УДК 519.872

СТАЦИОНАРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕНАДЕЖНОЙ ДВУХКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОТЕРЯМИ И МГНОВЕННО ПОПОЛНЯЕМЫМ РЕЗЕРВОМ ВРЕМЕНИ*

А.И. Песчанский

Севастопольский государственный университет
Россия, 299053, г. Севастополь, ул. Университетская, 33

E-mail: peschansky_sntu@mail.ru

Аннотация. *Объектом исследования является двухканальная ненадежная система обслуживания с потерями. Предполагается, что поступающий в нее поток заявок является простейшим, а все остальные случайные величины, описывающие функционирование системы, имеют общий вид. Во время обслуживания заявки может произойти отказ канала, и обслуживание заявки продолжается за счет случайного временного резерва. Резерва времени может оказаться достаточно либо для завершения обслуживания, либо для восстановления канала, и тогда обслуживание заявки вновь продолжается каналом. В случае недостаточности резерва заявка теряется и на дообслуживание не возвращается. С помощью аппарата теории полумарковских процессов с дискретно-непрерывным множеством состояний построена математическая модель функционирования системы и найдены финальные вероятности пребывания системы в различных физических состояниях, а также средние стационарные времена пребывания в этих состояниях.*

Ключевые слова: *ненадежная двухканальная система обслуживания, полумарковский процесс с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний, стационарное распределение вложенной цепи Маркова, финальные вероятности состояний, среднее стационарное время пребывания в состояниях.*

Введение

Одним из методов повышения надежности технических систем является временное резервирование – такой способ повышения надежности, при котором системе в процессе функционирования предоставляется возможность израсходовать некоторое время, называемое резервом, для восстановления надежностных характеристик. Резерв времени может создаваться за счет увеличения времени, выделяемого системе для выполнения задания. Он возникает и при создании запаса производительности отдельных устройств. Еще одним источником резерва времени является функциональная инерционность протекающих в системе процессов. Построение математических моделей таких систем и обзор результатов в этом направлении содержится, например, в [1–4]. Отказ от экспоненциальности распределений случайных величин, описывающих системы обслуживания, приводит к усложнению моделей. В этом случае для исследований может привлекаться аппарат теории полумарковских процессов с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний. Так, в [5] найдены стационарные характеристи-

**Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 5-01-05840).*

Песчанский Алексей Иванович (д.т.н., проф.), профессор кафедры «Высшая математика».

ки ненадежной одноканальной системы обслуживания с потерями и мгновенно пополняемым резервом времени в предположении общего вида случайных величин, определяющих систему. В данной работе результаты [5] обобщаются на случай двухканальной системы обслуживания.

Постановка задачи

В ненадежную систему обслуживания $M/G/2/0$ поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Длительность обслуживания заявки k-м каналом – случайная величина (СВ) α_k с функцией распределения (ФР) $F_k(t)=P\{\alpha_k \le t\}$ и плотностью распределения (ПР) $f_k(t),\ k=1,2$. Во время обслуживания заявки канал может выйти из строя. Время с момента начала обслуживания заявки до момента отказа канала – СВ γ_k с ФР $\Phi_k(t)$ и ПР $\varphi_k(t),\ k=1,2$. Восстановление канала начинается сразу после его отказа и длится случайное время σ_k с ФР $\Psi_k(t)$ и ПР $\psi_k(t),\ k=1,2$. После отказа канала обслуживание заявки продолжается за счет временного резерва, который представляет собой СВ ξ_k с ФР $R_k(t)$ и ПР $r_k(t),\ k=1,2$. Если временной резерв исчерпывается, то обслуживание заявки прекращается и она теряется. Следующую заявку на обслуживание канал принимает после своего восстановления. В случае завершения обслуживания заявки за счет резерва следующая заявка к обслуживанию также принимается после восстановления канала. Если же восстановление канала происходит до завершения обслуживания, то обслуживание заявки вновь продолжается каналом. В случае повторного отказа канала обслуживание заявки снова продолжается за счет временного резерва, который представляет собой ту же СВ ξ_k. Таким образом, обслуживание заявки может быть завершено за счет неоднократного использования временного резерва. Предполагается, что все указанные случайные величины имеют конечные математические ожидания и дисперсии.

Цель работы – найти финальные вероятности пребывания системы в различных физических состояниях, определить средние стационарные времена пребывания в этих состояниях и исследовать влияние временного резерва на эти характеристики.

Построение математической модели

Для построения модели функционирования рассматриваемой системы обслуживания используем полумарковский процесс $S(t)$ с дискретно-непрерывным множеством состояний. Для задания этого процесса введем фазовое пространство состояний E, вероятности и плотности вероятностей переходов из состояний, а также времена пребывания в состояниях.

Начнем с описания физических состояний системы. Они могут быть заданы двухкомпонентным вектором $\overline{d}=(d_1,d_2)$, каждая компонента которого описывает физическое состояние соответствующего канала и принимает следующие значения: 1_1 – работоспособный канал обслуживает заявку; 1_2 – канал восстанавливается, обслуживание заявки продолжается за счет временного резерва; 2 – канал восстанавливается, заявка не обслуживается; 0 – канал в работоспособном состоянии находится в ожидании заявки.

Для того чтобы в моменты изменения физических состояний каналов система обладала марковским свойством, перед вектором физических состояний укажем номер канала, который изменил свое физическое состояние последним, а также расширим фазовое пространство состояний добавлением непрерывных составляющих. Опишем содержательный смысл этих расширений.

Для состояния k -го канала $1_1 x_k z_k$ $(x_k \geq 0, z_k \geq 0)$ составляющая x_k – время, прошедшее с момента начала обслуживания заявки, z_k – время, оставшееся до отказа канала. В частном случае $1_1 00$ – момент начала обслуживания вновь поступившей заявки, $1_1 x_k 0$ $(x_k > 0)$ – момент переключения канала на обслуживание заявки после восстановления.

Для состояния $1_2 x_k u_k z_k$ составляющая $x_k > 0$ – время, прошедшее с момента начала обслуживания заявки; $u_k \geq 0$ – время, оставшееся до окончания восстановления канала; $z_k \geq 0$ – оставшийся временной резерв. При этом $1_2 x_k 00$ – момент переключения обслуживания заявки за счет резерва.

Для состояния $2u_k$ составляющая $u_k > 0$ – время, оставшееся до окончания восстановления k -го канала.

Например, состояние $[1(1_1 x_1 0)(1_2 x_2 u_2 z_2)]$ соответствует моменту окончания восстановления первого канала и его переключению на обслуживание заявки, которая уже обслуживается время x_1. В этот момент второй канал восстанавливается (до конца восстановления осталось время u_2), а заявка обслуживается за счет резерва (z_2 – оставшийся временной резерв), и с момента начала ее обслуживания прошло время x_2.

Состояние $[2(2u_1)(0)]$ – момент перехода второго канала в состояние ожидания заявки в работоспособном состоянии. В этот момент первый канал продолжает восстанавливаться, до конца восстановления осталось время u_1 (заявку канал не обслуживает).

Укажем, как определяются времена пребывания системы в состояниях. Если последним изменил свое физическое состояние i -й канал, то время пребывания системы в состоянии есть минимум детерминированной величины $\underset{z_k \neq 0}{z_k} \wedge \underset{u_k \neq 0}{u_k}$, $k = 1,2$, и случайной величины χ, где

$$\chi = \begin{cases} [\alpha_i - x_i]_+ \wedge \gamma_i, \text{ если } d_i = 1_1, \\ [\alpha_i - x_i]_+ \wedge \sigma_i \wedge \xi_i, \text{ если } d_i = 1_2, \\ [\alpha_{3-i} - x_{3-i}]_+, \text{ если } d_{3-i} = 1_1, 1_2, \\ \beta, \text{ если } d_i = 0 \text{ или } d_{3-i} = 0. \end{cases}$$

Здесь $\wedge$ – знак минимума; β – время между поступления заявок в систему с плотностью $g(t) = \lambda e^{-\lambda t}$; $[\alpha_i - x_i]_+$ – СВ с ФР $\dfrac{F_i(x_i + t)}{\overline{F}_i(x_i)}$, причем в случае $x_i = 0$ СВ $[\alpha_i - x_i]_+$ есть α_i.

Например, время пребывания системы в состоянии $[2(1_1 x_1 z_1)(1_1 00)]$ есть минимум величин $\left[\alpha_1 - x_1\right]_+ \wedge z_1 \wedge \alpha_2 \wedge \gamma_2$; время в состоянии $\left[2(1_1 x_1 z_1)(0)\right]$ – минимум $\left[\alpha_1 - x_1\right]_+ \wedge z_1 \wedge \beta$.

Опишем плотности вероятностей переходов системы на примере переходов из состояния $\left[2(1_1 x_1 z_1)(1_1 00)\right]$:

$$p\{[2(1_1 x_1 z_1)(1_1 00)] \to [1(0)(1_1 x_2 z_2)]\} =$$
$$= \frac{f_1(x_1 + x_2)}{\overline{F}_1(x_1)} \overline{F}_2(x_2)\varphi_2(x_2 + z_2), \; x_2 < z_1, \; z_2 > 0;$$

$$p\{[2(1_1 x_1 z_1)(1_1 00)] \to [1(1_2, x_1 + z_1, 00)(1_1 z_1 z_2)]\} =$$
$$= \frac{\overline{F}_1(x_1 + z_1)}{\overline{F}_1(x_1)} \overline{F}_2(z_1)\varphi_2(z_1 + z_2), \quad z_2 > 0;$$

$$p\{[2(1_1 x_1 z_1)(1_1 00)] \to [2(1_1, x_1 + z_1 - z_1', z_1')(1_2, z_1 - z_1', 00)]\} =$$
$$= \frac{\overline{F}_1(x_1 + z_1 - z_1')}{\overline{F}_1(x_1)} \overline{F}_2(z_1 - z_1')\varphi_2(z_1 - z_1'), \quad 0 < z_1' < z_1;$$

$$p\{[2(1_1 x_1 z_1)(1_1 00)] \to [2(1_1, x_1 + z_1 - z_1', z_1')(0)]\} =$$
$$= \frac{\overline{F}_1(x_1 + z_1 - z_1')}{\overline{F}_1(x_1)} f_2(z_1 - z_1')\overline{\Phi}_2(z_1 - z_1'), \quad 0 < z_1' < z_1.$$

Аналогично выписываются плотности и вероятности переходов из других состояний системы.

Стационарное распределение вложенной цепи Маркова (ВЦМ) находится из системы уравнений

$$\rho(B) = \int_E \rho(dx) P(x, B),$$

где $P(x, B)$ — вероятность перехода из состояния x во множество состояний B; $\rho(\cdot)$ — стационарное распределение ВЦМ.

В рассматриваемой модели система уравнений содержит 40 уравнений. Выпишем для примера одно из уравнений этой системы:

$$\rho[2(1_1 x_1 z_1)(1_1 00)] = \rho[1(1_1 00)(0)] g(x_1)\varphi_1(x_1 + z_1)\overline{F}_1(x_1) +$$
$$+ \int_0^{x_1} \frac{\overline{F}_1(x_1)}{\overline{F}_1(x_1 - t)} g(t)\varphi_1(t + z_1)\rho[1(1_1, x_1 - t, 0)(0)] dt +$$
$$+ \int_0^{x_1} \frac{\overline{F}_1(x_1)}{\overline{F}_1(x_1 - t)} g(t)\rho[2(1_1, x_1 - t, t + z_1)(0)] dt.$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что решениями этого уравнения являются функции

$$\rho[1(1_1 00)(0)] = \frac{\rho_0}{\lambda}; \; \rho[1(1_1 x_1 0)(0)] = \frac{\rho_0}{\lambda} \overline{F}_1(x_1) h_1^{(1)}(x_1);$$
$$\rho[2(1_1 x_1 z_1)(1_1 00)] = \rho[2(1_1 x_1 z_1)(0)] = \rho_0 \overline{F}_1(x_1) v_1^{(1_1)}(x_1, z_1),$$

где

$$h_1^{(1)}(x_1)=\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi_1*\psi_1\overline{R_1})^{*(k)}(x_1)-$$

плотность функции $H_1^{(1)}(x_1)$ четных восстановлений (т. е. восстановлений работоспособности первого канала) обрывающегося альтернирующего процесса восстановления, который порождается СВ γ_1 и СВ с несобственным распределением и плотностью $\psi_1(x_1)\overline{R_1}(x_1)$; функция

$$v_1^{(1_1)}(x_1,z_1)=\varphi_1(x_1+z_1)+\int_0^{x_1}h_1^{(1)}(s)\varphi_1(x_1+z_1-s)ds-$$

по переменной z_1 плотность распределения остаточной наработки до отказа этого альтернирующего процесса, если с момента обслуживания заявки этим каналом прошло время x_1. Постоянная ρ_0 находится из условия нормировки.

Аналогично выписываются остальные уравнения системы и доказывается, что стационарное распределение ВЦМ для состояний с точностью до постоянного множителя ρ_0 представляет собой произведение двух сомножителей. Если последним изменил свое физическое состояние канал с номером i, то ему соответствует множитель вида

$$a_i=\begin{cases} 1,\ d_i=0 \text{ или } d_i=1_1, x_i=z_i=0, \\ \overline{F_i}(x_i)h_i^{(k)}(x_i),\ d_i=1_k,\ k=1,2, \\ \int_0^{\infty}dy\int_0^{\infty}h_i^{(2)}(t)\psi_i(y+u_i)\left[f_i(t+y)\overline{R_i}(y)+\overline{F_i}(t+y)r_i(y)\right]dt,\ d_i=2; \end{cases}$$

а другому каналу – множитель

$$a_{3-i}=\begin{cases} \lambda^{-1},\ d_{3-i}=0, \\ \overline{F_{3-i}}(x_{3-i})v_{3-i}^{(1_1)}(x_{3-i},z_{3-i}),\ d_{3-i}=1_1, \\ \overline{F_{3-i}}(x_{3-i})v_{3-i}^{(1_2)}(x_{3-i},u_{3-i},z_{3-i}),\ d_{3-i}=1_2, \\ \int_0^{\infty}dy\int_0^{\infty}h_{3-i}^{(2)}(t)\overline{\Psi}_{3-i}(y+u_{3-i})\left[f_{3-i}(t+y)\overline{R_{3-i}}(y)+\overline{F_{3-i}}(t+y)r_{3-i}(y)\right]dt,\ d_{3-i}=2. \end{cases}$$

Здесь

$$h_k^{(2)}(x_k)=\sum_{m=1}^{\infty}\left[\varphi_k*(\varphi_k*\psi_k\overline{R_k})^{*(m-1)}\right](x_k)-$$

плотность функции $H_k^{(2)}(x_k)$ нечетных восстановлений (т. е. отказов k-го канала) обрывающегося альтернирующего процесса восстановления, который порождается СВ γ_k и СВ с несобственным распределением и плотностью $\psi_k(x_k)\overline{R_k}(x_k)$; функция

$$v_k^{(1_2)}(x_k,u_k,z_k)=\int_0^{x_k}h_k^{(2)}(s)\psi_k(x_k+u_k-s)r_k(x_k+z_k-s)ds-$$

по переменной u_k плотность распределения времени, оставшегося до ближайшего момента восстановления работоспособности k -го канала, если с момента обслуживания заявки этим каналом прошло время x_k , а оставшийся временной резерв равен z_k .

Финальные вероятности состояний

Разобьем фазовое пространство состояний системы на непересекающиеся подмножества $E = E_2 \cup E_1 \cup E_0$. К подмножеству E_2 (оба канала заняты) отнесем все состояния, для которых компоненты вектора физических состояний $\overline{d}$ принимают значения $1_1, 1_2$ или 2 . Подмножество E_1 (один канал занят, второй свободен) включает в себя состояния, в которых одна из компонент вектора физических состояний равна 0 . Подмножество E_0 (оба канала свободны) образуют состояния с нулевыми компонентами вектора физических состояний, т. е. $E_0 = \{[1(0)(0)], [2(0)(0)]\}$.

Финальные вероятности пребывания системы в указанных подмножествах состояний найдем с помощью предельных соотношений [6]

$$p_i^* = \lim_{t\to\infty} P\{S(t) \in E_i \,/\, S(0) = x\} = \int_{E_i} m(x)\rho(dx) \left(\int_E m(x)\rho(dx) \right)^{-1}, \ i = 0,1,2, \quad (1)$$

где $m(x)$ – среднее время пребывания системы в состоянии $x \in E$; $\rho(\cdot)$ – стационарное распределение вложенной цепи Маркова.

Не составляет труда выписать средние времена пребывания рассматриваемой системы в состояниях. Например, для состояний $[1(0)(0)]$, $[2(1_1 x_1 z_1)(0)]$ и $[2(1_1 x_1 z_1)(1_1 00)]$эти времена определяются соответственно формулами

$$E\theta_{[1(0)(0)]} = \frac{1}{\lambda}; \ E\theta_{[2(1_1 x_1 z_1)(0)]} = \int_0^{z_1} \frac{\overline{F_1}(t + x_1)}{\overline{F_1}(x_1)} e^{-\lambda t} dt;$$

$$E\theta_{[2(1_1 x_1 z_1)(1_1 00)]} = \int_0^{z_1} \frac{\overline{F_1}(t + x_1)\overline{\Phi_2}(t)\overline{F_2}(t)}{\overline{F_1}(x_1)} dt .$$

При использовании выражений для средних времен, а также найденной плотности стационарного распределения ВЦМ интегралы в формуле (1) в результате преобразований принимают вид

$$\int_{E_2} m(x)\rho(dx) = \rho_0 \prod_{i=1}^{2} \left[E\alpha_i + \int_0^\infty \overline{F_i}(t)\left[H_i^{(1)}(t) - H_i^{(2)}(t)\right]dt + E\sigma_i \int_0^\infty f_i(t) H_i^{(2)}(t)dt \right];$$

$$\int_{E_1} m(x)\rho(dx) = \frac{\rho_0}{\lambda} \sum_{i=1}^{2} \left[E\alpha_i + \int_0^\infty \overline{F_i}(t)\left[H_i^{(1)}(t) - H_i^{(2)}(t)\right]dt + E\sigma_i \int_0^\infty f_i(t) H_i^{(2)}(t)dt \right];$$

$$\int_{E_0} m(x)\rho(dx) = \frac{2\rho_0}{\lambda^2} .$$

Введем обозначения:

$$T_k^{(0)} = \frac{1}{\lambda};\; T_k^{(1_1)} = E\alpha_k + \int_0^\infty \overline{F_k}(t)\left[H_k^{(1)}(t) - H_k^{(2)}(t)\right]dt,\; k = 1,2;$$

$$T_k^{(1_2)} = \int_0^\infty \overline{\Psi_k}(t)\overline{R_k}(t)dt\int_0^\infty H_k^{(2)}(s) f_k(s+t)ds,\; k = 1,2;$$

$$T_k^{(2)} = E\sigma_k \int_0^\infty f_k(t)H_k^{(2)}(t)dt - \int_0^\infty \overline{\Psi_k}(t)\overline{R_k}(t)dt\int_0^\infty H_k^{(2)}(s) f_k(s+t)ds,\; k = 1,2.$$

Заметим, что $T_k^{(m)}$ – среднее время пребывания k-го канала в состоянии $m = 1_1, 1_2, 2, 0$ на периоде регенерации, т. е. между двумя соседними моментами начала обслуживания заявок.

С учетом полученных выражений и обозначений финальные вероятности состояний: оба канала свободны, один канал свободен, оба канала заняты – определяются соответственно формулами

$$p_0^* = \frac{2[E\beta]^2}{2[E\beta]^2 + E\beta\sum_{k=1}^{2}\left[T_k^{(1_1)} + T_k^{(1_2)} + T_k^{(2)}\right] + \prod_{k=1}^{2}\left[T_k^{(1_1)} + T_k^{(1_2)} + T_k^{(2)}\right]};$$

$$p_1^* = \frac{p_0^*}{2E\beta}\sum_{k=1}^{2}\left[T_k^{(1_1)} + T_k^{(1_2)} + T_k^{(2)}\right];\; p_2^* = \frac{p_0^*}{2[E\beta]^2}\prod_{k=1}^{2}\left[T_k^{(1_1)} + T_k^{(1_2)} + T_k^{(2)}\right], \tag{2}$$

где

$$T_k^{(1_1)} + T_k^{(1_2)} + T_k^{(2)} = E\alpha_k + \int_0^\infty \overline{F_k}(t)\left[H_k^{(1)}(t) - H_k^{(2)}(t)\right]dt + E\sigma_k\int_0^\infty f_k(t)H_k^{(2)}(t)dt. \tag{3}$$

Если система обслуживания однородная, т. е. каналы однотипны и описываются одинаковыми случайными величинами, то формулы для финальных вероятностей могут быть записаны в форме формул Эрланга:

$$p_0^* = \frac{1}{1+\Lambda+\Lambda^2/2};\; p_1^* = \frac{\Lambda}{1+\Lambda+\Lambda^2/2};\; p_2^* = \frac{\Lambda^2/2}{1+\Lambda+\Lambda^2/2},$$

где

$$\Lambda = \lambda\left[T^{(1_1)} + T^{(1_2)} + T^{(2)}\right].$$

Заметим, что вероятность полного обслуживания заявки k-м каналом ($k = 1, 2$) для системы без временного резерва равна

$$\widetilde{P}_k = \int_0^\infty f_k(t)\overline{\Phi_k}(t)dt.$$

Наличие временного резерва увеличивает эту вероятность до значения

$$P_k = \int_0^\infty h_k^{(2)}(s)ds\int_0^\infty r_k(t)\overline{\Psi_k}(t)F_k(t+s)dt. \tag{4}$$

Средние стационарные времена пребывания системы в состояниях

Среднее стационарное время пребывания системы в состоянии E_i найдем с помощью соотношений [6]

$$T(E_i) = \int\limits_{E_i} m(x)\rho(dx)\left[\int\limits_{E\setminus E_i}\rho(dx)P(x,E_i)\right]^{-1}, \quad i = 0,1,2, \tag{5}$$

где $P(x, E_i)$ – вероятности переходов из состояния x в подмножество состояний E_i.

В результате преобразований соотношения (5) с учетом вероятностей переходов системы из состояний и стационарного распределения ВЦМ приводятся к виду

$$T(E_0) = E\beta;\ T(E_1) = \frac{\lambda\sum\limits_{k=1}^{2}\left[T_k^{(1_1)} + T_k^{(1_2)} + T_k^{(2)}\right]}{2 + \lambda\sum\limits_{k=1}^{2}\left[T_k^{(1_1)} + T_k^{(1_2)} + T_k^{(2)}\right]};$$

$$T(E_2) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2}\left[T_k^{(1_1)} + T_k^{(1_2)} + T_k^{(2)}\right]}{\sum\limits_{k=1}^{2}\left[T_k^{(1_1)} + T_k^{(1_2)} + T_k^{(2)}\right]}. \tag{6}$$

В случае однородной системы обслуживания последние формулы принимают вид

$$T(E_1) = \frac{\Lambda}{\lambda(1+\Lambda)};\ T(E_2) = \frac{\Lambda}{2\lambda}.$$

Замечание. С помощью изложенной методики можно найти стационарные характеристики и других физических состояний системы. Так, например, финальная вероятность того, что первый канал обслуживает заявку, а второй – восстанавливается и заявка обслуживается за счет временного резерва, вычисляется по формуле

$$p_{1_1 1_2}^{*} = \frac{T_1^{(1_1)}T_2^{(1_2)}}{2[E\beta]^2 + E\beta\sum\limits_{k=1}^{2}\left[T_k^{(1_1)} + T_k^{(1_2)} + T_k^{(2)}\right] + \prod\limits_{k=1}^{2}\left[T_k^{(1_1)} + T_k^{(1_2)} + T_k^{(2)}\right]}.$$

При этом среднее стационарное время пребывания системы в этом состоянии определяется выражением

$$T(E_{1_1 1_2}) = \frac{T_1^{(1_1)}T_2^{(1_2)}}{T_2^{(1_2)} + T_2^{(1_2)}\int\limits_0^\infty f_1(x)H_1^{(1)}(x)dx + T_1^{(1_1)}\int\limits_0^\infty f_2(x)H_2^{(2)}(x)dx}.$$

Стационарные характеристики для системы $M/M/2/0$

В качестве частного случая рассмотрим систему обслуживания $M/M/2/0$. Пусть время обслуживания заявки k-м каналом ($k=1,2$) имеет плотность $f_k(t)=\mu_k e^{-\mu_k t}$; время γ_k безотказной работы канала – плотность $\varphi_k(t)=\eta_k e^{-\eta_k t}$; время σ_k восстановления канала – плотность $\psi_k(t)=\nu_k e^{-\nu_k t}$; резерв времени ξ_k – плотность $r_k(t)=\kappa_k e^{-\kappa_k t}$.

Тогда в формулах (2) и (6) для определения финальных вероятностей и средних стационарных времен пребывания в состояниях выражение (3) принимает вид

$$T_k^{(1_1)}+T_k^{(1_2)}+T_k^{(2)}=\frac{(\mu_k+\nu_k+\kappa_k)(\nu_k+\eta_k)}{\nu_k[\mu_k{}^2+\mu_k(\nu_k+\eta_k+\kappa_k)+\eta_k\kappa_k]}.$$

Заметим, что в частном случае, когда в системе отсутствует временной резерв ($\kappa_k\to\infty$), формулы для вычисления финальных вероятностей совпадают с известными формулами работы [7].

Для ненадежной системы без временного резерва вероятность того, что принятая k-м каналом заявка будет обслужена, равна $\widetilde{P}_k=\frac{\mu_k}{\mu_k+\eta_k}$, а для системы с временным резервом эта же вероятность принимает значение

$$P_k=\frac{\mu_k{}^2+\mu_k(\nu_k+\eta_k+\kappa_k)}{\mu_k{}^2+\mu_k(\nu_k+\eta_k+\kappa_k)+\eta_k\kappa_k}.$$

Численный пример

Рассмотрим систему обслуживания, в которую поступает простейший поток заявок с интенсивностью $\lambda=0{,}5$ 1/мин. Все остальные случайные величины, описывающие систему, имеют распределение Эрланга, их параметры приводятся в табл. 1.

Таблица 1

Характеристики каналов обслуживания

Характеристики случайных величин	Первый канал		Второй канал	
	Порядок распределения Эрланга	Среднее значение величины, мин	Порядок распределения Эрланга	Среднее значение величины, мин
Время обслуживания заявки	2	4	2	8
Время безотказной работы	3	9	3	15
Временной резерв	2	3,33	2	4
Время восстановления	2	2,5	2	6

Результаты вычислений стационарных характеристик системы в случае наличия временного резерва по формулам (2) и (6) и без резерва времени, а также результаты сравнения этих характеристик помещены в табл. 2.

Таблица 2

Стационарные показатели системы

Состояния системы	Стационарные показатели					
	Финальные вероятности			Среднее время пребывания		
	Без резерва	С резервом	Относительная разница, %	Без резерва	С резервом	Относительная разница, %
Оба канала свободны	0,124	0,118	-4,8	2	2	0
Один канал свободен	0,376	0,370	-1,6	1,502	1,516	+0,9
Оба канала заняты	0,500	0,512	+2,4	2,662	2,770	+4,1

При наличии временного резерва финальная вероятность того, что поступившая в систему заявка будет принята к обслуживанию, равна $p_0^{\bullet} + p_1^{\bullet} = 0{,}118 + 0{,}370 = 0{,}488.$ При этом вычисленная по формуле (4) вероятность полного обслуживания заявки первым каналом равна $0{,}958$, а для второго канала – $0{,}943$. При отсутствии резерва времени эти вероятности соответственно равны $0{,}500$; $0{,}821$ и $0{,}766.$ Таким образом, наличие временного резерва в данной системе приводит к уменьшению на $2{,}4\%$ финальной вероятности принятия заявки к обслуживанию, но при этом увеличивает на $16{,}7\%$ вероятность полного обслуживания принятой заявки для первого канала и на $23{,}2\%$ – для второго.

Выводы

С помощью аппарата теории полумарковских процессов с общим фазовым пространством состояний построена математическая модель функционирования ненадежной двухканальной системы обслуживания $M/G/2/0$, в которой в случае отказа предоставляется возможность завершить обслуживание заявки за счет мгновенно пополняемого временного резерва. Найдено стационарное распределение вложенной цепи Маркова как решение системы интегральных уравнений в терминах процессов восстановлений, порожденных плотностями функций наработки на отказ, временами восстановления и временного резерва каналов. Установлены расчетные формулы для вычисления стационарных характеристик системы, с помощью которых можно оценить влияние временного резерва на финальные вероятности пребывания системы в различных физических состояниях и средние стационарные времена пребывания в этих состояниях.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Черкесов Г.Н.* Надежность аппаратно-программных комплексов: Учеб. пособие. – СПб.: Питер, 2005. – 479 с.
2. *Половко А.М., Гуров С.В.* Основы теории надежности. – 2-е изд., перераб. и доп. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 704 с.
3. *Ushakov I.A.* Probabilistic Reliability Models. – Wiley, 2012. – 244 p.
4. *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1987. – 336 с.
5. *Песчанский А.И.* Полумарковская модель ненадежной восстанавливаемой резервированной одноканальной системы обслуживания с потерями // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Технические науки. – 2017. – № 1(53). – С. 31–41.
6. *Королюк В.С., Турбин А.Ф.* Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. – К.: Наук. думка, 1982. – 236 с.
7. *Якушев Ю.Ф.* Об одной задаче обслуживания потока вызовов ненадежными приборами // Проблемы передачи информации. – 1969. – Т. V, вып. 4. – С. 84–88.

Статья поступила в редакцию 6 декабря 2017 г.

STATIONARY CHARACTERISTICS OF UNRELIABLE TWO-CHANNEL QUEUEING LOSS SYSTEM WITH IMMEDIATELY REPLENISHABLE TIME RESERVE

A.I. Peschansky

Sevastopol State University
33, Universitetskaya st., Sevastopol, 299053, Russian Federation

E-mail: peschansky_sntu@mail.ru

Abstract. *The object of research is a two-channel unreliable queueing loss system. The incoming flow of requests is considered to be simplest. The rest of random variables, describing the system operation, are general ones. During request service the failure of channel can occur. In this case, the service goes on by means of random time reserve. Time reserve can be enough to complete service or to restore the channel. In the latter case, request service by the channel goes on. In case of short reserve, the request is lost. By means of the apparatus of theory of semi-Markov processes with discrete-continuous states mathematical model of the queuing system is built. Final probabilities of different physical states and average stationary sojourn times in these states are obtained.*

Keywords: *unreliable two-channel queueing system, semi-Markov process with a discrete-continuous phase state space, stationary distribution of the embedded Markov chain, final probabilities of states, average stationary sojourn time in states.*

Aleksey I. Peschansky (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.