

Более наглядная параметрическая зависимость условий контактного взаимодействия (4) от $\rho(m)$ имеет вид

$$T_{w2}^{(m)}(x,t) - T_{w1}^{(m)}(x,t) = \rho(m)\lambda_2 \frac{\partial T_{w2}^{(m)}(x,t)}{\partial x}, \lambda_1 \frac{\partial T_{w1}^{(m)}(x,t)}{\partial x} = \left(\frac{1}{1+\rho(m)}\right)\lambda_2 \frac{\partial T_{w2}^{(m)}(x,t)}{\partial x},$$

где при $\rho(m) = 0$ оба условия определяют идеальный тепловой контакт между пластинами; при $\rho(m) > 0$ первое условие характеризует величину разрыва температур на контактирующих поверхностях пластин, а второе – степень изменения интенсивности тепловых потоков в пластинах на границе $x = 0$, которая инициирует указанный выше температурный разрыв.

Стойкость горячих штампов зависит от многочисленных факторов: химический состав стали заготовки и инструмента, термообработка материала инструмента, температура начала и конца штамповки, особенность протекания адгезионных процессов, диффузионные и структурно-фазовые явления (протекают в пограничных объемах заготовки и штампа в процессе их нагружения), температурно-силовые параметры нагружения, временные характеристики штамповки, скорость деформирования заготовки, ограниченность и вариабельность заготовки по размерам, размеры и структура контактного пограничного слоя и другие эксплуатационные факторы [7–16]. Например, в монографиях [12–14, 16] отмечено около 100 влияющих факторов. Экспериментально установлена взаимная обусловленность и взаимозависимость отдельных факторов, определяющих стойкость инструмента. Особую сложность для исследований представляет статический характер износа штампов, который обусловлен стохастическим характером реальных процессов горячей штамповки, когда большое количество случайных факторов одновременно влияет на протекание процесса.

Многолетние экспериментальные исследования большой группы ученых убедительно показали [7–16], что из всего многообразия экспериментально изученных факторов особое место занимает температура окружающей среды как фактор малозначимый. Изменения внешней среды (температура производственных помещений) практически не влияют на стойкость инструмента, что обусловлено следующим: 1) влияние изменений внешней среды на режим штамповки существенно только в условиях проточного водяного охлаждения поверхности $x = l_2$, но этот фактор учитывается изменением влияния коэффициента теплообмена α_2; 2) в пользу такого допущения свидетельствует и необходимость обеспечения условий изотермического деформирования заготовки, что достигается специальной теплоизоляционной смазкой гравюры и ее предварительной механической обработкой с целью получения соответствующего микрорельефа поверхности и увеличения пограничного термического сопротивления ρ, которое, как показывают многочисленные эксперименты по термопарированию приграничных зон гравюры, сильно влияет на температурный режим инструмента (всегда $\rho > 0$, идеальный контакт недопустим по соображениям получения качественной поковки); 3) температурный режим процесса при нулевом значении обсуждаемого фактора иногда реально существует, но в силу стохастического взаимодействия и взаимной обусловленности остальных, более значимых реальных факторов сложного технологического процесса горячей штамповки сохраняются все показатели качества поковки и стойкости инструмента, закономерности и особенности реального циклического процесса; 4) кратковременность ЦКТ, когда $\tau_c \leq 1$ с и в более глубинных точках инструмента влияние теплового источника q_w практически не сказывается (зона термического влияния составляет малую величину $x \leq 2$ мм).

Учет отмеченных выше факторов существенно упрощает постановку различных циклических задач, сами аналитические решения и их многофакторный критериальный анализ, одновременно расширяются возможности разработки и применения различных методов электромоделирования и компьютерного моделирования ЦКТ, специальных экспериментально-аналитических методов восстановления тепловых потоков и температурных распределений в инструменте на основе применения корреляционно-регрессионного анализа и общей методологии решения обратных задач теплопроводности [1–4, 7, 12, 15].

Для решения краевой задачи ЦКТ в постановке (1)–(8) для квазиустановившейся стадии применим метод сопряжения [1], состоящий из трех этапов. На первом этапе решается тепловая задача одноразового контакта металлозаготовки и инструмента, на втором – самостоятельная тепловая задача отдельно для инструмента, рассматриваемого как независимый в тепловом отношении объект контактной системы. На третьем этапе соответствующие решения, полученные на двух предыдущих этапах, используются для составления системы дуальных интегральных уравнений, в неявной форме представляющей итоговое аналитическое решение задачи ЦКТ с чередующимися краевыми условиями и циклическим теплоисточником q_w. Сообразно общей схеме решения циклических контактных задач по методу сопряжения ниже приводится математическая формулировка краевой задачи одноразового контакта (первый этап решения):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a_i \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) T_{wi}^{(m)}(x,t_c) = \frac{\delta_{1i} q_w}{c_i \gamma_i} \quad (i=1,2), \quad t_c > 0. \tag{9}$$

Граничные условия:

– при $x = l_2$

$$\frac{\partial T_{w2}^{(m)}(x,t_c)}{\partial x} + H_2 T_{w2}^{(m)}(x,t_c) = 0, \quad t_c > 0; \tag{10}$$

– при $x = -l_1$

$$\frac{\partial T_{w1}^{(m)}(x,t_c)}{\partial x}=0,\quad t_c>0; \tag{11}$$

– при $x=0$

$$K_\lambda\frac{\partial T_{w1}^{(m)}(x,t_c)}{\partial x}=\frac{\partial T_{w2}^{(m)}(x,t_c)}{\partial x}=H_2^{\Sigma}\left[T_{w2}^{(m)}(x,t_c)-T_{w1}^{(m)}(x,t_c)\right],\quad t\in[0,\tau_c]. \tag{12}$$

Начальные условия:

$$T_{w1}^{(m)}(x,t_c)=0;\quad T_{w2}^{(m)}(x,t_c)=f_{w2}^{(\infty)}(x)_{\min},\quad t_c=0. \tag{13}$$

Интегрирование системы (9)–(13) выполнено с помощью интегрального преобразования Лапласа [4–6] аналогично тому, как это сделано в [1]; при решении сформулированной выше одноразовой контактной задачи использовалось равенство тепловых потоков металлозаготовки и штампа в зоне контакта. После интегрирования системы получены искомые температурные решения-оригиналы $T_{w1}^{(m)}(x,t_c)$ и $T_{w2}^{(m)}(x,t_c)$.

Для металлозаготовки:

$$T_{w1}^{(m)}(x,t_c)=\frac{a_1 l_1 l_2 q_w}{2a_2\lambda_1 Bi_1 Bi_2}\left[2H^* Bi_2^{\Sigma}(1+Bi_2)+H^* Bi_2(2+Bi_1^{\Sigma})+\frac{Bi_1^{\Sigma}}{H^*}(2+Bi_2)\right]-$$

$$-\frac{a_1 l_2^2 q_w}{2a_2\lambda_1}\left[K_a(1+\frac{2}{Bi_2})+\frac{(l_1+x)^2}{l_2^{\,2}}\right]-\sum_{n=1}^{\infty}\psi_{wc}^{-1}(\varphi_{nc})\left\{\frac{Bi_1^{\Sigma}}{\varphi_{nc}}\left(\frac{l_1^4 q_w}{a_1\lambda_1\varphi_{nc}^4}\right)\cdot\right.$$

$$\cdot(\sin\frac{\varphi_{nc}}{H^*}-\frac{Bi_2 H^*}{\varphi_{nc}}\cos\frac{\varphi_{nc}}{H^*})+\frac{Bi_1^{\Sigma}H^*}{\varphi_{nc}^2}\int_0^{l_2} f_{w2}^{(m)}(\xi)_{\min}\cdot\left[\frac{l_2}{a_2}\cos\frac{\varphi_{nc}}{H^*}(1-\frac{\xi}{l_2})+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{Bi_2 H^* l_2}{a_2\varphi_{nc}}\sin\frac{\varphi_{nc}}{H^*}(1-\frac{\xi}{l_2})\right]d\xi\right\}\cos\varphi_{nc}(1+\frac{x}{l_1})\exp\left(-\frac{\varphi_{nc}^2}{(H^*)^2}\mathrm{Fo}_2\right). \tag{14}$$

Для штампа:

$$T_{w2}^{(m)}(x,t_c)=\frac{l_1 q_w}{\alpha_2}\left[1+Bi_2\left(1-\frac{x}{l_2}\right)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\psi_{wc}^{-1}(\varphi_{nc})\left\{\frac{l_1^4 q_w H^* Bi_2^{\Sigma}}{a_1\lambda_1\varphi_{nc}^5}\cdot\right.$$

$$\cdot\sin\varphi_{nc}\left[\cos\frac{\varphi_{nc}}{H^*}\left(1-\frac{x}{l_2}\right)+\frac{Bi_2 H^*}{\varphi_{nc}}\sin\frac{\varphi_{nc}}{H^*}\left(1-\frac{x}{l_2}\right)\right]+$$

$$+\frac{H^*}{\varphi_{nc}}\left(\sin\varphi_{nc}-\frac{Bi_1^{\Sigma}}{\varphi_{nc}}\cos\varphi_{nc}+\frac{Bi_1^{\Sigma}}{\varphi_{nc}}K_\varepsilon\sin\varphi_{nc}\cdot\sin\frac{\varphi_{nc}x}{H^* l_2}\right)\cdot$$

$$\left.\cdot\int_0^{l_2} f_{w2}^{(m)}(\xi)_{\min}\cdot\left[\frac{l_2}{a_2}\cos\frac{\varphi_{nc}}{H^*}\left(1-\frac{\xi}{l_2}\right)+\frac{Bi_2 H^* l_2}{a_2\varphi_{nc}}\sin\frac{\varphi_{nc}}{H^*}\left(1-\frac{\xi}{l_2}\right)\right]d\xi\right\}\cdot$$

$$\cdot\exp\left(-\frac{\varphi_{nc}^2}{(H^*)^2}\mathrm{Fo}_2\right)+\frac{1}{\sqrt{\pi a_2 t_c}}\int_0^{x} f_{w2}^{(m)}(\xi)_{\min}\cdot\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a_2 t_c}\right]d\xi. \tag{15}$$

В полученных аналитических решениях приняты обозначения:

$$\psi_{wc}(\varphi_{nc}) = -\frac{l_1^2}{2a_1\varphi_{nc}^2}\left\langle \frac{H^* Bi_2^{\Sigma}}{\varphi_{nc}}\left\{\left(\cos\frac{\varphi_{nc}}{H^*} + \frac{H^* Bi_2}{\varphi_{nc}}\sin\frac{\varphi_{nc}}{H^*}\right)\cdot\right.\right.$$

$$\left.\cdot\left(\sin\varphi_{nc} + \varphi_{nc}\cos\varphi_{nc}\right) + \sin\varphi_{nc}\left[Bi_2\cos\frac{\varphi_{nc}}{H^*} - \sin\frac{\varphi_{nc}}{H^*}\left(\frac{\varphi_{nc}}{H^*} + \frac{Bi_2 H^*}{\varphi_{nc}}\right)\right]\right\} +$$

$$+\left[\sin\varphi_{nc}\left(1 + Bi_1^{\Sigma}\right) + \varphi_{nc}\cos\varphi_{nc}\right]\left(\frac{Bi_2 H^*}{\varphi_{nc}}\cos\frac{\varphi_{nc}}{H^*} - \sin\frac{\varphi_{nc}}{H^*}\right) +$$

$$\left.+\left(\frac{Bi_1^{\Sigma}}{\varphi_{nc}}\cos\varphi_{nc} - \sin\varphi_{nc}\right)\left[\sin\frac{\varphi_{nc}}{H^*}(1 + Bi_2) + \frac{\varphi_{nc}}{H^*}\cos\frac{\varphi_{nc}}{H^*}\right]\right\rangle, \quad (16)$$

$Fo_2 = \dfrac{a_2}{l_2^2}t$ – критерий Фурье;

$Bi_1^{\Sigma} = \dfrac{\alpha^{\Sigma}}{\lambda_1}l_1, \quad Bi_2^{\Sigma} = \dfrac{\alpha^{\Sigma}}{\lambda_2}l_2, \quad Bi_2 = \dfrac{\alpha_2}{\lambda_2}l_2$ – критерии Био;

$K_l = \dfrac{l_1}{l_2}, \quad K_a = \dfrac{a_1}{a_2}$ – безразмерные параметры;

$H^* = \dfrac{K_l}{\sqrt{K_a}} = \dfrac{l_1}{l_2}\sqrt{\dfrac{a_2}{a_1}}$ – безразмерный критерий, характеризующий темп перестройки температурной обстановки в пластине 2 по отношению к пластине 1.

Корни φ_{nc} задаются трансцендентным уравнением

$$Bi_1^{\Sigma}\sin\varphi_{nc}\left(\varphi_{nc}\cos\frac{\varphi_{nc}}{H^*} + Bi_2 H^*\sin\frac{\varphi_{nc}}{H^*}\right) - \left(Bi_1^{\Sigma}\cos\varphi_{nc}\sin\varphi_{nc}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(Bi_2\cos\frac{\varphi_{nc}}{H^*} - \frac{\varphi_{nc}}{H^*}\sin\frac{\varphi_{nc}}{H^*}\right) = 0. \quad (17)$$

Преобразуем температурное решение (15) контактной задачи к интегральному виду $(m \to \infty)$:

$$T_{w2}^{(\infty)}(x,t_c) = \frac{l_1 q_w}{\alpha_2}\left[1 + Bi_2\left(1 - \frac{x}{l_2}\right)\right] + \int_0^{l_2} f_{w2}^{(\infty)}(\xi)_{\min} K_{wc}(x,\xi,\mathrm{Fo}_2)d\xi +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi a_2 t_c}}\int_0^x f_{w2}^{(\infty)}(\xi)_{\min}\cdot\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a_2 t_c}\right]d\xi, \quad (18)$$

где явный вид функции K_{wc} определяется из (15) в виде соответствующего функционального ряда

$$K_{wc}(x,\xi,\mathrm{Fo}_2) = \sum_{n=1}^{\infty}\psi_{wc}^{-1}(\varphi_{nc})\left\{\frac{l_1^4 q_w H^* Bi_2^{\Sigma}}{a_1\lambda_1\varphi_{nc}^5}\cdot\right.$$

$$\cdot \sin \varphi_{nc} \left[\cos \frac{\varphi_{nc}}{H^*} \left(1 - \frac{x}{l_2} \right) + \frac{Bi_2 H^*}{\varphi_{nc}} \sin \frac{\varphi_{nc}}{H^*} \left(1 - \frac{x}{l_2} \right) \right] +$$

$$+ \frac{H^*}{\varphi_{nc}} \left(\sin \varphi_{nc} - \frac{Bi_1^{\Sigma}}{\varphi_{nc}} \cos \varphi_{nc} + \frac{Bi_1^{\Sigma}}{\varphi_{nc}} K_{\varepsilon} \sin \varphi_{nc} \cdot \sin \frac{\varphi_{nc} x}{H^* l_2} \right) \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{l_2}{a_2} \cos \frac{\varphi_{nc}}{H^*} \left(1 - \frac{\xi}{l_2} \right) + \frac{Bi_2 H^* l_2}{a_2 \varphi_{nc}} \sin \frac{\varphi_{nc}}{H^*} \left(1 - \frac{\xi}{l_2} \right) \right] \Bigg\} \exp \left(- \frac{\varphi_{nc}^2}{(H^*)^2} \mathrm{Fo}_2 \right) \cdot \quad (19)$$

На втором этапе решения рассматривается вспомогательная тепловая задача, идентичная краевой задаче для пластины 2 при действии теплообразующего источника $q_v \neq 0$ [1]. Сообразно рассмотрим случай естественного (конвективного) охлаждения пластины с произвольной начальной температурой $f_{w2}^{(\infty)}(x)_{\max}$ в окружающую среду через обе ограничивающие поверхности $(x = 0,\ x = l_2)$ по закону Ньютона.

Обозначенная задача имеет постановку

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) T_{w2}^{(\infty)}(x,t_r) = 0,\ t_r \in [0,\tau_r],\ x \in [0,l_2], \quad (20)$$

граничные условия

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - H_2' \right) T_{w2}^{(\infty)}(x,t_r) = 0 \text{ при } x = 0, \quad (21)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + H_2 \right) T_{w2}^{(\infty)}(x,t_r) = 0 \text{ при } x = l_2, \quad (22)$$

начальное условие

$$T_{w2}^{(\infty)}(x,t_r) = f_{w2}^{(\infty)}(x)_{\max} \text{ при } t_r = 0, \quad (23)$$

где $H_2 = \dfrac{\alpha_2}{\lambda_2}$, $H_2' = \dfrac{\alpha_2'}{\lambda_2}$ – относительные коэффициенты теплообмена.

Решение задачи после стандартных преобразований Лапласа [4–6] и математических выкладок запишется так:

$$T_{w2}^{(\infty)}(x,t_r) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{wr}^{-1}(u_{nr}) \left\{ \left(\sin \frac{u_{nr} x}{l_2} + \frac{u_{nr}}{Bi_2'} \cos \frac{u_{nr} x}{l_2} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^{l_2} f_{w2}^{(\infty)}(\xi)_{\max} \left[\frac{l_2}{a_2 u_{nr}} \sin u_{nr} \left(1 - \frac{\xi}{l_2} \right) + \frac{l_2}{a_2 Bi_2'} \cos u_{nr} \left(1 - \frac{\xi}{l_2} \right) \right] d\xi \right\} \exp\left(- u_{nr}^2 \mathrm{Fo}_2 \right) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi a_2 t_r}} \int_0^x f_{w2}^{(\infty)}(\xi)_{\max} \cdot \exp\left(- \frac{(x-\xi)^2}{4 a_2 t_r} \right) d\xi, \quad (24)$$

где обозначено

$$\psi_{wr}(u_{nr}) = \left(-\frac{l_2^2}{2u_{nr}^2 a_2}\right)\left[\left(\frac{u_{nr}}{Bi_2}+\frac{u_{nr}}{Bi_2^{'}}\right)\cos u_{nr} - u_{nr}\left(\frac{u_{nr}}{Bi_2}+\frac{u_{nr}}{Bi_2^{'}}\right)\sin u_{nr} - \right.$$

$$\left. -\frac{2u_{nr}^2}{Bi_2 Bi_2^{'}}\sin u_{nr} + \left(1-\frac{u_{nr}^2}{Bi_2 Bi_2^{'}}\right)u_{nr}\cos u_{nr}\right], \quad (25)$$

$\mathrm{Bi}_2^{'} = H_2^{'} l_2 = \frac{\alpha_2^{'}}{\lambda_2} l_2$, $\mathrm{Bi}_2 = H_2 l_2 = \frac{\alpha_2}{\lambda_2} l_2$ – критерии Био.

Суммирование ведется по всем корням u_{nr} трансцендентного уравнения

$$\sin u_{nr}\left(1-\frac{u_{nr}^2}{\mathrm{Bi}_2\mathrm{Bi}_2^{'}}\right) + \cos u_{nr}\left(\frac{u_{nr}}{\mathrm{Bi}_2}+\frac{u_{nr}}{\mathrm{Bi}_2^{'}}\right) = 0. \quad (26)$$

Запишем (24) в интегральной форме:

$$T_{w2}^{(\infty)}(x,t_r) = \int_0^{l_2} f_{w2}^{(\infty)}(\xi)_{\max}\cdot K_{wr}(x,\xi,\mathrm{Fo}_2)d\xi +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi a_2 t_r}}\int_0^x f_{w2}^{(\infty)}(\xi)_{\max}\cdot \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a_2 t_r}\right)d\xi, \quad (27)$$

где функция K_{wr} представляет соответствующий ряд из (24):

$$K_{wr}(x,\xi,\mathrm{Fo}_2) = \sum_{n=1}^{\infty}\psi_{wr}^{-1}(u_{nr})\left\{\left(\sin\frac{u_{nr}x}{l_2}+\frac{u_{nr}}{\mathrm{Bi}_2^{'}}\cos\frac{u_{nr}x}{l_2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{l_2}{a_2 u_{nr}}\sin u_{nr}\left(1-\frac{\xi}{l_2}\right)+\frac{l_2}{a_2\mathrm{Bi}_2^{'}}\cos u_{nr}\left(1-\frac{\xi}{l_2}\right)\right]\right\}\exp\left(-u_{nr}^2\mathrm{Fo}_2\right). \quad (28)$$

На последнем, третьем этапе решения можно составить, воспользовавшись выражениями (18) и (27) и условиями метода сопряжения [1], систему дуальных интегральных уравнений относительно двух искомых температурных функций $f_{w2}^{(\infty)}(x)_{\min}$ и $f_{w2}^{(\infty)}(x)_{\max}$, определяющих квазиустановившуюся стадию процесса.

Решение (18) используется для момента времени $t_c = \tau_c$, и получаем максимальное температурное распределение в инструменте $f_{w2}^{(\infty)}(x)_{\max}$, функционально зависящее от температурного распределения $f_{w2}^{(\infty)}(x)_{\min}$. Аналогично решение (27) используется для момента времени $t_r = \tau_r$, и получаем минимальное температурное распределение в инструменте $f_{w2}^{(\infty)}(x)_{\min}$, функционально зависящее от температурного распределения $f_{w2}^{(\infty)}(x)_{\max}$. Обе эти функции объединяют два важных обстоятельства: они взаимозависимы в составе двух интегральных решений для одного элемента контактной системы (инструмента) и получены для квазиустановившейся стадии процесса, что позволяет их рассматривать как систему дуальных интегральных уравнений относительно двух искомых температурных функций $f_{w2}^{(\infty)}(x)_{\min}$ и $f_{w2}^{(\infty)}(x)_{\max}$, математически определяющую квазиустановившуюся стадию процесса:

$$f_{w2}^{(\infty)}(x)_{\max}=\frac{l_1 q_w}{\alpha_2}\left[1+Bi_2\left(1-\frac{x}{l_2}\right)\right]+\int_0^{l_2} f_{w2}^{(\infty)}(\xi)_{\min}\cdot K_{wc}\left(x,\xi,\mathrm{Fo}_2(\tau_c)\right)d\xi+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi a_2\tau_c}}\int_0^x f_{w2}^{(\infty)}(\xi)_{\min}\cdot\exp\cdot\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a_2\tau_c}\right]d\xi, \tag{29}$$

$$f_{w2}^{(\infty)}(x)_{\min}=\int_0^{l_2} f_{w2}^{(\infty)}(\xi)_{\max}\cdot K_{wr}\left(x,\xi,\mathrm{Fo}_2(\tau_r)\right)d\xi+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi a_2\tau_r}}\int_0^x f_{w2}^{(\infty)}(\xi)_{\max}\cdot\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a_2\tau_r}\right]d\xi. \tag{30}$$

Составленная сложная система интегральных уравнений (29)–(30) представляет систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода (содержит фиксированные пределы интегрирования [17, 18]), именно эти уравнения и их системы встречаются наиболее часто при решении предельных задач математической физики. Общего метода решения сложных интегральных уравнений и их систем не существует, однако в некоторых специальных случаях полезны свои конкретно ориентированные решения и методы. Рассмотрим некоторые из них, наиболее приемлемые при исследовании широкого круга задач ЦКТ. Первый метод: наличие искомых функций $f_{w2}^{(\infty)}(x)_{\min}$ и $f_{w2}^{(\infty)}(x)_{\max}$ вне знака интеграла в системе (29)–(30) дает естественную возможность применения метода последовательных приближений. Один из наиболее простых методов решения систем подобного типа – замена известных и неизвестных функций ступенчатыми функциями [1, 23] с последующим применением формул численного интегрирования и получением систем рекуррентных уравнений. Здесь основные трудности связаны с оценкой погрешности ступенчатой аппроксимации функций, составлением и последующей численной реализацией рекуррентных уравнений. Второй метод – экспериментально-аналитический: пусть по данным экспериментов получены температурные корреляционно-регрессионные зависимости для максимального $f_{w2}^{(э)}(x)_{\max}$ и минимального $f_{w2}^{(э)}(x)_{\min}$ распределения температур в специально выбранных точках поиска по толщине инструмента $x_i\in[0,l_2]$ $(i=1,2,\ldots,k;\ x_1\neq 0)$. После подстановки $f_{w2}^{(э)}(x)_{i\ \max}$ в уравнение (30) получаем расчетные дискретные значения для функции $f_{w2}^{(р)}(x)_{i\ \min}$ и аналогично после подстановки $f_{w2}^{(э)}(x)_{i\ \min}$ в уравнение (29) получаем расчетные дискретные значения для функции $f_{w2}^{(р)}(x)_{i\ \max}$. Сопоставление по степени расхождения (качеству согласования) экспериментальных и расчетных функций выполняется по формулам

$$\frac{\max\left|f_{w2}^{(p)}(x)_{i\ \min}-f_{w2}^{(э)}(x)_{i\ \min}\right|}{0{,}01\cdot f_{w2}^{(э)}(x)_{i\ \min}}\le\delta_1,\%\ \text{ и }\ \frac{\max\left|f_{w2}^{(p)}(x)_{i\ \max}-f_{w2}^{(э)}(x)_{i\ \max}\right|}{0{,}01\cdot f_{w2}^{(э)}(x)_{i\ \max}}\le\delta_2,\%,$$

где числовые значения максимальных погрешностей δ_1 и δ_2 по имеющимся результатам температурных исследований инструмента задаются предварительно, при этом возможен случай задания только одной погрешности для обеспечения необходимого качества согласования температурных распределений, но не исключаются достаточно обоснованные случаи $\delta_1 = \delta_2$ или $\delta_1 \neq \delta_2$. Этот подход не во всех случаях достаточно точен (сказываются погрешности измерения температур термопарами и невозможность измерения температуры на гравюре). Поэтому применительно к задачам ЦКТ предложен специальный алгоритм решения (третий метод решения), в основу которого положен принцип адекватности описания по критерию Фишера аналитического решения его статистической моделью, он базируется на применении методов теории планирования экспериментов [2, 19, 20]. Эти методы широко и успешно применяются в области чисто экспериментальных исследований. Вместе с тем в качестве исходной числовой информации, которая закладывается в матрицы планирования, могут использоваться не только экспериментальные данные, но и результаты пассивного численного анализа аналитических решений. При этом естественно возникает необходимость использования основных положений безразмерного параметрического анализа [21] в рамках реализуемого запланированного вычислительного эксперимента.

Системное решение (29)–(30), полученное для теплоисточника q_w, аналогично по виду и структуре решениям, полученным для двух других теплоисточников q_f и q_v [1] (все это решения одного класса задач ЦКТ как по постановке, так и по итоговым решениям), поэтому их численное решение и анализ идентичны. Однако итерационный алгоритм решения систем интегральных уравнений (как показано в [2]) с использованием обобщенных формул Бонне [22] для каждой конкретно исследуемой системы – индивидуальный, достаточно сложный и трудоемкий.

Сложность решения задач подобного класса состоит в том, что для двухэлементной контактной системы получается система двух интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода, а для трехэлементной контактной системы получается система трех интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода и т. д. Искомые тепловые функции этих систем, определяющие стойкость инструмента, выбираются при постановке соответствующих теплофизических задач для каждого контактирующего тела (этапы решения 1 и 2, составляющие метод последовательных допущений), обычно это тепловые потоки и максимальные (минимальные) температурные распределения элементов контактной системы или их различные комбинации.

При решении задачи ЦКТ возможен переход от системы контактирующих пластин к контактному теплообмену с полуограниченным телом при $l_2 \to \infty$ или $l_1 \to -\infty$.

Выводы

1. На основе применения двух аналитических методов – метода последовательных допущений и метода сопряжения – получено решение задачи циклического контактного теплообмена для системы двух плоских тел при инициировании объемного теплоисточника пластической деформации одной из контактирующих пластин. Решение получено с помощью интегрального преобразования Лапласа и представлено системой двух интегральных уравнений Фредгольма второго рода, которая допускает только численное решение. Аналогичный алгоритм решения задачи ЦКТ может быть использован для объектов другой геомет-

рической конфигурации (цилиндрической, шаровой и др.), соответствующей очертанию рабочей поверхности инструмента.

2. При наличии решений для квазиустановившейся стадии контактного теплообмена появляется возможность интерполяционного подхода к решению циклической задачи, когда переменные температуры и потоки, рассчитанные постадийно для нескольких начальных циклов и квазиустановившейся стадии [3], рассматриваются как опорные (узловые) точки при построении интерполяционной модели процесса теплообмена для произвольного цикла, что является основой термонапряженного анализа контактной системы, управления и прогнозирования эксплуатационной стойкости объектов контактирования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Евдокимов М.А., Стулин В.В.* Аналитическое решение задач циклического контактного теплообмена для системы двух плоских тел // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки. – 2008. – Вып. 1(16). – С. 119–129.
2. *Стулин В.В.* Построение моделей регрессионного типа для описания теплового состояния системы двух плоских тел в режиме циклического контактирования // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки. – 2012. – Вып. 3(28). – С. 125–135.
3. *Стулин В.В., Крупко Е.А.* Приближенная аналитическая оценка теплового режима системы двух плоских тел в произвольном цикле контактного теплообмена // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Математическая. – 2009. – Вып. 2(10). – С. 65–70.
4. *Стулин В.В.* Восстановление температуры и мощности тепловых источников на границе тел в пространстве преобразований Лапласа // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Математическая. – 2007. – Вып. 2(6). – С. 94–103.
5. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
6. *Карслоу Х.С., Егер Д.К.* Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 496 с.
7. *Тихонов А.Н., Кальнер В.Д., Гласко В.Б.* Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1990. – 264 с.
8. *Разуваев Е.И., Капитаненко Д.В.* Влияние параметров нагрева на состояние поверхности, технологические и эксплуатационные свойства поковок из титановых сплавов. КШП. ОМД, № 12–2013, с. 30–33.
9. *Шолом В.Ю.* Трение и смазка в металлообработке. КШП. ОМД, № 5–2014, с. 7–13.
10. *Тюрин В.А.* Возможности повышения стойкости деформирующего инструмента в условиях циклического нагружения. КШП. ОМД, № 3–2015, с. 26–30.
11. *Сережкин М.А.* Проблема налипания деформируемой заготовки на инструмент при обработке металлов давлением. КШП. ОМД, № 2–2017, с. 17–19.
12. *Трахтенберг Б.Ф.* Стойкость штампов и пути ее повышения. – Куйбышев: Куйбышевское кн. изд-во, 1964. – 364 с.
13. *Бельский Е.И., Томилин Р.И.* Повышение стойкости штампов при объемной штамповке. Гос. изд-во БССР, Минск, 1962. – 296 с.
14. *Яловой Н.И., Тылкин М.А., Полухин П.И., Васильев Д.И.* Тепловые процессы при обработке металлов и сплавов давлением. – М.: Высшая школа, 1973. – 412 с.
15. *Калашников В.А., Трахтенберг Б.Ф., Сапрыкин В.Г.* Совершенствование методов исследования температурного режима инструмента при горячей штамповке // Физика и химия обработки материалов. – 1969. – № 6. – С. 15–21.
16. *Довнар С.А.* Термомеханика упрочнения и разрушения штампов объемной штамповки. – М.: Машиностроение, 1975. – 255 с.
17. *Арфкен Г.* Математические методы в физике. Пер. с англ. – М.: Атомиздат, 1970. – 712 с.
18. *Морс П.М., Фешбах Х.* Методы теоретической физики. Пер. с англ. – М.: Изд-во иностр. лит., 1958. – 414 с.

19. *Налимов В.В., Чернова Н.А.* Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. – М.: Наука, 1965. – 340 с.
20. *Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В.* Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. – М.: Наука, 1976. – 280 с.
21. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Вычислительная теплопередача. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
22. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. – М.: Физматгиз, 1962. – 808 с.
23. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. – М.: ИЛ, 1960. – 300 с.

Статья поступила в редакцию 21 апреля 2017 г.

SOLUTION OF THE PROBLEM OF CYCLIC CONTANT HEAT CHANGE FOR THE SYSTEM OF TWO PLANE BODIES IN CASE OF DEFORMATION HEAT INITIATION

V.V. Stulin

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

By using the integral Laplace transform the analytical solutions are obtained for a series of cyclic heat problems for plane bodies, including the contact heat exchange for the system of two endless plates with thermal resistance in the contact zone for different conditions of external heat exchange. The solution is obtained for quasi-stationary process state by using the conjugation method in the form of the system of two integral Fredholm equations of the first kind. The solution takes into account the cyclic initiation of heat source of plastic deformation of one of the plates, two analytical approaches are used: the method of successive assumptions (takes into account special heat exchange conditions for individual elements of the contact system in an arbitrary cycle) and the coupling method (takes into account the necessary conditions for the formation of a system of integral equations).

Keywords: *non-stationary heat conductivity, contact heat exchange, endless plate, integral equation, time-variable initial and boundary conditions, heat-generating source, infinite velocity of heat transfer, exact analytic solution, time parameters of cyclic heat transfer, quasi-stationary state, thermal resistance, deformation.*

Vladimir Stulin (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.