Информатика, вычислительная техника и управление

УДК 681.5

ДВУХКАНАЛЬНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ*

Э.Я. Рапопорт, Н.А. Ильина

Самарский государственный технический университет
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

E-mail: edgar.rapoport@mail.ru; ilina.natalyaa@yandex.ru

Аннотация. *Предлагается постановка и метод решения задачи оптимального по быстродействию управления температурным полем неограниченной пластины с двумя граничными управляющими воздействиями по величине внешнего теплового потока на ее поверхностях в условиях заданной точности равномерного приближения конечного температурного распределения по толщине пластины к заданному. Предлагаемый метод использует процедуру предварительной параметризации управляющих воздействий на основе аналитических условий оптимальности, последующую редукцию к специальной задаче математического программирования и способы ее решения, базирующиеся на альтернансных свойствах искомых параметрических характеристик и знаниях физических закономерностей предметной области. Приводятся расчетные результаты и их анализ для различных вариантов кривой результирующего температурного распределения.*

Ключевые слова*: оптимальное управление, двухканальное управление, альтернансный метод, задача полубесконечной оптимизации.*

Постановка задачи оптимального управления

В качестве объекта управления рассматривается процесс нагрева неограниченной пластины, температурное поле которой $Q(x,t)$ описывается с учетом неравномерности температурного распределения только по одной координате x линейным однородным уравнением теплопроводности следующего вида [1]:

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2}, \; x \in [0,R]; t \in [0,T] \qquad (1)$$

**Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 18-08-00048а).*

Эдгар Яковлевич Рапопорт (д.т.н., проф.), профессор кафедры «Автоматика и управление в технических системах».

Наталья Андреевна Ильина, магистрант.

с заданными начальными

$$Q(x,0) = Q_0(x) = 0 \tag{2}$$

и граничными условиями 2-го рода

$$-\lambda \frac{\partial Q(0,t)}{\partial x} = g_{01}(t);$$
$$\lambda \frac{\partial Q(R,t)}{\partial x} = g_{11}(t), \tag{3}$$

где R – толщина пластины;

a, λ – теплофизические постоянные;

$g_{01}(t), g_{11}(t)$ – сосредоточенные граничные управляющие воздействия, стесненные заранее известными пределами их изменения (рис. 1):

$$g_{01\min} \le g_{01}(t) \le g_{01\max};\ g_{11\min} \le g_{11}(t) \le g_{11\max}. \tag{4}$$

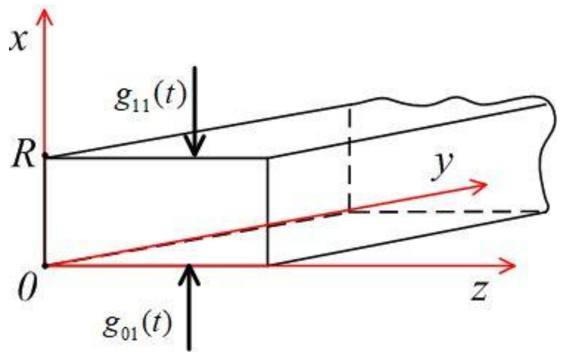


Рис. 1. Иллюстрация двухканального управления

Требуется обеспечить заданную точность ε равномерного приближения конечного распределения температуры $Q(x,T)$ к заданному $Q^*(x) = Q^* = const$:

$$\max_{x \in [0,R]} \left| Q(x,T) - Q^* \right| \le \varepsilon. \tag{5}$$

Качество процесса управления оценивается интегральным функционалом

$$I = \int_0^T dt = T \to \min_{u \in U}. \tag{6}$$

Метод конечных интегральных преобразований [2, 3] приводит к описанию управляемой функции $Q(x,t)$ в (1) в зависимости от пространственной координаты $x \in [0,R]$ и времени $t \in [0,T]$ бесконечной системой дифференциальных уравнений для временных мод $\overline{Q}_n(\mu_n, t)$ разложения $Q(x,t)$ в сходящийся в среднем ряд по собственным функциям $\varphi_n(\mu_n, x)$ начально-краевой задачи (1)–(3):

$$\frac{d\overline{Q}_n(\mu_n,t)}{dt} = -\mu_n{}^2\overline{Q}_n(\mu_n,t) + \frac{1}{\lambda E_n}\left(g_{01}(t) + g_{11}(t)\cos\pi n\right),\ n = 1,2,\ldots;$$

$$\overline{Q}_n(\mu_n,0) = \overline{Q}_0(\mu_n) = 0; \tag{7}$$

$$Q(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\overline{Q}_n(\mu_n,t)\cdot\varphi(\mu_n,x). \tag{8}$$

Здесь $\varphi_n(\mu_n,x)$, собственные числа μ_n^2 и коэффициенты E_n определяются соотношениями [3]:

$$\varphi_n(\mu_n,x) = \frac{1}{E_n}\cos\left(\pi n\frac{x}{R}\right);\ \mu_n = \frac{\sqrt{a}}{R}\pi n,\ \ n = 0,1,2,\ldots;\ E_n = \begin{cases}\sqrt{\dfrac{R}{a}},\ n = 0;\\ \sqrt{\dfrac{R}{2a}},\ n = 1,2,\ldots\end{cases} \tag{9}$$

Интегрирование уравнений (7) с последующей подстановкой результата в (8) приводит к следующим зависимостям температурного поля от внешних воздействий по граничным условиям:

$$Q(x,t) = \frac{1}{Rc\gamma}\int_0^t\left(g_{01}(\tau) + g_{11}(\tau)\right)d\tau + \frac{2}{Rc\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\pi n\frac{x}{R}\right)\cdot\int_0^t\left(g_{01}(\tau) + (-1)^n g_{11}(\tau)\right)\cdot e^{-\mu_n^2(t-\tau)}d\tau. \tag{10}$$

Таким образом, может быть сформулирована следующая задача оптимального по быстродействию управления. Требуется определить такие программные управляющие воздействия $g_{01}^*(t), g_{11}^*(t)$, стесненные ограничениями (4), которые переводят объект управления (7) из заданного начального состояния в требуемое конечное согласно (5), где $Q(x,t)$ определяется выражениями (8)–(10) при минимальном значении критерия оптимальности (6).

Параметризация управляющих воздействий и редукция к задаче полубесконечного программирования

На основании необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина оптимальное по быстродействию управление устанавливается в форме релейных функций времени, попеременно принимающих только свои предельно допустимые значения согласно (4) [4]:

$$\begin{aligned} g_{01}^*(t) &= \frac{g_{01_{\max}} + g_{01_{\min}}}{2} + \frac{g_{01_{\max}} - g_{01_{\min}}}{2}\,\mathrm{sign}M_1(t);\\ g_{11}^*(t) &= \frac{g_{11_{\max}} + g_{11_{\min}}}{2} + \frac{g_{11_{\max}} - g_{11_{\min}}}{2}\,\mathrm{sign}M_2(t), \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$M_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda E_n}\cos(\pi n)\cdot\psi_n^*\cdot\exp(-\mu_n^2(T-t)),\ M_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda E_n}\cdot\psi_n^*\cdot\exp(-\mu_n^2(T-t))$$

и ψ_n^* – конечные значения $\psi_n(T)$ сопряженных переменных $\psi_n(t)$.

В соответствии с (11) $g_{01}^{*}(t)$ и $g_{11}^{*}(t)$ определяются в параметризованной форме $g_{01}^{*}(\Delta_0^{(N_0)},t)$, $\Delta_0^{(N_0)}=\left(\Delta_{0i}^{(N_0)}\right)$, $i=\overline{1,N_0}$ и $g_{11}^{*}(\Delta_1^{(N_1)},t)$, $\Delta_1^{(N_1)}=\left(\Delta_{1i}^{(N_1)}\right)$, $i=\overline{1,N_1}$ с точностью до числа N_0 и N_1 длительностей $\Delta_{0i}^{(N_0)}$ и $\Delta_{1i}^{(N_1)}$ их постоянства:

$$\begin{gathered} g_{01}^{*}(\Delta_0^{(N_0)},t)=\frac{g_{01_{\max}}+g_{01_{\min}}}{2}+(-1)^{j+1}\frac{g_{01_{\max}}-g_{01_{\min}}}{2}, \\ \sum_{i=0}^{j-1}\Delta_{0i}^{(N_0)}<t<\sum_{i=0}^{j}\Delta_{0i}^{(N_0)},\ j=\overline{1,N_0},\ \Delta_{00}=0; \\ g_{11}^{*}(\Delta_1^{(N_1)},t)=\frac{g_{11_{\max}}+g_{11_{\min}}}{2}+(-1)^{j+1}\frac{g_{11_{\max}}-g_{11_{\min}}}{2}, \\ \sum_{i=0}^{j-1}\Delta_{1i}^{(N_1)}<t<\sum_{i=0}^{j}\Delta_{1i}^{(N_{10})},\ j=\overline{1,N_1},\ \Delta_{10}=0, \end{gathered} \tag{12}$$

где согласно (2) $g_{01}^{*}(t)=g_{01_{\max}};\ g_{11}^{*}(t)=g_{11_{\max}}$ в пределах первого интервала постоянства.

Подстановка управляющих воздействий вида (12) в выражение (10) приводит к параметризованной форме представления конечного температурного состояния $Q\left(x,\Delta_0^{(N_0)},\Delta_1^{(N_1)}\right)$ после вычисления интегралов в (10) при $t=T$. В частности, ограничиваясь здесь и далее случаем двухинтервального управления при $N_0=N_1=2$, будем иметь в результате:

$$\begin{aligned} Q\left(x,\Delta_0^{(2)},\Delta_1^{(2)}\right) &= g_{01_{\max}}\cdot\Lambda_{01}(x,\Delta_{01}^{(2)}+\Delta_{02}^{(2)})+(g_{01_{\min}}-g_{01_{\max}})\cdot\Lambda_{01}(x,\Delta_{02}^{(2)})+ \\ &+g_{11_{\max}}\cdot\Lambda_{11}(x,\Delta_{11}^{(2)}+\Delta_{12}^{(2)})+(g_{11_{\min}}-g_{11_{\max}})\cdot\Lambda_{11}(x,\Delta_{12}^{(2)}) \end{aligned} \tag{13}$$

где переходные функции объекта $\Lambda_{01}(x,t)$ и $\Lambda_{11}(x,t)$, представляющие собой реакции объекта на единичные ступенчатые воздействия по граничным управлениям $g_{01}(t)$ и $g_{11}(t)$, определяются следующими выражениями [1]:

$$\Lambda_{01}(x,t)=\frac{R}{\lambda}\left[\begin{aligned} &\frac{at}{R^2}+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{R-x}{R}\right)^2-\frac{1}{3}\right)- \\ &-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi^2n^2}\cos\left(\frac{\pi n(R-x)}{R}\right)\cdot e^{-\mu_n^2t} \end{aligned}\right]; \tag{14}$$

$$\Lambda_{11}(x,t)=\frac{R}{\lambda}\left[\frac{at}{R^2}+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x}{R}\right)^2-\frac{1}{3}\right)-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi^2n^2}\cos\left(\frac{\pi nx}{R}\right)\cdot e^{-\mu_n^2t}\right]. \tag{15}$$

При полученном параметрическом представлении искомых управляющих воздействий можно представить критерий оптимальности (6) в виде простой суммы длительностей отдельных интервалов постоянства оптимального управления:

$$I = \Delta_{01}^{(2)} + \Delta_{02}^{(2)} = \Delta_{11}^{(2)} + \Delta_{12}^{(2)} \to \min \qquad (16)$$

в условиях одинаковой продолжительности процесса управления для обоих управляющих воздействий, а условие (5) оценки конечного распределения температур представляется в форме

$$\Phi\left(\Delta_0^{(2)}, \Delta_1^{(2)}\right) = \max_{x \in [0,R]} \left| Q\left(x, \Delta_0^{(2)}, \Delta_1^{(2)}\right) - Q^* \right| \le \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \qquad (17)$$

где $Q\left(x, \Delta_0^{(2)}, \Delta_1^{(2)}\right)$ определяется по формуле (13).

Таким образом, производится точная редукция исходной задачи к задаче полубесконечной оптимизации (ЗПО) (16)–(17) на минимум целевой функции (16) конечного числа переменных $\Delta_0^{(2)}, \Delta_1^{(2)}$ с бесконечным числом ограничений (17) для всех точек $x \in [0, R]$ [4,5].

Решение задачи полубесконечной оптимизации альтернансным методом

Задача (16)–(17) разрешима только для $\varepsilon \ge \varepsilon_{\min}^{(2)}$ в (17), где $\varepsilon_{\min}^{(2)}$ – минимально достижимая величина ε в рассматриваемом классе граничных управлений:

$$\varepsilon_{\min}^{(2)} = \min_{\Delta_0^{(2)}, \Delta_1^{(2)}} \left\{ \max_{x \in [0,R]} \left| Q\left(x, \Delta_0^{(2)}, \Delta_1^{(2)}\right) - Q^* \right| \right\}. \qquad (18)$$

В этих условиях искомое решение задачи $\overline{\Delta}_0^{(2)}, \overline{\Delta}_1^{(2)}$ (16)–(17) обладает базовыми альтернансными свойствами [4], [5], согласно которым при некоторых обычно выполняющихся в прикладных задачах допущениях максимальные отклонения $\left| Q\left(x, \Delta_0^{(2)}, \Delta_1^{(2)}\right) - Q^* \right|$ в (17), равные ε, достигаются в некоторых точках $x_j^0 \in [0, R],\ j = \overline{1, R_x}$. Суммарное число R_x этих точек оказывается равным числу всех неизвестных в ЗПО (16), (17), включая длительности интервалов постоянства $\Delta_{0i}^{(2)}, \Delta_{1i}^{(2)}, i = 1,2$ и величину минимакса $\varepsilon_{\min}^{(2)}$ при $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$ в (17). Иначе говоря, на отрезке [0,R] найдутся R_x точек $x_j^0 \in [0, R],\ j = \overline{1, R_x}$, в которых выполняются равенства [4, 5]:

$$\left| Q\left(x_j^0, \Delta_0^{(2)}, \Delta_1^{(2)}\right) - Q^* \right| = \varepsilon, \ j = \overline{1, R_x}\ , \qquad (19)$$

где

$$R_x = \begin{cases} s, & \varepsilon > \varepsilon_{\min}^{(2)}; \\ s+1, & \varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}. \end{cases} \qquad (20)$$

Здесь s – число свободно варьируемых параметров в составе $\overline{\Delta}_0^{(N_0)}$, $\overline{\Delta}_1^{(N_1)}$, равное $N_0 + N_1 - 1$ в условиях одинаковой длительности процесса управления для обоих управляющих воздействий.

В рассматриваемом случае $N_0 = N_1 = 2$ получаем отсюда

$$s = 3 \tag{21}$$

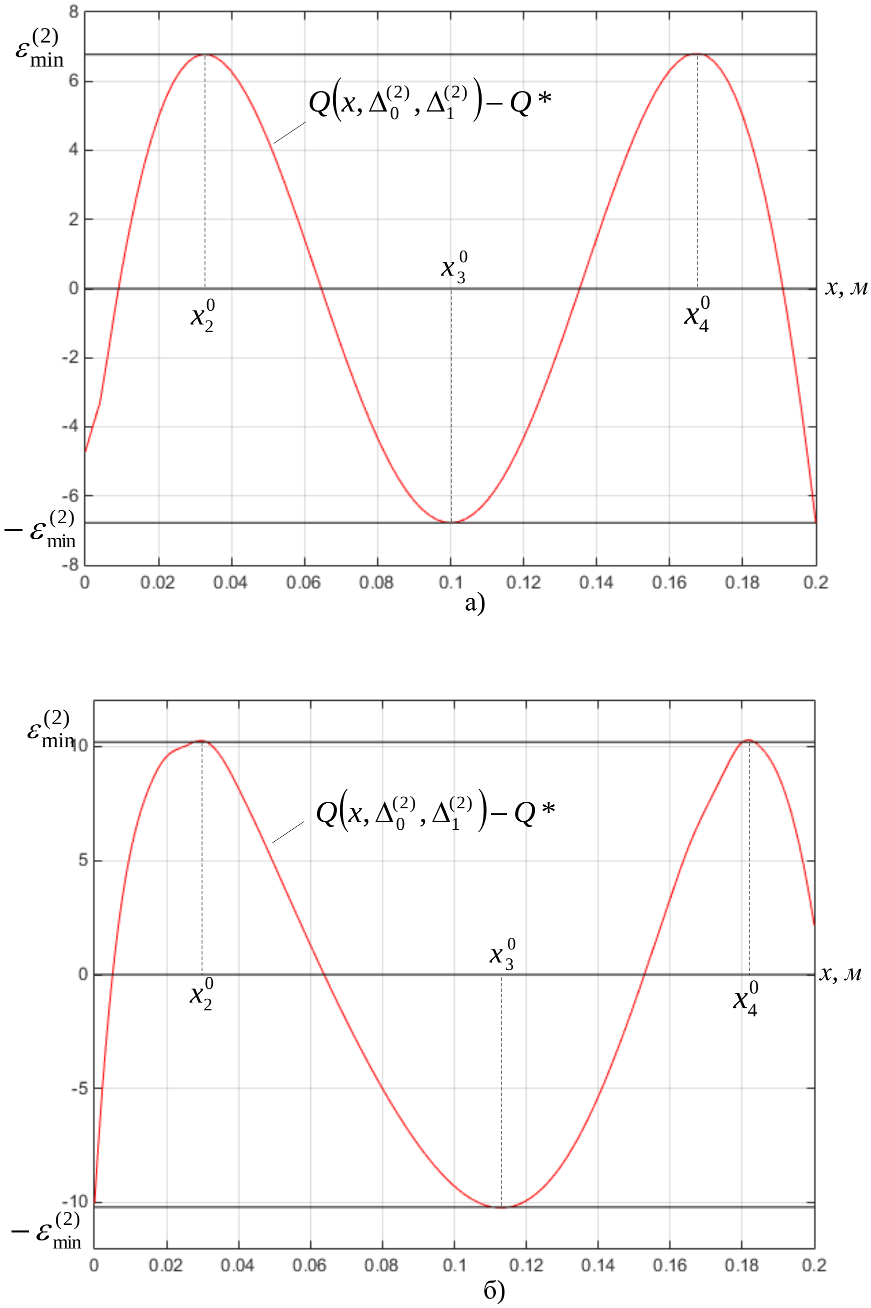


Рис. 2. Форма кривой результирующего температурного распределения при $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$

Редукция системы равенств (19)–(21), замкнутой относительно искомых параметрических характеристик оптимального процесса, к однозначно фиксируемой системе уравнений, разрешаемой относительно этих неизвестных, должна быть выполнена путем определения координат точек x_j^0 и знаков разностей $Q\left(x_j^0, \bar{\Delta}_0^{(2)}, \bar{\Delta}_1^{(2)}\right) - Q^*$ в каждой из них. Эта задача может быть решена только при известной конфигурации кривой температурного распределения $Q\left(x, \bar{\Delta}_0^{(2)}, \bar{\Delta}_1^{(2)}\right) - Q^*$ на отрезке $[0, R] \ni x$ при двухинтервальном граничном управлении, устанавливаемой на основании физических закономерностей процессов нестационарной теплопроводности в зависимости от величины ε.

Анализ этих закономерностей [4, 5] приводит к двум вариантам по форме кривой $Q\left(x, \bar{\Delta}_0^{(2)}, \bar{\Delta}_1^{(2)}\right) - Q^*$ в условиях $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$ в (17) (рис. 2) в зависимости от выбора согласно (20) в качестве трех независимо варьируемых параметров $\Delta_{11}^{(2)}, \Delta_{12}^{(2)}, \Delta_{01}^{(2)}$ (рис. 2, *а*) или $\Delta_{01}^{(2)}, \Delta_{02}^{(2)}, \Delta_{11}^{(2)}$ (рис. 2, *б*) в условиях равенства $\Delta_{01}^{(2)} + \Delta_{02}^{(2)} = \Delta_{11}^{(2)} + \Delta_{12}^{(2)} = T$. В первом случае следует принять $\Delta_{02}^{(2)} = \Delta_{11}^{(2)} + \Delta_{12}^{(2)} - \Delta_{01}^{(2)}$, а во втором $\Delta_{12}^{(2)} = \Delta_{01}^{(2)} + \Delta_{02}^{(2)} - \Delta_{11}^{(2)}$ (рис. 3).

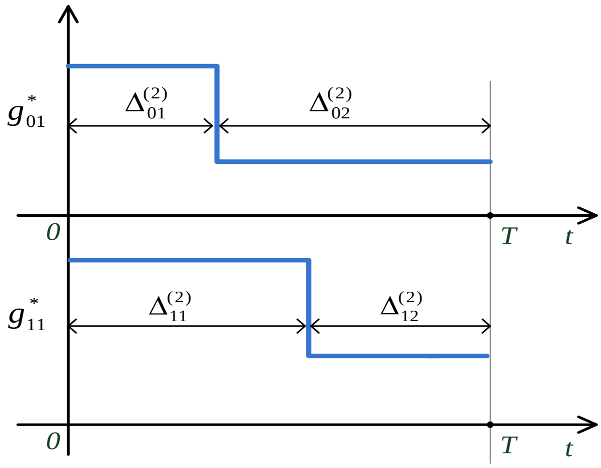


Рис. 3. Оптимальные по быстродействию граничные управления

При этом согласно (19)–(21) в обоих случаях $R_x = s + 1 = 4$, и формам кривой результирующих температурных состояний, указанным на рис. 2, *а* и рис. 2, *б*, отвечают соответственно системы (22) и (23), составляемые на основании равенств (19), дополняемых условиями существования экстремума функции $Q\left(x, \bar{\Delta}_0^{(2)}, \bar{\Delta}_1^{(2)}\right) - Q^*$ во внутренних точках x_2^0, x_3^0, x_4^0 отрезка $[0, R]$ для определения их координат.

$$
\begin{aligned}
&Q\left(x_2^0, \overline{\Delta}_0^{(2)}, \overline{\Delta}_1^{(2)}\right) - Q^* = \varepsilon_{\min}^{(2)};\\
&Q\left(x_3^0, \overline{\Delta}_0^{(2)}, \overline{\Delta}_1^{(2)}\right) - Q^* = -\varepsilon_{\min}^{(2)};\\
&Q\left(x_4^0, \overline{\Delta}_0^{(2)}, \overline{\Delta}_1^{(2)}\right) - Q^* = \varepsilon_{\min}^{(2)};\\
&Q\left(R, \overline{\Delta}_0^{(2)}, \overline{\Delta}_1^{(2)}\right) - Q^* = -\varepsilon_{\min}^{(2)};\\
&\frac{\partial Q\left(x_j^0, \overline{\Delta}_0^{(2)}, \overline{\Delta}_1^{(2)}\right)}{\partial x} = 0, \quad j = 2,3,4.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

$$
\begin{aligned}
&Q\left(0, \overline{\Delta}_0^{(2)}, \overline{\Delta}_1^{(2)}\right) - Q^* = -\varepsilon_{\min}^{(2)};\\
&Q\left(x_2^0, \overline{\Delta}_0^{(2)}, \overline{\Delta}_1^{(2)}\right) - Q^* = \varepsilon_{\min}^{(2)};\\
&Q\left(x_3^0, \overline{\Delta}_0^{(2)}, \overline{\Delta}_1^{(2)}\right) - Q^* = -\varepsilon_{\min}^{(2)};\\
&Q\left(x_4^0, \overline{\Delta}_0^{(2)}, \overline{\Delta}_1^{(2)}\right) - Q^* = \varepsilon_{\min}^{(2)};\\
&\frac{\partial Q\left(x_j^0, \overline{\Delta}_0^{(2)}, \overline{\Delta}_1^{(2)}\right)}{\partial x} = 0, \quad j = 2,3,4.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Эти системы семи уравнений решаются стандартными численными методами относительно семи неизвестных $\Delta_{11}^{(2)}, \Delta_{12}^{(2)}, \Delta_{01}^{(2)}, \varepsilon_{\min}^{(2)}, x_2^0, x_3^0, x_4^0$ в (22) и $\Delta_{01}^{(2)}, \Delta_{02}^{(2)}, \Delta_{11}^{(2)}, \varepsilon_{\min}^{(2)}, x_2^0, x_3^0, x_4^0$ в (23).

Численные результаты решения систем уравнений (22), (23) в программной среде MATLAB для исходных данных, указанных в табл. 1, приведены в табл. 2 и на рис. 2. Решение систем уравнений производилось с учетом первых 10 членов бесконечного ряда в (14), (15). Оптимальным считается вариант с наименьшей длительностью процесса управления.

Таблица 1

Исходные данные для расчета

Материал	Титановый сплав
Толщина пластины *R*, м	0,2
Начальная температура Q_0, $^\circ C$	0
Требуемая конечная температура Q^*, $^\circ C$	960
Коэффициент теплопроводности титанового сплава λ, $\text{Вт}/\text{м}^2 \cdot {}^\circ C$	35
Коэффициент температуропроводности a, $\text{м}^2/\text{с}$	$4{,}34 \cdot 10^{-6}$
Коэффициент теплопередачи α, $\text{Вт}/\text{м}^2 \cdot {}^\circ C$	260
Максимальная температура в рабочем пространстве печи $Q_\text{п}$, $^\circ C$	1600

Материал	Титановый сплав
Максимальная величина теплового потока $g_{01\max}$, Вт/м^2	416000
Минимальная величина теплового потока $g_{01\min}$, Вт/м^2	-62400
Максимальная величина теплового потока $g_{11\max}$, Вт/м^2	208000
Минимальная величина теплового потока $g_{11\min}$, Вт/м^2	-31200

Таблица 2

Расчетные результаты при двухканальном управлении

Решение системы (22)						
$\Delta_{11}^{(2)}$, с	$\Delta_{12}^{(2)}$, с	$\Delta_{01}^{(2)}$, с	$\varepsilon_{\min}^{(2)}$	x_2^0, м	x_3^0, м	x_4^0, м
4276	3952	1260	7	0,032	0,1	0,167
Решение системы (23)						
$\Delta_{01}^{(2)}$, с	$\Delta_{02}^{(2)}$, с	$\Delta_{11}^{(2)}$, с	$\varepsilon_{\min}^{(2)}$	x_2^0, м	x_3^0, м	x_4^0, м
3880	4374	1745	10	0,03	0,112	0,1803

Для сравнения решалась задача одноканального управления как со стороны внешнего теплового потока $g_{01}(t)$ на границе $x=0$, так и отдельно для случая, когда управляющее воздействие $g_{11}(t)$ сосредоточено на границе $x=R$. Тогда вместо систем (22) и (23) имеет место система четырех уравнений относительно четырех неизвестных: $\Delta_{01}^{(2)}, \Delta_{02}^{(2)}, \varepsilon_{\min}^{(2)}, x_2^0$ или $\Delta_{11}^{(2)}, \Delta_{12}^{(2)}, \varepsilon_{\min}^{(2)}, x_2^0$.Численные результаты решения для двух случаев одноканального управления приведены в табл. 3.

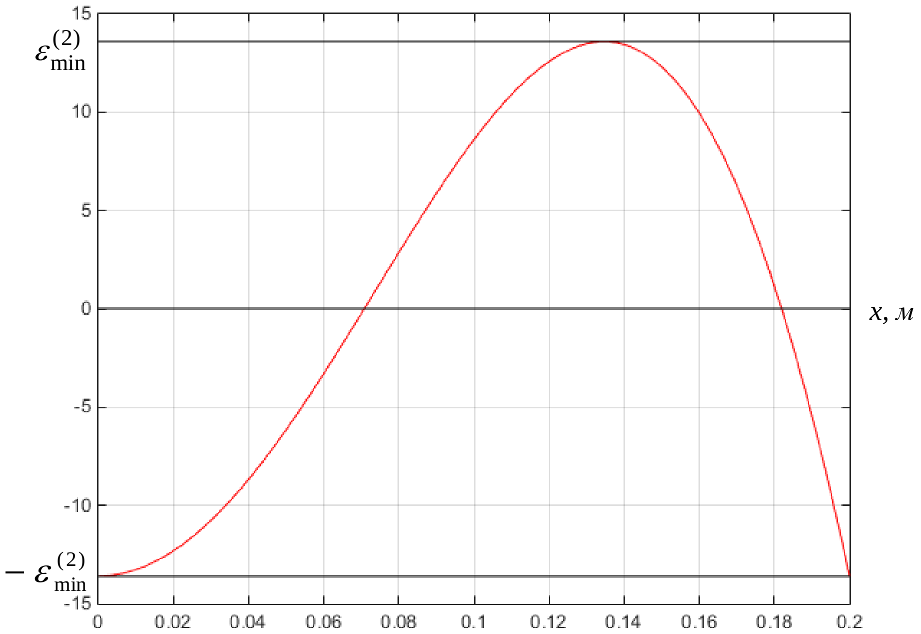
Таблица 3

Расчетные результаты при одноканальном управлении

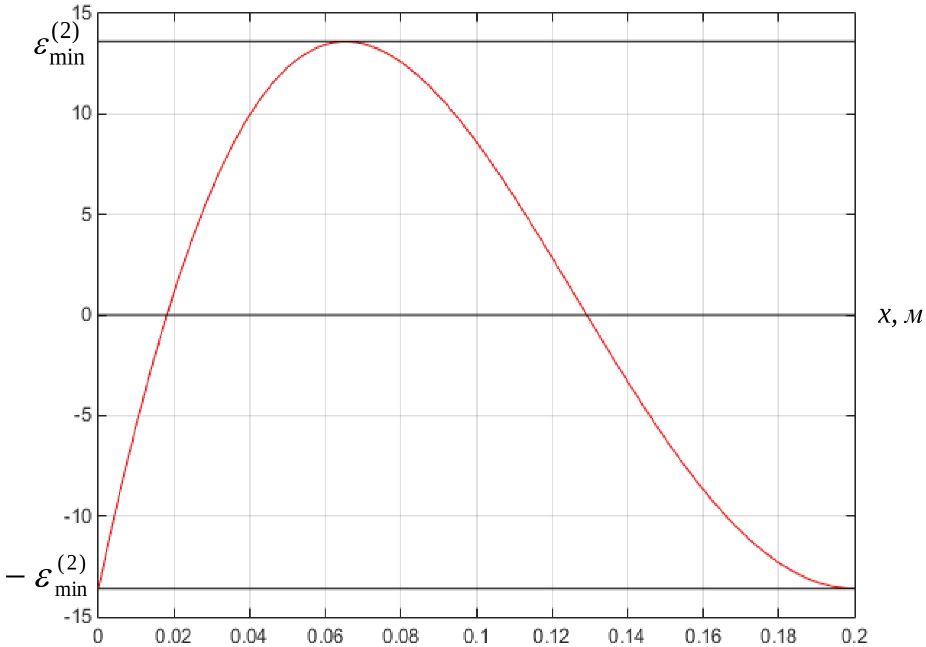
Со стороны теплового потока $g_{11}(t)$			
$\Delta_{11}^{(2)}$, с	$\Delta_{12}^{(2)}$, с	$\varepsilon_{\min}^{(2)}$	x_2^0, м
4031	892	13,6	0,134
Со стороны теплового потока $g_{01}(t)$			
$\Delta_{01}^{(2)}$, с	$\Delta_{02}^{(2)}$, с	$\varepsilon_{\min}^{(2)}$	x_2^0, м
4031	891	13	0,065

На рис. 4 приведены два варианта пространственного распределения управляемой величины в конце оптимального процесса с отклонениями $\varepsilon_{\min}^{(2)}$ от заданного состояния.

На основе полученных результатов отметим, что двухканальное управление процессом нестационарной теплопроводности обеспечивает более высокую точность приближения конечного распределения температуры к заданному.



а)



б)

Рис. 4. Кривые результирующего температурного распределения при одноканальном управлении

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел – М.: Высшая школа, 2001. – 550 с.
2. *Мартыненко Н.А., Пустыльников Л.М.* Конечные инженерные преобразования и их применение к исследованию систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1986. – 303 с.
3. *Рапопорт Э.Я.* Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. – М.: Высшая школа, 2003. – 299 с.
4. *Рапопорт Э.Я.* Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. – М.: Высшая школа, 2009. – 677 с.
5. *Рапопорт Э.Я.* Альтернансный метод в прикладных задачах оптимизации. – М.: Наука, 2000. – 336 с.

Статья поступила в редакцию 15 января 2018 г.

TWO-CHANNEL TIME-OPTIMAL CONTROL OF THE PROCESS OF NONSTATIONARY HEAT CONDUCTIVITY

E.YA. RAPOPORT, N.A. ILINA

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

E-mail: edgar.rapoport@mail.ru; ilina.natalyaa@yandex.ru

Abstract. *Proposed formulation and the method of solution of the problem of time-optimal control of temperature field of an infinite slab with two boundary control actions by the value of the external heat flux on its surfaces in conditions of a given accuracy of uniform approximation of the final temperature distribution of the thickness of the slab to a given one is proposed. The proposed method uses the procedure of preliminary parametrization of control actions based on analytical conditions of optimality, subsequent reduction to a special problem of mathematical programming and methods of its solution based on the alternance properties of the desired parametrical characteristics and knowledge of physical regularities of the subject area. The results and their analysis for different variants of the resulting temperature distribution curve are given.*

Ключевые слова*: optimal control, two-channel control, alternance method, semi-infinite optimization.*

Edgar Ya. Rapoport (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.
Natalya A. Ilina, Postgraduate Student.