

УДК 681.51

**СИНТЕЗ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ
УПРУГОЙ КОНСТРУКЦИЕЙ****В.А. Коваль, О.Ю. Торгашова, М.Ф. Степанов**Саратовский государственный технический университет имени Ю.А. Гагарина
Россия, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, 77

Для упругого распределенного объекта управления с параметрами, зависящими от пространственной переменной, и с учетом внутреннего сопротивления по Фойгхту на основе спектрального метода анализа и синтеза распределенных систем выполнен переход от дифференциальных уравнений с частными производными к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений в форме пространства состояний. В векторно-матричные уравнения полученного спектрального представления аддитивно входят граничные условия задачи, что позволяет осуществить управление с границ. Синтезированный закон управления для подавления колебаний и выполнен анализ замкнутой системы. Полученные результаты могут быть использованы при построении систем управления летательными аппаратами с активной динамической компенсацией упругих колебаний.

Ключевые слова: упругая балка, уравнение колебаний, ряд Фурье, спектральный метод, операционная матрица, динамический регулятор, синтез, анализ.

Введение

В авиационной и ракетной технике широко используются упругие конструкции, что вызвано стремлением увеличить скорость полета, уменьшить вес и увеличить длину летательного аппарата. При соответствующих условиях полета, особенно по мере выработки топлива, возникают упругие колебания несущей конструкции, которые по частоте и амплитуде соизмеримы с угловыми колебаниями летательного аппарата.

Упругие колебания воздействуют на датчики системы управления, а следовательно, на органы управления. Эти возмущения могут приводить к потере точности и устойчивости процесса управления полетом [1, 2]. Поэтому возникает проблема создания такого закона управления летательным аппаратом, чтобы он парировал не только внешние возмущения, но и упругие колебания корпуса.

Современные космические аппараты имеют на борту не только жесткие элементы, но и упругие конструкции – антенны, солнечные батареи, выносные штанги с измерительными приборами. Пассивная или активная стабилизация этих устройств необходима для нормальной работы космического аппарата.

Большинство работ по управлению упругими конструкциями и их стабилизации выполнено на основе современной теории аналитического конструирования оптимальных регуляторов для систем с распределенными параметрами [3, 4].

Необходимо отметить, что для объектов, описываемых системой дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений с частными производными, оптимизационная система уравнений, определяющая управление, представляет собой нелинейную систему дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений с

Владимир Александрович Коваль (д.т.н., проф.), профессор кафедры «Радиоэлектроника и телекоммуникации».

Михаил Федорович Степанов (д.т.н., доц.), профессор кафедры «Радиоэлектроника и телекоммуникации».

Ольга Юрьевна Торгашова (д.т.н., доц.), профессор кафедры «Радиоэлектроника и телекоммуникации».

частными производными [3]. Решение данной системы представляет собой достаточно сложную задачу по реализации вычислительных процедур и поиску алгоритмов, дающих хорошую сходимость полученных решений.

В данной работе ставится следующая задача. Для упругого распределенного объекта (фюзеляжа самолета или корпуса ракеты) с параметрами, зависящими от пространственной переменной, и с учетом внутреннего сопротивления по Фойгхту [2] осуществить переход от дифференциальных уравнений с частными производными к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений в форме пространства состояний с использованием спектрального метода теории управления [5, 6]; синтезировать закон управления для подавления колебаний и выполнить анализ замкнутой системы.

1. Математическая модель объекта управления

Будем считать, что упругие колебания фюзеляжа самолета и корпуса ракеты достаточно точно описываются уравнением упругой балки переменного сечения с учетом внутреннего сопротивления по Фойгхту, которое согласно [2] имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(\bar{x}) \frac{\partial^2 \bar{y}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{t}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} \left(\overline{EJ}(\bar{x}) \frac{\partial^2 \bar{y}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}^2} \right) + \\ + \bar{h}(\bar{x}) \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} \left(\overline{EJ}(\bar{x}) \frac{\partial^2 \bar{y}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}^2} \right) \right) = \bar{f}(\bar{x}, \bar{t}), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mu} \in (0, \mu_0), \quad \bar{x} \in (0, l), \quad \bar{y} \in (0, l), \quad \overline{EJ} \in (0, E_0 J_0), \\ \bar{F} \in (0, F_0), \quad \bar{h} \in (0, h_0), \quad \bar{t} \in (0, t_0), \end{aligned}$$

где \bar{x} – пространственная переменная;

$\bar{t} \geq 0$ – время;

$\bar{y}(\bar{x}, \bar{t})$ – прогиб оси балки, измеренный в перпендикулярном к недеформированной оси балки направлении;

$\bar{\mu}(\bar{x})$ – масса единицы длины;

$\overline{EJ}(\bar{x})$ – изгибная жесткость;

\bar{E} – модуль упругости;

\bar{J} – момент инерции поперечного сечения балки относительно нейтральной оси сечения, перпендикулярной к плоскости колебаний;

$\bar{f}(\bar{x}, \bar{t})$ – внешняя распределенная поперечная нагрузка, отнесенная к единице длины балки;

$\bar{h}(\bar{x})$ – коэффициент внутреннего сопротивления по Фойгхту.

Уравнение (1) представим в виде

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(\bar{x}) \frac{\partial^2 \bar{y}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{t}^2} + \frac{\partial^2 \overline{EJ}(\bar{x})}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial^2 \bar{y}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}^2} + 2 \frac{\partial \overline{EJ}(\bar{x})}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^3 \bar{y}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}^3} + \overline{EJ}(\bar{x}) \frac{\partial^4 \bar{y}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}^4} + \\ \bar{h}(\bar{x}) \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(\frac{\partial^2 \overline{EJ}(\bar{x})}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial^2 \bar{y}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}^2} + 2 \frac{\partial \overline{EJ}(\bar{x})}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^3 \bar{y}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}^3} + \overline{EJ}(\bar{x}) \frac{\partial^4 \bar{y}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}^4} \right) = \bar{f}(\bar{x}, \bar{t}). \end{aligned} \quad (2)$$

Будем рассматривать (2) как математическую модель объекта управления с начальными условиями

$$\bar{y}(\bar{x}, 0) = \bar{f}_1(\bar{x}), \quad \partial \bar{y}(\bar{x}, 0) / \partial \bar{t} = \bar{f}_2(\bar{x}), \quad \bar{x} \in [0, l] \quad (3)$$

и граничными условиями

$$\partial^2 \bar{y}(l, \bar{t}) / \partial \bar{x}^2 = \bar{U}(\bar{t}), \quad \partial^2 \bar{y}(0, \bar{t}) / \partial \bar{x}^2 = \partial^3 \bar{y}(0, \bar{t}) / \partial \bar{x}^3 = \partial^3 \bar{y}(l, \bar{t}) / \partial \bar{x}^3 = 0, \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Приведем к безразмерному виду дифференциальное уравнение (2), начальные условия (3) и граничные условия (4). Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \mu &= \bar{\mu} / \mu_0, \quad x = \bar{x} / l, \quad y = \bar{y} / l, \quad EJ = \bar{EJ} / (E_0 J_0), \quad f = \bar{f} / f_0, \\ h &= \bar{h} / h_0, \quad t = \bar{t} / t_0, \quad f_1 = \bar{f}_1 / l, \quad f_2 = \bar{f}_2 t_0 / l, \quad U = \bar{U} / l, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\mu_0, E_0 J_0, f_0, h_0, t_0$ – некоторые номинальные значения соответствующих переменных.

В новых переменных (5) дифференциальное уравнение объекта управления будет иметь вид

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial^2 EJ}{\partial x^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial EJ}{\partial x} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + a_3 EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \\ + h \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(b_1 \frac{\partial^2 EJ}{\partial x^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + b_2 \frac{\partial EJ}{\partial x} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + b_3 EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \right) = cf, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\mu \in (0, 1), \quad x \in (0, 1), \quad y \in (0, 1), \quad EJ \in (0, 1), \quad h \in (0, 1).$$

Коэффициенты уравнения (6) определяются выражениями

$$\begin{aligned} a_1 = a_3 = E_0 J_0 t_0^2 / (l^4 \mu_0), \quad a_2 = 2 E_0 J_0 t_0^2 / (l^4 \mu_0), \\ b_1 = b_3 = h_0 E_0 J_0 t_0^2 / (l^4 \mu_0), \quad b_2 = 2 h_0 E_0 J_0 t_0^2 / (l^4 \mu_0), \quad c = f_0 t_0^2 / (\mu_0 l). \end{aligned} \quad (7)$$

Начальные условия:

$$y(x, 0) = f_1(x), \quad \partial y(x, 0) / \partial t = f_2(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (8)$$

Граничные условия:

$$\partial^2 y(1, t) / \partial x^2 = U(t), \quad \partial^2 y(0, t) / \partial x^2 = \partial^3 y(0, t) / \partial x^3 = \partial^3 y(l, t) / \partial x^3 = 0, \quad t \geq 0. \quad (9)$$

Далее, опираясь на свойства спектральных характеристик [5], получим выражения для матриц спектрального представления объекта управления.

2. Спектральное представление задачи

Будем полагать, что функция, описывающая состояние объекта управления $y(x, t)$, является вещественной однозначной ограниченной с интегрируемым квадратом в области пространственной переменной $x \in [a, b]$, граничные условия прикладываются в точках $\bar{a} = a + 0, \bar{b} = b - 0, t \in [0, t_0], t_0 \rightarrow \infty$.

Функцию $y(x, t)$ с учетом граничных условий можно представить в виде

$$y(x, t) = y_0(x, t) + \varphi_a^0(t) \cdot 1(\bar{a} - x) + \varphi_b^0(t) \cdot 1(x - \bar{b}), \quad (10)$$

где $y_0(x, t)$ – функция, совпадающая с функцией $y(x, t)$ на интервале $x \in [a + 0, b - 0]$;

$\varphi_a^0(t)$ – значение единичной скачкообразной функции на границе $x = a + 0$;

$\varphi_b^0(t)$ – значение единичной скачкообразной функции на границе $x=b-0$;

$$1(a+0-x) = \begin{cases} 1, & x \leq a+0, \\ 0, & x > a+0, \end{cases} \quad 1(x-b+0) = \begin{cases} 1, & x \geq b-0, \\ 0, & x < b-0. \end{cases}$$

Обобщенная производная [7] от функции (10) по x будет иметь вид

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial y_0(x, t)}{\partial x} - \varphi_a^0(t) \cdot \delta(\bar{a} - x) + \varphi_b^0(t) \cdot \delta(x - \bar{b}).$$

Для m -ной производной можно записать следующее выражение:

$$\frac{\partial^m y(x, t)}{\partial x^m} = \frac{\partial^m y_0(x, t)}{\partial x^m} - \sum_{j=1}^{m-2} \left(\varphi_a^j(t) \frac{\partial^{m-j} \delta(\bar{a} - x)}{\partial x^{m-j}} - \varphi_b^j(t) \frac{\partial^{m-j} \delta(x - \bar{b})}{\partial x^{m-j}} \right).$$

Функцию $y_0(x, t)$ разложим в ряд Фурье по системе ортонормированных функций $\{P(\bar{h}, x)\}$, $\bar{h} = \overline{1, \infty}$ на интервале изменения $x \in [a, b]$

$$y_0(x, t) = \sum_{\bar{h}=1}^{\infty} \Phi_0(\bar{h}, t) P(\bar{h}, x), \quad \Phi_0(\bar{h}, t) = \int_a^b y_0(x, t) P(\bar{h}, x) dx. \quad (11)$$

С использованием свойств спектральных характеристик и с учетом $a=0$, $b=1$ осуществим переход от дифференциального уравнения с частными производными (2) при начальных условиях (3) и граничных условиях (4) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} P_\mu \ddot{\Phi}_0 + a_1 \left(P_{EJ}^2 + \sum_{i=1}^k P_{2EJi} \right) P_2 \Phi_0 + a_2 \left(P_{EJ}^1 + \sum_{i=1}^k P_{1EJi} \right) (P_3 \Phi_0 + \Gamma_3^{21}) + \\ + a_3 P_{EJ} (P_4 \Phi_0 + \Gamma_4^{21}) + b_1 P_h \left(P_{EJ}^2 + \sum_{i=1}^k P_{2EJi} \right) P_2 \dot{\Phi}_0 + \\ + b_2 P_h \left(P_{EJ}^1 + \sum_{i=1}^k P_{1EJi} \right) (P_3 \dot{\Phi}_0 + \dot{\Gamma}_3^{21}) + b_3 P_h P_{EJ} (P_4 \dot{\Phi}_0 + \dot{\Gamma}_4^{21}) = c \Phi_f, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\Phi_0 \in \mathbb{R}^{\bar{h}}$, $\bar{h} = \overline{1, \infty}$ – вектор спектральной характеристики функции $y_0(x, t)$ с компонентами

$$\Phi_0(\bar{h}, t) = \int_0^1 y_0(x, t) P(\bar{h}, x) dx, \quad \bar{h} = \overline{1, \infty};$$

P_μ , P_{EJ} , P_h – бесконечномерные квадратные операционные матрицы первого сомножителя спектральных характеристик функций $\mu(x)$, $EJ(x)$, $h(x)$ соответственно, элементы которых вычисляются по выражениям

$$\begin{aligned} P_\mu(\bar{h}, h) &= \int_0^1 P(\bar{h}, x) P(h, x) \mu(x) dx, \quad P_{EJ}(\bar{h}, h) = \int_0^1 P(\bar{h}, x) P(h, x) EJ(x) dx, \\ P_h(\bar{h}, h) &= \int_0^1 P(\bar{h}, x) P(h, x) h(x) dx, \quad \bar{h}, h = \overline{1, \infty}; \end{aligned}$$

P_{EJ}^1, P_{EJ}^2 – бесконечномерные квадратные операционные матрицы сомножителей $\partial EJ(x)/\partial x, \partial^2 EJ(x)/\partial x^2$, элементы которых определяются выражением

$$P_{EJ}^k(\bar{h}, h) = \int_0^1 \frac{\partial^k}{\partial \tau^k} [P(\bar{h}, \tau)P(h, \tau)] EJ(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2, \quad \bar{h}, h = \overline{1, \infty};$$

$\Phi_f \in \mathbb{R}^{\bar{h}}, \bar{h} = \overline{1, \infty}$ – вектор спектральной характеристики функции $f(x, t)$ с компонентами

$$\Phi_f(\bar{h}, t) = \int_0^1 f(x, t)P(\bar{h}, x)dx, \quad \bar{h} = \overline{1, \infty};$$

P_m – бесконечномерные квадратные операционные матрицы дифференцирования с элементами, вычисляемыми в соответствии с выражением

$$P_m(\bar{h}, h) = \int_0^1 P(\bar{h}, x) \frac{\partial^m P(h, x)}{\partial x^m} dx, \quad \bar{h}, h = \overline{1, \infty}, \quad m = \overline{1, 4},$$

$\Gamma_m^{21} \in \mathbb{R}^n, n = \overline{1, \infty}, m = 3, 4$ – векторы спектральных характеристик граничных условий с элементами

$$\Gamma_m^{21}(\bar{h}) = \int_0^1 \varphi_1^2 \frac{\partial^{m-1} \delta(x-1)}{\partial x^{m-1}} P(\bar{h}, x) dx, \quad \bar{h} = \overline{1, \infty}, \quad m = 3, 4;$$

$P_{vEJi}, i = \overline{1, k}, v = 1, 2$ – операционные матрицы, описывающие скачки функции $EJ(x)$ на интервале $x \in (0, 1)$, вычисляемые по выражению

$$P_{vEJi}(\bar{h}, h) = \int_0^1 P(\bar{h}, x)P(h, x)\varphi_i \frac{\partial^{v-1} \delta(x-x_i)}{\partial x^{v-1}} dx, \quad \bar{h} = \overline{1, \infty}, \quad i = \overline{1, k}, \quad v = 1, 2.$$

Преобразуем выражение (12) к виду

$$\begin{aligned} \ddot{\Phi}_0 = & -P_\mu^{-1} \left[a_1 \left(P_{EJ}^2 + \sum_{i=1}^k P_{2EJi} \right) P_2 + a_2 \left(P_{EJ}^1 + \sum_{i=1}^k P_{1EJi} \right) P_3 + a_3 P_{EJ} P_4 \right] \Phi_0 + \\ & + a_2 P_\mu^{-1} \left(P_{EJ}^1 + \sum_{i=1}^k P_{1EJi} \right) \Gamma_3^{21} + a_3 P_{EJ} \Gamma_4^{21} + \\ & + P_\mu^{-1} P_h \left[b_1 \left(P_{EJ}^2 + \sum_{i=1}^k P_{2EJi} \right) P_2 + b_2 \left(P_{EJ}^1 + \sum_{i=1}^k P_{1EJi} \right) P_3 + b_3 P_{EJ} P_4 \right] \dot{\Phi}_0 + \\ & + P_\mu^{-1} P_h \left[b_2 \left(P_{EJ}^1 + \sum_{i=1}^k P_{1EJi} \right) \dot{\Gamma}_3^{21} + b_3 P_{EJ} \dot{\Gamma}_4^{31} \right] + c P_\mu^{-1} \Phi_f. \end{aligned} \quad (13)$$

Введем новую переменную $\Phi_1 = \dot{\Phi}_0$ и представим уравнение (13) в виде системы векторно-матричных уравнений в форме Коши:

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi}_0 &= \Phi_1, \\
\dot{\Phi}_1 &= -P_\mu^{-1} \left[a_1 \left(P_{EJ}^2 + \sum_{i=1}^k P_{2EJi} \right) P_2 + a_2 \left(P_{EJ}^1 + \sum_{i=1}^k P_{1EJi} \right) P_3 + a_3 P_{EJ} P_4 \right] \Phi_0 + \\
&+ a_2 P_\mu^{-1} \left(P_{EJ}^1 + \sum_{i=1}^k P_{1EJi} \right) \Gamma_3^{21} + a_3 P_{EJ} \Gamma_4^{21} + \\
&+ P_\mu^{-1} P_h \left[b_1 \left(P_{EJ}^2 + \sum_{i=1}^k P_{2EJi} \right) P_2 + b_2 \left(P_{EJ}^1 + \sum_{i=1}^k P_{1EJi} \right) P_3 + b_3 P_{EJ} P_4 \right] \Phi_1 + \\
&+ P_\mu^{-1} P_h \left[b_2 \left(P_{EJ}^1 + \sum_{i=1}^k P_{1EJi} \right) \dot{\Gamma}_3^{21} + b_3 P_{EJ} \dot{\Gamma}_4^{21} \right] + c P_\mu^{-1} \Phi_f.
\end{aligned} \tag{14}$$

В качестве управляющих воздействий будем рассматривать значение момента $u_1(t)$ и его производную по времени $u_2(t) = \partial u_1(t)/\partial t$ на правой границе объекта. Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
\bar{A} &= a_1 \left(P_{EJ}^2 + \sum_{i=1}^k P_{2EJi} \right) P_2 + a_2 \left(P_{EJ}^1 + \sum_{i=1}^k P_{1EJi} \right) P_3 + a_3 P_{EJ} P_4, \\
\tilde{A} &= b_1 \left(P_{EJ}^2 + \sum_{i=1}^k P_{2EJi} \right) P_2 + b_2 \left(P_{EJ}^1 + \sum_{i=1}^k P_{1EJi} \right) P_3 + b_3 P_{EJ} P_4, \\
\bar{B} &= a_2 \left(P_{EJ}^1 + \sum_{i=1}^k P_{1EJi} \right) P|_{x=1} + a_3 P_{EJ} \partial P/\partial x|_{x=1}, \\
\tilde{B} &= b_2 \left(P_{EJ}^1 + \sum_{i=1}^k P_{1EJi} \right) P|_{x=1} + b_3 P_{EJ} \partial P/\partial x|_{x=1}.
\end{aligned} \tag{15}$$

В выражениях (15) используются обозначения векторов $P|_{x=1} = \text{colon}\{P(1, x), P(2, x), \dots\}|_{x=1}$, $\partial P/\partial x|_{x=1} = \text{colon}\left\{\frac{\partial P(1, x)}{\partial x}, \frac{\partial P(2, x)}{\partial x}, \dots\right\}|_{x=1}$.

С учетом обозначений (15) система (14) может быть записана в векторно-матричной форме

$$\dot{\Phi} = A\Phi + Bu + Mv, \tag{16}$$

где $\Phi = \text{colon}\{\Phi_0, \Phi_1\} \in R^n$, $n = 2\bar{h}$, $\bar{h} = \overline{1, \infty}$ – вектор состояний;

$u = \text{colon}\{u_1, u_2\}$ – вектор управлений;

$v = \text{colon}\{0, \Phi_f\}$ – вектор возмущений.

Матрицы A, B, M имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -P_\mu^{-1}\bar{A} & -P_\mu^{-1}P_h\tilde{A} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -P_\mu^{-1}\bar{B} & -P_\mu^{-1}P_h\tilde{B} \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & cP_\mu^{-1} \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Таким образом, осуществлен переход от описания объекта управления уравнением с частными производными (2) с заданными начальными и граничными

условиями (3), (4) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (16) в форме пространства состояний с постоянными коэффициентами.

Дополним (16) выражением

$$\theta = D\Phi, \quad D = \begin{bmatrix} \bar{D} & 0 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

где $\theta \in \mathbb{R}^r$ – вектор измеряемых переменных – значений $y(x, t)$ в тех точках, где размещены датчики;

D – матрица, строки которой составлены из ортонормированных функций $P(\bar{h}, x)$, $\bar{h} = \overline{1, \infty}$, по которым проводится разложение в ряд Фурье (11), вычисленных в точках измерения.

Анализ спектрального представления объекта управления (14) показывает, что граничные условия задачи входят в уравнения объекта, что позволяет осуществить управление с границ объекта. В качестве управляющего воздействия на концах балки могут быть приложены изгибающий момент и поперечная сила, поэтому в выражениях (14) учитываются члены, пропорциональные второй и третьей производной функции $y(x, t)$ по пространственной переменной x на правой границе объекта.

3. Вычисление матриц спектрального представления объекта управления и синтез регулятора

Рассмотрим распределенный объект управления (2)–(4) с коэффициентами, являющимися функциями пространственных координат, при следующих исходных данных:

$$\begin{aligned} \bar{l} &= 1, \quad \bar{h}(\bar{x}) = 0.001(1 + \bar{x}), \quad \bar{f}(\bar{x}, \bar{t}) = e^{-0.5\bar{t}} \delta(\bar{x} - \bar{x}^*), \quad \bar{x}^* = 0.8, \\ \bar{y}(\bar{x}, 0) &= -0.84 + \sin \pi \bar{x}, \quad \partial \bar{y} / \partial \bar{t} |_{\bar{t}=0} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Распределение массы и жесткости имеет вид:

$$\bar{\mu}(\bar{x}) = \begin{cases} 105, & 0 < \bar{x} \leq 0.45, \\ 705, & 0.45 < \bar{x} \leq 0.65, \\ 141, & 0.65 < \bar{x} < 1. \end{cases}, \quad \bar{EJ}(\bar{x}) = \begin{cases} 88, & 0 < \bar{x} \leq 0.45, \\ 146, & 0.45 < \bar{x} \leq 0.65, \\ 117, & 0.65 < \bar{x} < 1, \end{cases} \quad (20)$$

Получим безразмерные коэффициенты (7), выбрав следующие номинальные значения:

$$\mu_0 = 146, \quad E_0 J_0 = 705, \quad f_0 = 1, \quad h_0 = 1, \quad t_0 = 1.$$

Для выбранных значений (20) относительное распределение массы и жесткости будет иметь вид

$$\mu(x) = \begin{cases} 0.60, & 0 < x \leq 0.45, \\ 1, & 0.45 < x \leq 0.65, \\ 0.80, & 0.65 < x < 1, \end{cases}, \quad EJ(x) = \begin{cases} 0.15, & 0 < x \leq 0.45, \\ 1, & 0.45 < x \leq 0.65, \\ 0.2, & 0.65 < x < 1, \end{cases}$$

а числовые значения коэффициентов (7) будут следующими:

$$a_1 = a_3 = b_1 = b_3 = 0.2071, \quad a_2 = b_2 = 0.4142, \quad c = 0.0014.$$

В качестве системы ортонормированных функций будем использовать

$$P = \sqrt{2} \{ \cos(2i-1)\pi x/2 \}, \quad i = \overline{1, \infty}. \quad (21)$$

Приведем значения матриц объекта управления, учитывая выражения (17), а при вычислении матрицы D также то, что измерения производятся в точке $x=0.7$:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} 0_{n \times n} & I_n \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right], \quad B = \left[\begin{array}{c|c} 0_{n \times 1} & 0_{n \times 1} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right], \quad M = \left[\begin{array}{c|c} 0_{n \times 1} & 0_{n \times 1} \\ \hline 0_{n \times 1} & M_{22} \end{array} \right], \quad D = [D_{11} \mid 0]. \quad (22)$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 5.71 & -74.46 & 52.84 & \dots \\ -0.31 & -233.71 & 872.12 & \dots \\ 0.39 & 10.92 & 383.40 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 0.01 & -0.05 & -0.10 & \dots \\ 0 & -0.35 & 1.58 & \dots \\ 0 & 0.09 & -2.55 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} -2.84 \\ 8.40 \\ -10.95 \\ \dots \end{bmatrix}, \quad B_{22} = \begin{bmatrix} -0.01 \\ 0.02 \\ -0.02 \\ \dots \end{bmatrix}, \quad M_{22} = 10^{-2} \cdot \begin{bmatrix} 0.76 & 0.24 & 0.09 & \dots \\ 0.24 & 0.58 & 0 & \dots \\ 0.09 & 0 & 0.68 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

$$D_{11} = [0.64 \quad -1.40 \quad 1.00 \quad \dots]. \quad (23)$$

Для объекта управления (16) с матрицами (22), (23) был выполнен синтез непрерывного регулятора на основе LQ-оптимизации и теории наблюдающих устройств в соответствии с процедурой, изложенной в [6]. Уравнения регулятора имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_r \xi + B_r \theta, \\ u &= C_r \xi + D_r \theta, \end{aligned} \quad (24)$$

где $\xi \in \mathbb{R}^\alpha$, $\alpha = n - r$ – вектор состояний регулятора, A_r , B_r , C_r , D_r – числовые матрицы. При выполнении вычислений было учтено 5 амплитуд пространственных мод.

Приведем значения матриц регулятора:

$$A_r = \left[\begin{array}{c|c} 0_{\alpha \times \alpha} & A_{r12} \\ \hline A_{r21} & A_{r22} \end{array} \right],$$

$$A_{r12} = \begin{bmatrix} -0.50 & 2.08 & -0.78 & -0.17 & 0.98 \\ 0.55 & -1.20 & 1.86 & 0.19 & -1.08 \\ -0.27 & 0.59 & -0.43 & 0.91 & 0.54 \\ -0.40 & 0.87 & -0.63 & -0.14 & 1.79 \end{bmatrix},$$

$$A_{r21} = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} -0.16 & 0.02 & 3.58 & 11.96 \\ 0.07 & 0.96 & -0.83 & 14.05 \\ -0.36 & -1.56 & 1.80 & 3.41 \\ 0.37 & 0.94 & -7.27 & 7.70 \\ -0.34 & -0.39 & 0.61 & -14.54 \end{bmatrix},$$

$$A_{r22} = \begin{bmatrix} 50.32 & 98.08 & -72.84 & -14.11 & 94.65 \\ 2.07 & 28.75 & -11.88 & 3.36 & 62.72 \\ -51.07 & 67.38 & -60.32 & -19.58 & 38.05 \\ 2.51 & 33.25 & -13.76 & -4.70 & 63.60 \\ 11.69 & -75.50 & 42.49 & -0.56 & -118.97 \end{bmatrix}$$

$$B_r^T = 10^3 \cdot [-0.09 \quad 0.17 \quad -0.04 \quad -0.14 \quad -1.74 \quad 4.72 \quad -3.97 \quad -1.95 \quad -1.26],$$

$$C_r = \begin{bmatrix} 36.04 & 10.05 & 2.83 & 67.15 & 1.66 & 0.40 & 0.59 & 1.17 & 2.62 \\ 0.06 & 0.01 & 0 & 0.11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_r = \begin{bmatrix} 119.74 \\ 0.21 \end{bmatrix}.$$

На рис. 1, 2 представлены результаты анализа замкнутой системы.

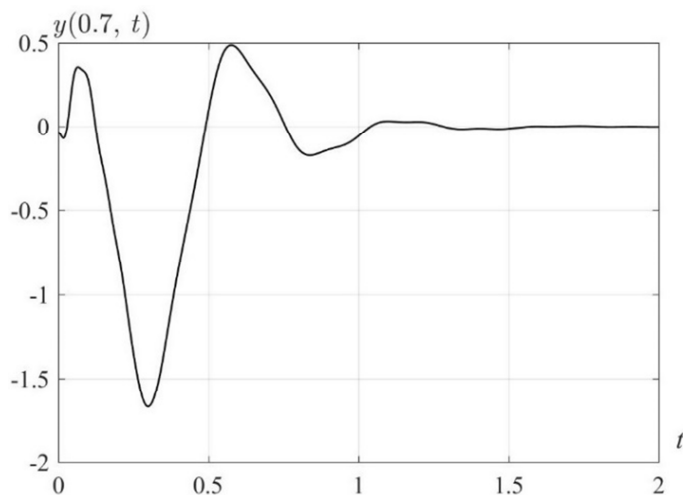
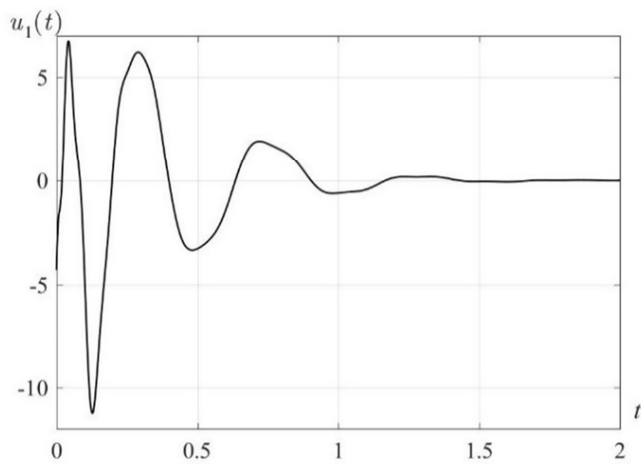
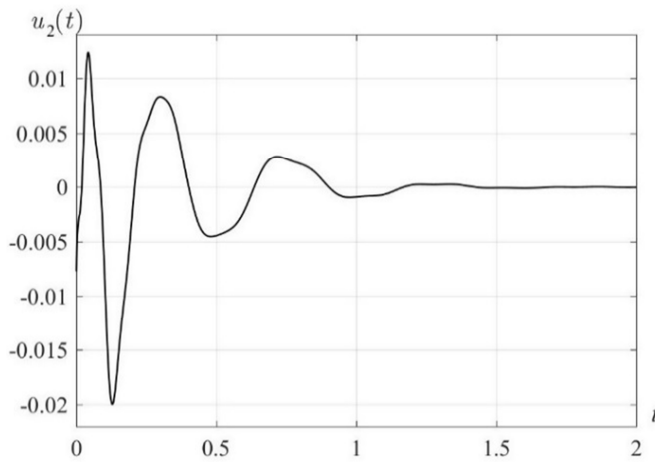


Рис. 1. Значение регулируемой переменной в точке $x = 0.7$

Из графика переходного процесса, представленного на рис. 1, следует, что возмущающее воздействие компенсируется с ошибкой не более 3%. Управляющие воздействия, приложенные на правой границе упругого объекта, действуют в течение 1.5 с и по модулю не превышают допустимых значений.



a



б

Рис. 2. Управляющие воздействия: *a* – момент $u_1(t)$ на правой границе объекта; *б* – производная по времени $u_2(t) = \partial u_1(t)/\partial t$ на правой границе объекта

Заключение

На основании спектрального метода теории управления осуществлен переход от уравнения с частными производными, описывающего упругие колебания летательного аппарата с учетом внутреннего сопротивления по Фойгхту и с неравномерным распределением массы и жесткости по конструкции, к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений в форме Коши.

С использованием LQ-оптимизации и теории наблюдающих устройств синтезирован регулятор и построен наблюдатель с коррекцией по ошибке восстановления.

Полученные результаты могут быть использованы при построении систем управления летательными аппаратами с активной динамической компенсацией упругих колебаний, что дает возможность улучшить динамику летательного аппарата, уменьшить навигационные ошибки, снизить нагрузки и напряжения в конструкции.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Красовский А.А.* Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. – М.: Наука, 1973. – 560 с.
2. *Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С.* Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1973. – 616 с.
3. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1977. – 480 с.
4. *Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К.* Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами. – М.: Машиностроение, 1986. – 216 с.
5. *Коваль В.А.* Спектральный метод анализа и синтеза распределенных систем. – Саратов: Изд-во Сарат. гос. техн. ун-та, 2010. – 148 с.
6. *Коваль В.А., Торгашова О.Ю.* Решение задач анализа и синтеза для пространственно-двумерного распределенного объекта, представленного бесконечной системой дифференциальных уравнений // *АиТ.* – 2014. – № 2. – С. 54–71.
7. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1959. – 472 с.

Статья поступила в редакцию 11 сентября 2017 г.

THE DISTRIBUTED CONTROL SYSTEM SYNTHESIS OF ELASTIC STRUCTURE

V.A. Koval', O.Yu. Torgashova, M.F. Stepanov

Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russian Federation
77, Politechnicheskaya st., Saratov, 410054, Russian Federation

For an elastic distributed plant with parameters depending on the spatial variable, based on the spectral method of distributed systems analysis and synthesis and considering the internal resistance according to Voigt the transition is made from PDE to an infinite system of ODE in state space form. The boundary conditions are additively included to the obtained spectral representation, which enables to control from the boundaries. The control law for suppression of oscillations is synthesized and the closed system is analyzed. The obtained results can be used in the control systems synthesis for aircraft with active dynamic compensation of elastic vibrations.

Keywords: *elastic beam, oscillation equation, Fourier series, spectral method, operational matrix, dynamic regulator, synthesis, analysis.*

*Vladimir A. Koval' (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.
Michail F. Stepanov (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.
Olga Yu. Torgashova (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.*