УДК 519.237.5

ВОССТАНОВЛЕНИЕ СВОЙСТВ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ПОСЛЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В.В. Кузнецов

Самарский государственный технический университет
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Аннотация. *Проанализировано интегральное преобразование случайного процесса при достаточно общей постановке задачи. Подобные проблемы изучались автором ранее применительно к случайным функциям в электроэнергетике. В принципе рассматриваемая проблема состоит в анализе изменений корреляционной функции под действием на процесс интегрального фильтра с весовой функцией, рассматривается «обратная задача» – выходной сигнал предполагается известным, параметры входного сигнала подлежат определению. Использованная идеализация в данном случае состоит в предположении о стационарности исходного процесса, а также о разностной структуре весовой функции. Статья продолжает математическое описание действия линейного интегрального оператора на случайную функцию, изложенное в [6, §7].*

Ключевые слова: *случайный процесс, случайная функция, интегральное преобразование, весовая функция, математическое ожидание, стационарность в широком смысле, разностное ядро, корреляционная функция, уравнение связи.*

Будем рассматривать случайный процесс (СП) (либо случайную функцию (СФ)) – $X(t)$, а также примененное к этому СП интегральное преобразование в достаточно общем виде, в отличие от [3]:

$$Y(t)=\int\limits_{t-\theta}^{t} w(t,\tau)X(\tau)d\tau, \quad \theta>0\,, \tag{1}$$

здесь $w(t,\tau)$ – заданная «весовая» функция двух переменных; Θ – интервал осреднения от «прошедшего» времени t-Θ к «настоящему» t [6]. Можно определить $X(t)$ как входящий, $Y(t)$ – как исходящий стохастический сигнал.

Оговорим некоторые условия, образовав частный случай, который достаточно типичен и будет рассматриваться и в дальнейшем; а именно будем полагать $X(t)$ стационарной в широком смысле случайной функцией и $w(t_1,t_2) = w(t_2\text{-}t_1)$, зависящей от разности своих аргументов, фактически от одного аргумента t_2-t_1. Тогда, применяя оператор математического ожидания $\mathbf{M}[\bullet]$ к процессу $X(t)$, получим не зависящую от времени величину, $\mathbf{M}[X(t)] = m_x = const$. Не составит труда доказать и стационарность СФ $Y(t)$, проанализировав средние от обеих частей (1):

$$\mathbf{M}\big[Y(t)\big]=\mathbf{M}\left[\int\limits_{t-\theta}^{t} w(\tau-t)X(\tau)d\tau\right]\Rightarrow m_y(t)=\int\limits_{t-\theta}^{t} w(\tau-t)\mathbf{M}\big[X(\tau)\big]d\tau\Rightarrow$$

Кузнецов Владимир Валерьевич (к.т.н.), доцент кафедры «Высшая математика и прикладная информатика».

$$m_y(t) = m_x \int_{t-\theta}^{t} w(\tau - t) d\tau,$$

$$m'_y(t) = m_x \left[\int_{t-\theta}^{t} w'_t(\tau - t) d\tau + w(0) - w(\theta) \right] =$$

$$= m_x \left[-\int_{t-\theta}^{t} \frac{\partial w(\tau - t)}{\partial \tau} d\tau + w(0) - w(\theta) \right] = m_x \left[-w(\tau - t) \Big|_{t-\theta}^{t} + w(0) - w(\theta) \right] =$$

$$= m_x \left[-w(0) + w(\theta) + w(0) - w(\theta) \right] \equiv 0 \Rightarrow m'_y(t) \equiv 0 \Rightarrow m_y(t) = m_y = const.$$

Следовательно, $Y(t)$ также является стационарной СФ в широком смысле.

Корреляционная функция и ее образ относительно (1)

По-прежнему процесс $X(t)$ стационарен в широком смысле, но на функцию $w(t_1,t_2)$ не наложено пока никаких условий. Корреляционная функция (второго порядка) входного сигнала пусть $K_x(t_1,t_2)$, а корреляционная функция выходного сигнала пусть $K_y(t_1,t_2)$:

$$K_x(t_1,t_2) = \mathbf{M}\left[\left(X(t_1) - m_x \right) \left(X(t_2) - m_x \right) \right] = K_x(t_2 - t_1).$$

С учетом (1) $K_x(t_1,t_2)$ и $K_y(t_1,t_2)$ связаны следующим интегральным соотношением [6]:

$$K_y(t_1,t_2) = \int_{t_1-\theta}^{t_1} \int_{t_1-\theta}^{t_2} w(t_1,\tau_1) w(t_2,\tau_2) K_x(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2. \qquad (2)$$

Для двойного интеграла в правой части логичен переход к новым переменным с целью упрощения аргументов функции $K_x(\tau_2 - \tau_1)$:

$$\begin{cases} \xi_1 = \tau_1 \\ \xi_1 + \xi_2 = \tau_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = \tau_1 \\ \xi_2 = \tau_2 - \tau_1 \end{cases} \Rightarrow J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Здесь ξ_1, ξ_2 – новые переменные; J – якобиан преобразования. Старая область интегрирования D (квадрат) в правой части (2) трансформируется в новую D' (параллелограмм), получим [1]:

$$K_y(t_1,t_2) = \iint_{D'} w(t_1,\xi_1) w(t_2,\xi_1 + \xi_2) K_x(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

после разбиения новой области интегрирования на две части и перехода к повторным интегралам имеем

$$K_y(t_1,t_2) = \int_{t_2-t_1-\theta}^{t_2-t_1} K_x(\xi_2) d\xi_2 \int_{-\xi_2+t_2-\theta}^{t_1} w(t_1,\xi_1) w(t_2,\xi_1 + \xi_2) d\xi_1 +$$

$$+ \int_{t_2-t_1}^{t_2-t_1+\theta} K_x(\xi_2) d\xi_2 \int_{t_1-\theta}^{-\xi_2+t_2} w(t_1,\xi_1) w(t_2,\xi_1 + \xi_2) d\xi_1. \qquad (3)$$

Введем обозначения:

$$\varphi_1(t_1,t_2,\xi_2)=\int\limits_{-\xi_2+t_2-\theta}^{t_1} w(t_1,\xi_1)w(t_2,\xi_1+\xi_2)d\xi_1, \tag{4}$$

$$\varphi_2(t_1,t_2,\xi_2)=\int\limits_{t_1-\theta}^{-\xi_2+t_2} w(t_1,\xi_1)w(t_2,\xi_1+\xi_2)d\xi_1, \tag{5}$$

уравнение связи (3) принимает вид

$$K_y(t_1,t_2)=\int\limits_{t_2-t_1-\theta}^{t_2-t_1}\varphi_1(t_1,t_2,\xi_2)K_x(\xi_2)d\xi_2+\int\limits_{t_2-t_1}^{t_2-t_1+\theta}\varphi_2(t_1,t_2,\xi_2)K_x(\xi_2)d\xi_2. \tag{6}$$

Вернемся к случаю разностного ядра $w(t_1,t_2)$ = $w(t_2$- $t_1)$ и проанализируем свойства функций $\varphi_1(t_1,t_2,\xi_2)$ и $\varphi_2(t_1,t_2,\xi_2)$ при таком условии:

$$\varphi_1(t_1,t_2,\xi_2)=\int\limits_{-\xi_2+t_2-\theta}^{t_1} w(\xi_1-t_1)w(\xi_1+\xi_2-t_2)d\xi_1,$$

$$\varphi_2(t_1,t_2,\xi_2)=\int\limits_{t_1-\theta}^{-\xi_2+t_2} w(\xi_1-t_1)w(\xi_1+\xi_2-t_2)d\xi_1.$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}=\int\limits_{-\xi_2+t_2-\theta}^{t_1}\frac{\partial w(\xi_1-t_1)}{\partial t_1}w(\xi_1+\xi_2-t_2)d\xi_1+w(0)w(t_1-t_2+\xi_2)=$$

$$=-\int\limits_{-\xi_2+t_2-\theta}^{t_1}\frac{\partial w(\xi_1-t_1)}{\partial \xi_1}w(\xi_1+\xi_2-t_2)d\xi_1+w(0)w(t_1-t_2+\xi_2),$$

применим формулу интегрирования по частям:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}=-\int\limits_{-\xi_2+t_2-\theta}^{t_1} w(\xi_1+\xi_2-t_2)dw(\xi_1-t_1)+w(0)w(t_1-t_2+\xi_2)=$$

$$-w(\xi_1+\xi_2-t_2)w(\xi_1-t_1)\Big|_{-\xi_2+t_2-\theta}^{t_1}+\int\limits_{-\xi_2+t_2-\theta}^{t_1} w(\xi_1-t_1)dw(\xi_1+\xi_2-t_2)+$$

$$+w(0)w(t_1-t_2+\xi_2)=-w(t_1-t_2+\xi_2)w(0)+w(-\theta)w(t_2-t_1-\xi_2-\theta)+$$

$$+\int\limits_{-\xi_2+t_2-\theta}^{t_1} w\left(\xi_1-t_1\right)w'_{\xi_1}\left(\xi_1+\xi_2-t_2\right)d\xi_1+w(0)w\left(t_1-t_2+\xi_2\right)=$$

$$= -\int\limits_{-\xi_2+t_2-\theta}^{t_1} w(\xi_1 - t_1) w'_{t_2}(\xi_1 + \xi_2 - t_2) d\xi_1 + w(t_2 - t_1 - \xi_2 - \theta) w(-\theta),$$

учли очевидное равенство:

$$w'_{\xi_1}(\xi_1 + \xi_2 - t_2) = -w'_{t_2}(\xi_1 + \xi_2 - t_2).$$

Итак:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} = -\int\limits_{-\xi_2+t_2-\theta}^{t_1} w(\xi_1 - t_1) w'_{t_2}(\xi_1 + \xi_2 - t_2) d\xi_1 + w(t_2 - t_1 - \xi_2 - \theta) w(-\theta). \quad (7)$$

Далее продифференцируем известную функцию $\varphi_1(t_1,t_2,\xi_2)$ по переменной t_2:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2} = \int\limits_{-\xi_2+t_2-\theta}^{t_1} w(\xi_1 - t_1) w'_{t_2}(\xi_1 + \xi_2 - t_2) d\xi_1 - w(t_2 - t_1 - \xi_2 - \theta) w(-\theta). \quad (8)$$

Правые части соотношений (7) и (8) отличаются только знаком, из чего следует:

$$\frac{\partial \varphi_1(t_1, t_2, \xi_2)}{\partial t_1} = -\frac{\partial \varphi_1(t_1, t_2, \xi_2)}{\partial t_2}.$$

Решением такого дифференциального уравнения является функция $\varphi_1(t_2 - t_1,\xi_2)$ [2], теперь $\varphi_1(t_1,t_2,\xi_2) = \varphi_1(t_2 - t_1,\xi_2)$. Аналогичное свойство легко доказывается и для $\varphi_2(t_1,t_2,\xi_2)$, именно $\varphi_2(t_1,t_2,\xi_2) = \varphi_2(t_2 - t_1,\xi_2)$.

Теперь уравнение связи (6) будет выглядеть так:

$$K_y(t_1, t_2) = \int\limits_{t_2-t_1-\theta}^{t_2-t_1} \varphi_1(t_2 - t_1, \xi) K_x(\xi) d\xi + \int\limits_{t_2-t_1}^{t_2-t_1+\theta} \varphi_2(t_2 - t_1, \xi) K_x(\xi) d\xi,$$

или, после замены $\tau = t_2 - t_1$,

$$K_y(\tau) = \int\limits_{\tau-\theta}^{\tau} \varphi_1(\tau, \xi) K_x(\xi) d\xi + \int\limits_{\tau}^{\tau+\theta} \varphi_2(\tau, \xi) K_x(\xi) d\xi. \quad (9)$$

Анализ и решение интегрального уравнения (9) покажет изменение корреляционной функции при достаточно общих условиях осреднения, а также позволит регулировать свойства преобразованного случайного процесса. Книга [6] содержит описание применения интегрального преобразования к корреляционной функции, но достаточно общие аспекты проблемы, в данном случае прикладные особенности задачи, автор попытался рассмотреть в деталях.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кузнецов В.В.* О нахождении корреляционных функций высших порядков // Сборник тр. 9-й Международной конференции молодых ученых и студентов. Актуальные проблемы современной науки. Естественные науки. Ч. 1-3: Математика. Математическое моделирование.– Самара: СамГТУ, 2008. – С. 99–104.
2. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник. Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка. – М.: Физматлит, 2003. – 416 с.

3. *Евдокимов М.А., Кузнецов В.А., Кузнецов В.В.* Математические аспекты преобразования случайных процессов // Вестник Самарского технического университета. Сер. Технические науки. – 2008. – № 1(21). – С. 69–73.
4. *Кузнецов В.В.* Об одном линейном преобразовании несимметричных распределений вероятностей // Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. Пятой Всерос. науч.-конф. Ч. 2. – Самара: СамГТУ, 2008. – С. 61–66.
5. *Кузнецов В.В.* Использование моментов третьего порядка в расчетах электрических нагрузок // Вестник Самарского технического университета. Сер. Технические науки. – 2009. – № 2 (24). – С. 166–171.
6. *Свешников А.А.* Прикладные методы теории случайных функций. – М.: Наука, 1968.

Статья поступила в редакцию 9 марта 2018 г.

RECOVERING THE PROPERTIES OF THE CORRELATION FUNCTION AFTER THE INTEGRAL TRANSFORMATION

V.V. Kuznetsov

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

Abstract. *In this paper the integral transformation of a random process is analyzed with a sufficiently General formulation of the problem. Similar problems were studied by the author earlier in relation to random functions in the electric power industry. In principle, the problem is to analyze the changes in the correlation function under the influence of the process of the integral filter with the weight function, the "inverse problem" is considered – the output signal is assumed to be known, the parameters of the input signal to be determined. The idealization used in this case consists in the assumption of the stationary of the initial process, as well as the difference structure of the weight function. The paper continues the mathematical description of the action of the linear integral operator on a random function described in the book [6], §7.*

Keywords: *random process, random function, integral transformation, weight function, mathematical expectation, stationarity in a broad sense, difference kernel, correlation function, coupling equation.*

Vladimir V. Kuznetsov (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.