

УДК 332.055.2/330.46

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ СОГЛАСОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПРОЦЕССА С РЕГИОНАЛЬНЫМ РЫНКОМ

А.М. Пищухин

Оренбургский государственный университет
Россия, 460018, г. Оренбург, пр. Победы, 13

***Аннотация.** Рынок можно считать самым ярким представителем стохастических процессов. Но и производство продукции тоже нельзя считать детерминированным. Следовательно, при управлении предприятием необходимо добиваться согласования двух стохастических процессов. В данном исследовании была выбрана модель поведения рынка и производственного процесса, подчиняющаяся уравнению Колмогорова. Далее в работе поставлен вопрос: как лучше управлять производством – плавно разгоняя и замораживая объемы производства или, в соответствии с классическим правилом «время – деньги», применяя максимально быстрое торможение и ускорение? В итоге показано, что для продукта с длинным производственным циклом наибольшей эффективностью обладает оптимальное управление, основанное на методе Эйлера – Лагранжа, а если производственный цикл короткий, то необходимо управление с максимальным приложением управляющих воздействий.*

***Ключевые слова:** следящее управление, уравнение Колмогорова, стохастический рыночный процесс, стохастичность производства продукции, согласование стохастических процессов, метод Летова, метод Эйлера – Лагранжа.*

Введение

Согласованность составляющих является важнейшим условием высокой эффективности любой системы [1]. Поскольку предприятие производит продукцию с ориентацией на рынок, согласованность системы «предприятие – рынок» должна быть как можно выше. И в первую очередь этот тезис относится к объемам производства продукции на предприятии и спросу на данную продукцию на рынке. За формированием цен и объемами продаж предприятие следит особенно тщательно [2–5]. Очевидно, что и процесс формирования цены на рынке, и объем производимой продукции на предприятии из-за влияния большого количества случайных факторов носят стохастический характер. Естественно, при этом говорить о согласованности необходимо в вероятностном смысле и применять для описания процессов соответствующий математический аппарат.

Постановка задачи и метод ее аналитического решения

Вероятностное описание рыночных процессов встречается в литературе довольно часто. В работе [6] поведение рыночной среды описывается с помощью теории систем массового обслуживания на основе уравнений Колмогорова. Для повышения степени согласованности инерционных рыночных процессов и процессов производства необходимо прогнозирование, поэтому вероятностная модель на основе уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова рассматривалась как

Пищухин Александр Михайлович (д.т.н.), профессор.

инструмент прогнозирования [7]. Прогнозирование – лишь первая функция управления, понятно, что исследуемая согласованность напрямую зависит от эффективности процессов управления, которая также оценивалась на основе уравнения Колмогорова [8]. Марковские модели применялись при исследовании тайваньских бизнес-циклов в [9] и в управлении цепями поставок [10]. В последней работе спрос был марковским процессом, а объемы заказов и цена реализации товара – управляющими воздействиями. В работе [11] марковская модель использовалась для прогнозирования момента наступления повышенного спроса на кредиты. В [12] марковская модель применена необычным образом – для анализа долгосрочных свойств акций и дивидендов в США. Работа [13] посвящена исследованию стохастического процесса формирования цены на основе цепей Маркова. Работа [14] посвящена глубокому исследованию потоков в современной электронной торговле на основе высокочастотных баз данных. И, конечно, вероятностный подход в самом чистом виде реализуется в имитационных моделях [15]. Подводя итог проведенному анализу, можно утверждать, что вероятностные инструменты являются часто и широко используемыми в экономических исследованиях, а марковские модели, несмотря на первое приближение, позволяют выявлять основные тенденции экономических явлений.

Пусть вероятность превышения рыночной цены на продукцию над себестоимостью ее изготовления на предприятии имеет марковскую природу и описывается уравнением Колмогорова [16]:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial t} = -a_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + b_1 \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где ω_1 – плотность описанной выше вероятности, зависящая от рыночного спроса на продукцию x ;

a_1 – коэффициент сноса;

b_1 – коэффициент диффузии.

Уравнение (1) может быть решено с использованием функции Грина [17]. Однако сначала его необходимо привести к каноническому виду

$$\frac{\partial w}{\partial t} = b_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Осуществляется это с помощью подстановки:

$$\omega_1 = e^{\mu x + \lambda t} \cdot w, \text{ при } \mu = \frac{a_1}{2b_1}, \lambda = -\frac{a_1^2}{4b_1} \quad (3)$$

при начальном условии

$$w(x, 0) = \varphi(x), 0 < x < \infty \quad (4)$$

и граничном условии

$$w(0, t) = 0. \quad (5)$$

Тогда решение уравнения (1) представляется в виде [13, с. 236]

$$\omega_1 = e^{\frac{a_1}{2b_1}x - \frac{a_1^2}{4b_1}t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{b_1 t}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4b_1 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4b_1 t}} \right\} \varphi(\xi) d\xi. \quad (6)$$

Готовность предприятия, изготавливающего эту продукцию, должна подчиняться похожему на (1) уравнению с добавлением в правой части управляющего воздействия $u(x,t)$, обеспечивая функцию слежения за рынком, то есть превращая наше управление в следящее [18, 19]. При этом плотность вероятности ω_2 отражает готовность производства к удовлетворению возникшего спроса:

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial t} = -a_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + b_2 \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x^2} + u(x,t). \quad (7)$$

Это уравнение является неоднородным, его решение должно рассматриваться при выполнении начальных условий

$$\omega_2(x,0) = 0; \omega_2(0,t) = 0. \quad (8)$$

Вводя в данном случае l – границу возможностей предприятия по обеспечению спроса на его продукцию и t_f – конечное время управления, получим решение с учетом (3), которое записывается в виде

$$\omega_2 = e^{\frac{a_2}{2b_2}x - \frac{a_2^2}{4b_2}t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{t_f} \int_0^l \frac{1}{\sqrt{b_1(t-\tau)}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4b_1(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4b_1(t-\tau)}} \right\} u(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (9)$$

Поставим задачу: управлять предприятием так, чтобы возможности выпуска продукции как можно ближе соответствовали благоприятному периоду превышения спроса цены на рынке над себестоимостью изготовления продукции на предприятии. Такой подход доминирует при выборе различных стратегий управления [20–22].

Для нахождения соответствующих управляющих воздействий воспользуемся теорией аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР), предложенной профессором Летовым А.М. [23, 24]. В этой теории функционал строится в виде суммы квадратов потерь от разности двух вероятностей и затрат на повышение готовности производственной системы к обеспечению образовавшегося спроса:

$$F = \int_0^{t_f} [q(\omega_1 - \omega_2)^2 + u^2] dt, \quad (10)$$

где q – размерный весовой коэффициент.

Применим для решения данной задачи метод Эйлера – Лагранжа. Построим лагранжиан

$$L = q(\omega_1 - \omega_2)^2 + u^2 + \psi_1 \left(-a \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{b}{2} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \omega_1}{\partial t} \right) + \psi_2 \left(-a \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{b}{2} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x^2} + u - \frac{\partial \omega_2}{\partial t} \right). \quad (11)$$

Из него можно выделить гамильтониан

$$H = q(\omega_1 - \omega_2)^2 + u^2 + \psi_1 \left(-a_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + b_1 \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} \right) + \psi_2 \left(-a_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + b_2 \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x^2} + u \right). \quad (12)$$

Составляем сопряженные уравнения и уравнение Эйлера для u :

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial \omega_1} = -2q(\omega_1 - \omega_2) \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \omega_2} = 2q(\omega_1 - \omega_2) \\ \frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \psi_2 = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Подстановка ψ_2 из третьего уравнения этой системы во второе дает:

$$\omega_2 = \frac{1}{q} \frac{\partial u}{\partial t} + \omega_1 \quad (14)$$

Введем обозначение [25]:

$$s = \omega_1 - \omega_2 \quad (15)$$

Тогда (14) преобразуется следующим образом:

$$s = -\frac{1}{q} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (16)$$

Вычтем из уравнения (1) уравнение (7):

$$\frac{\partial(\omega_1 - \omega_2)}{\partial t} = -a_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + b_1 \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x} - b_2 \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x^2} - u \quad (17)$$

Преобразуем его к разности $\omega_1 - \omega_2$

$$\frac{\partial(\omega_1 - \omega_2)}{\partial t} = -(a_1 - a_2 + a_2) \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + (b_1 - b_2 + b_2) \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x} - b_2 \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x^2} - u. \quad (18)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\omega_1 - \omega_2)}{\partial t} &= -a_2 \frac{\partial(\omega_1 - \omega_2)}{\partial x} + b_2 \frac{\partial^2(\omega_1 - \omega_2)}{\partial x^2} - \\ &- (a_1 - a_2) \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + (b_1 - b_2) \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} - u. \end{aligned} \quad (19)$$

Воспользовавшись теперь (15) и (16), получим

$$-\frac{1}{q} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{a_2}{q} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{b_2}{q} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + u = -(a_1 - a_2) \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + (b_1 - b_2) \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} \quad (20)$$

Если $a_2 = a_1$ и $b_2 = b_1$, то правая часть обнулится. В противном случае имеем неоднородное дифференциальное уравнение третьего порядка.

Найдем решение соответствующего однородного уравнения:

$$-\frac{1}{q} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{a_2}{q} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{b_2}{q} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + u = 0 \quad (21)$$

Воспользуемся методом разделения переменных, для чего представим управляющее воздействие в виде произведения двух функций:

$$u = p(x) \cdot v(t) \quad (22)$$

Подставляя это выражение в (21), получим:

$$\frac{1}{q} p \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{a_2}{q} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{b_2}{q} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} - pv = 0 \quad (23)$$

Разделив обе части (23) на $p \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$, имеем

$$\frac{1}{q} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{a_2}{qp} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{b_2}{qp} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{v}{\frac{\partial v}{\partial t}} = 0 \quad (24)$$

Разделяем переменные:

$$\frac{1}{q} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{v}{\frac{\partial v}{\partial t}} = -\frac{a_2}{qp} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{b_2}{qp} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = M \quad (25)$$

Таким образом, решение уравнения (21) сводится к решению системы двух уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - Mq \cdot \frac{\partial v}{\partial t} - qv = 0; \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{a_2}{b_2} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{Mq}{b_2} \cdot p = 0. \end{cases} \quad (26)$$

Эти уравнения имеют решения следующего вида:

$$\begin{cases} v = C_1 \exp \frac{Mq + \sqrt{M^2 q^2 + 4q}}{2} t + C_2 \exp \frac{Mq - \sqrt{M^2 q^2 + 4q}}{2} t; \\ p = C_3 \exp \frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + 4Mqb_2}}{2b_2} x + C_4 \exp \frac{a_2 - \sqrt{a_2^2 + 4Mqb_2}}{2b_2} x. \end{cases} \quad (27)$$

Что касается частного решения (20), то оно ищется в виде правой части:

$$u_p = -(a_1 - a_2) \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + (b_1 - b_2) \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} \quad (28)$$

Ввиду сложности нахождения аналитического решения поступим чуть по-другому. Это выражение показывает, что часть ресурсов управляющих воздействий необходимо направить на выравнивание коэффициентов сноса и диффузии

у процессов формирования цены на рынке и обеспечения готовности предприятия к выполнению запросов рынка. Такая задача в первую очередь должна ставиться перед маркетинговой службой предприятия. Положив здесь, что поставленная задача успешно решается, примем указанные коэффициенты одинаковыми, тогда решение примет вид

$$u(x,t) = \left(C_1 e^{\frac{Mq + \sqrt{M^2 q^2 + 4q}}{2} t} + C_2 e^{\frac{Mq - \sqrt{M^2 q^2 + 4q}}{2} t} \right) \times \left(C_3 e^{\frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + 4Mqb_2}}{2b_2} x} + C_4 e^{\frac{a_2 - \sqrt{a_2^2 + 4Mqb_2}}{2b_2} x} \right). \quad (29)$$

Для нахождения констант интегрирования используем следующие начальные и граничные условия:

$$u=0 \text{ при } t=0; u=0 \text{ при } x=0; s=-\dot{u}=0 \text{ при } t=t_f. \quad (30)$$

В данном случае начальные и граничные условия приняты из того факта, что в начале управления управляющие воздействия не подаются, а при нулевой востребованности продукции на рынке управляющие воздействия вообще не нужны. Последнее условие следует из уравнения (16) и из соображений экономии управляющих ресурсов – то есть остановки их подачи при достижении равенства плотностей вероятностей ω_1 и ω_2 .

В результате получаем следующую систему трех уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_3 + C_4 = 0 \\ C_1 \frac{Mq + \sqrt{M^2 q^2 + 4q}}{2} e^{\frac{Mq + \sqrt{M^2 q^2 + 4q}}{2} t_f} + \\ + C_2 \frac{Mq - \sqrt{M^2 q^2 + 4q}}{2} e^{\frac{Mq - \sqrt{M^2 q^2 + 4q}}{2} t_f} = 0 \end{cases} \quad (31)$$

Из первых двух уравнений понимаем, что коэффициенты C_1, C_2 , так же как и C_3, C_4 , одинаковы по модулю и противоположны по знаку, следовательно, они могут быть вынесены в решении (22) в качестве множителей. Однако понятно, что решение дифференциального уравнения (21) может быть определено с точностью до постоянного множителя, поскольку u входит во все слагаемые, поэтому численно константы можно не определять, а находить из соображений размерности.

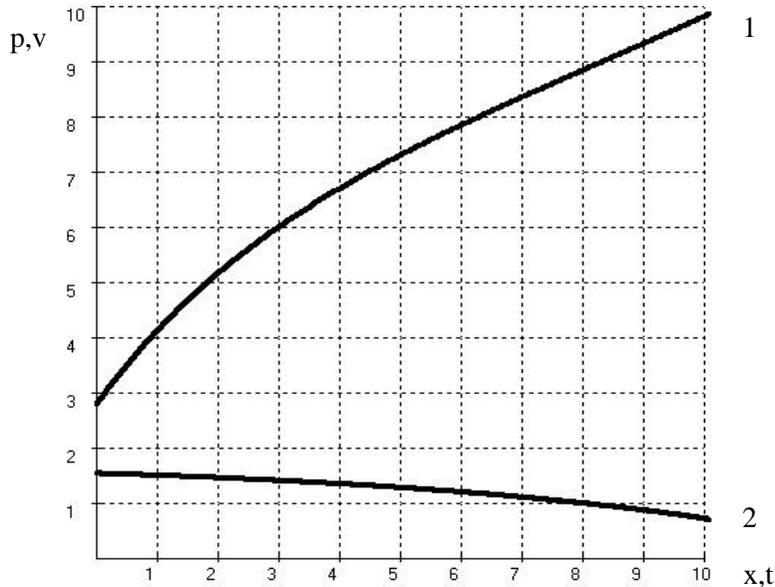
Общий ход графиков изменения составляющих управляющего воздействия представлен на рисунке. Верхний график отображает зависимость от спроса, нижний – от времени.

В последнем уравнении системы (31) два неизвестных: константа M и время управления t_f . Дополнительное уравнение можно получить, приравнявая плотности вероятностей ω_1 и ω_2 , полученные из уравнений (6) и (9) соответственно. При этом в уравнение (6) подставляются единичные начальные значения плотности

вероятностей $\varphi(x)$, а в уравнение (9) – полученное выражение управляющих воздействий (29). Для выполнения интегрирования необходимо воспользоваться формулой

$$\int e^{-\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha} + \gamma} \quad (32)$$

Бесконечные пределы в данном случае не нарушают никаких условий, так как спрос может быть только больше нуля, они даже упрощают выражения (6) и (9), оставляя в них одно слагаемое вместо двух [13].



Графики изменения составляющих управляющего воздействия:
1 – $p(x)$; 2 – $v(t)$

Равенство плотностей вероятностей дает

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{b_1 t}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4b_1 t_f}} \right\} d\xi = \\ & = C_1 C_2 \int_0^{t_f} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4b_1 t_f}} \right\} \left(e^{\frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + 4Mqb_2} \xi}{2b_2}} + e^{\frac{a_2 - \sqrt{a_2^2 + 4Mqb_2} \xi}{2b_2}} \right) d\xi \times \\ & \times \left(e^{\frac{Mq + \sqrt{M^2 q^2 + 4q}}{2} t} + e^{\frac{Mq - \sqrt{M^2 q^2 + 4q}}{2} t} \right) dt \end{aligned} \quad (33)$$

Приводим подынтегральное выражение к виду (32):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{b_1 t}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4b_1 t_f}} \right\} d\xi = \\
& = C_1 C_3 \int_0^{t_f} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi b_1 \tau}} \left\{ e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4b_1 \tau} + \frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + 4Mqb_2}}{2b_2} (\xi-x) + \frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + 4Mqb_2}}{2b_2} x} \right. \\
& \left. + e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4b_1 t_f} + \frac{a_2 - \sqrt{a_2^2 + 4Mqb_2}}{2b_2} (\xi-x) + \frac{a_2 - \sqrt{a_2^2 + 4Mqb_2}}{2b_2} x} \right\} d\xi \times \\
& \times \left(e^{\frac{Mq + \sqrt{M^2 q^2 + 4q}}{2} \tau} + e^{\frac{Mq - \sqrt{M^2 q^2 + 4q}}{2} \tau} \right) d\tau
\end{aligned}$$

После выполнения интегрирования в бесконечных пределах по спросу, принятых для упрощения вычислений, затем по времени, преобразований и подключения третьего уравнения из (31) система приобретает вид

$$\begin{cases}
\left(Mq + \sqrt{M^2 q^2 + 4q} \right) \exp\left(\sqrt{M^2 q^2 + 4q} \right) t_f + Mq - \sqrt{M^2 q^2 + 4q} = 0 \\
\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{b_1 t_f}} \right) = C_1 C_3 \cdot \\
\left(\frac{e^{y_3 x}}{b_1 y_3^2 + y_1} e^{(b_1 y_3^2 + y_1) t_f} + \frac{e^{y_4 x}}{b_1 y_4^2 + y_1} e^{(b_1 y_4^2 + y_1) t_f} + \frac{e^{y_3 x}}{b_1 y_3^2 + y_2} e^{(b_1 y_3^2 + y_2) t_f} + \right. \\
\left. \frac{e^{y_4 x}}{b_1 y_4^2 + y_2} e^{(b_1 y_4^2 + y_2) t_f} - \frac{e^{y_3 x}}{b_1 y_3^2 + y_1} - \frac{e^{y_4 x}}{b_1 y_4^2 + y_1} - \frac{e^{y_3 x}}{b_1 y_3^2 + y_2} - \frac{e^{y_4 x}}{b_1 y_4^2 + y_2} \right)
\end{cases} \quad (34)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{Mq + \sqrt{M^2 q^2 + 4q}}{2}; y_2 = \frac{Mq - \sqrt{M^2 q^2 + 4q}}{2}; y_3 = \frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + 4Mqb_2}}{2b_2}; \\
y_4 &= \frac{a_2 - \sqrt{a_2^2 + 4Mqb_2}}{2b_2}.
\end{aligned}$$

$$\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{b_1 t_f}} \right) - \text{интеграл ошибок.}$$

Решим теперь эту задачу на основе принципа максимума Понтрягина. Для этого потребуем, чтобы управляющее воздействие по модулю не превосходило a , и при этом условии максимизируем гамильтониан (12):

$$\max_{-a \leq u \leq a} \left\{ \begin{aligned} & q(\omega_1 - \omega_2)^2 + u^2 + \psi_1 \left(-a_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + b_1 \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} \right) + \\ & + \psi_2 \left(-a_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + b_2 \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x^2} + u \right) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

или

$$\max_{-a \leq u \leq a} \{ u^2 + \psi_2 u \} \quad (36)$$

Очевидно, что максимум обуславливается вторым слагаемым. Первый его сомножитель находим из второго уравнения системы (13):

$$\psi_2 = \int_0^t 2q(\omega_1 - \omega_2) dt \quad (37)$$

Если ограничиться управлением до первого уравнивания плотностей вероятностей, то знак управляющих воздействий меняться не будет. Общее время управления можно определить аналогично предыдущему расчету, приравнявая плотности вероятностей ω_1 и ω_2 , полученные из уравнений (6) и (9) соответственно. При этом в уравнение (6) так же подставляются единичные начальные значения плотности вероятностей $\varphi(x)$, а в уравнение (9) – максимальное значение управляющих воздействий a . Интегрирование приводит к следующему результату:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi \left(\frac{x}{2\sqrt{b_1 t_f}} \right) = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \Phi \left(\frac{x}{2\sqrt{b_1 t_f}} \right) \quad (38)$$

Время управления t_f можно определить, решая это трансцендентное уравнение численным методом.

Выявление критерия сравнения

Из рассмотренной теории следует, что существует два способа управления предприятием. Первый заключается в нахождении рыночного тренда в плотности вероятности превышения цены на продукт себестоимости его изготовления и достижении плотностью вероятности, выражающей готовность предприятия к производству уровня этого тренда за счет экспоненциального (плавного) управляющего воздействия. Второй предусматривает более острое реагирование на отклонение производства от рынка и предусматривает максимальное управляющее воздействие, прилагаемое для разгона или торможения производства в зависимости от соотношения между рассмотренными выше вероятностями.

Затраты на управление можно оценить виртуальной работой [25]:

$$A = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_f} \int_0^l u(x,t) e^{-\frac{(x-x_m)^2}{2\sigma^2}} dx dt. \quad (39)$$

Гауссиан в этой формуле отражает плотность вероятности спроса на продукцию (чаще всего спрос на рынке равен математическому ожиданию x_m и, следовательно, при таком значении виртуальная работа чаще осуществляется во времени). Считая виртуальную работу одинаковой при двух рассмотренных спо-

собах управления (а также учитывая тот факт, что при управлении по принципу максимума происходит переключение управления с $+a$ на $-a$ и наоборот, поэтому берем a по модулю), получим

$$\begin{aligned}
 & \frac{|a|t_1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{(x-x_m)^2}{2\sigma^2}} dx = \\
 & = \int_0^\infty \left(C_3 e^{\frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + 4Mqb_2}}{2b_2} x} + C_4 e^{\frac{a_2 - \sqrt{a_2^2 + 4Mqb_2}}{2b_2} x} \right) e^{-\frac{(x-x_m)^2}{2\sigma^2}} dx \times \\
 & \times \int_0^{t_2} \left(C_1 e^{\frac{Mq + \sqrt{M^2q^2 + 4q}}{2} t} + C_2 e^{\frac{Mq - \sqrt{M^2q^2 + 4q}}{2} t} \right) dt
 \end{aligned} \tag{40}$$

Здесь верхний предел спроса взят бесконечным, чтобы воспользоваться интегралом Эйлера – Пуассона (32), а конечное время управления обозначено соответственно индексами: t_1 для решения с помощью принципа максимума, t_2 для решения методом Эйлера – Лагранжа. После интегрирования получаем

$$\begin{aligned}
 \frac{|a|\sigma t_1}{\sqrt{2}} = & C_1 C_2 \sqrt{2\pi\sigma^2} \left(e^{\frac{\sigma^2(a_2 + \sqrt{a_2^2 + 4Mqb_2})^2}{2b_2}} + e^{\frac{\sigma^2(a_2 - \sqrt{a_2^2 + 4Mqb_2})^2}{2b_2}} \right) \\
 & \left(\frac{Mq - \sqrt{M^2q^2 + 4q}}{q} e^{\frac{Mq + \sqrt{M^2q^2 + 4q}}{2} t_2} + \right. \\
 & \left. + \frac{Mq + \sqrt{M^2q^2 + 4q}}{q} e^{\frac{Mq - \sqrt{M^2q^2 + 4q}}{2} t_2} - 2M \right)
 \end{aligned} \tag{41}$$

Это выражение задает соотношение между величиной управляющих воздействий при применении принципа максимума и константами интегрирования в методе Эйлера – Лагранжа, то есть при двух способах управления. Теперь можно найти разность между интегралами от плотностей вероятности рынка и предприятия и оценить тем самым разность в объемах продаж продукции при двух способах управления:

$$\Delta V = \int_0^{t_1} 2q\{\omega_1 - \omega_2(u_1)\}dt - \int_0^{t_2} 2q\{\omega_1 - \omega_2(u_2)\}dt \tag{42}$$

Среднюю интенсивность проведения управляющих воздействий можно выразить по формуле

$$I = \frac{A}{t_f} \tag{43}$$

В данном случае она будет выше при применении в управлении принципа максимума Понтрягина во столько раз, во сколько отличаются времена управления t_1 и t_2 . Понятно, что на поддержание более высокой интенсивности придется прикладывать дополнительные усилия и, соответственно, будут присутствовать дополнительные затраты, которые можно считать в первом приближении пропорциональными интенсивности. С другой стороны, важен масштаб производства, на котором необходимо проявить эту интенсивность. Данное исследование направлено на согласование масштаба производства со спросом. Важно также, как спрос может входить в формулу. Учитывая, что при нулевом спросе интенсивность управляющих воздействий не к чему прикладывать – производства нет, будем рассматривать их произведение

$$Z(I, x) = \alpha Ix \quad (44)$$

Здесь α – коэффициент, уравнивающий размерность.

Сравнивая теперь эти затраты с полученной прибылью, зависящей от объема ΔV , определенного по формуле (40), и цены на данный вид продукции, можно по знаку разности между ними выбрать способ управления производством.

Данные и метод

Для практического сравнения рассмотренных способов управления использовались данные предприятия АО «Новосергиевский маслозавод».

Продукция Новосергиевского маслозавода уже долгое время пользуется спросом у жителей Оренбурга и области. Ассортимент включает масло сливочное, молоко и сливки, кисломолочную продукцию, пробиотические продукты, творог и сметану, масло топленое, сывороточные напитки и сыворотку, минеральную воду и газированные напитки, подсолнечное масло и сухое молоко. Как видим, ассортимент довольно разнообразен и позволяет путем быстрого варьирования объемов получать значительную экономию за счет соответствия спросу, учитывая дополнительно, что основная масса продукции – скоропортящаяся.

В качестве продуктов для исследования эффективности разработанной методики были выбраны масло сливочное и молоко, проводились наблюдения за работой одной торговой точки. Полученные результаты сведены в таблицу.

Показатели эффективности разработанной методики

Показатель	Молоко	Масло
Цена, руб.	38	81
Суточный спрос, кг.	75	40
Время окончания управления t_1 (ч), формула (37)	3	48
Время окончания управления t_2 (ч), формула (32)	5	72
ΔV , формула (40)	12	25
Разность затрат $\Delta Z(I, x)$ (руб), формула (42)	612,5	648
Знак разности дохода и затрат	–	+

Результаты и обсуждение

Полученные результаты показывают, что для продукта с длинным производственным циклом (масло) наибольшей эффективностью обладает оптимальное управление, основанное на методе Эйлера – Лагранжа, а если производственный

цикл короткий, то необходимо управление с максимальным приложением управляющих воздействий, ускоряющих или замедляющих производство, то есть основанное на принципе максимума Понтрягина. Предложенная методика различила эти два случая даже при грубой оценке, что и доказывает ее работоспособность.

Заключение

Таким образом, вероятностная модель согласования производственного процесса с региональным рынком позволяет организовать оптимальное управление предприятием. При этом важно, какую цель мы преследуем: максимально быстро удовлетворить рыночную потребность и получить доход от дополнительной продажи продукции либо максимально сэкономить на производственных расходах в переходных моментах. Как показало исследование, решение этого вопроса связано с длительностью производственного цикла.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пищухин А.М. Согласованность составляющих системы и методы ее достижения // Вестник ОГУ. – 1999. – № 1. – С. 87–90.
2. Kolassa S. Evaluating predictive count data distributions in retail sales forecasting // International Journal of Forecasting. – 2016. – Vol. 32. – № 3. – P. 788–803.
3. Merigó J.M., Palacios-Marqués D., Ribeiro-Navarrete B. Aggregation systems for sales forecasting // Journal of Business Research. – 2015. – Vol. 68. – № 11. – P. 2299–2304.
4. Zhi-Ping Fan, Yu-Jie Che, Zhen-Yu Chen. Product sales forecasting using online reviews and historical sales data: A method combining the Bass model and sentiment analysis // Journal of Business Research. – 2017. – Vol. 74. – P. 90–100.
5. Пищухин А.М., Чернов Ф.В. Метод стохастического прогнозирования благоприятных периодов реализации продукции // Фундаментальные исследования. – 2017. – № 6. – С. 165–169.
6. Лебедева А.Л., Ермилов М.М. Применение теории массового обслуживания в исследовании рынка // Фундаментальные исследования кооперативного сектора экономики. – 2014. – № 4. – С. 35–39.
7. Лыков И.А., Быстрой Г.П. Расширенный многофакторный мультифрактальный метод социально-экономического прогнозирования // Вестник кибернетики. – 2015. – № 2(18). – С. 72–89.
8. Бочков А.П. Эффективность автоматизированных систем управления экономическими объектами // Цифровая экономика и «Индустрия 4.0»: проблемы и перспективы: научно-практическая конференция. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2017. – С. 628.
9. Kuan Chung-Ming. Markov switching model. Quantile, 2013. – № 11. – pp. 13–39.
10. Соколов Г., Волобуева Е. Марковская модель оптимизации процесса поставки товаров с одношаговой потребительской ценностью // Логистика. – 2012. – № 11. – С. 46–49.
11. Безбородова А. Кредитный бум: марковские модели с переключением режимов // Банковский вестник. – 2015. – № 9. – С. 10–17.
12. Psaradakis Z. On Markov Error Correction Models, with an Application to Stock Prices and Dividends / Z. Psaradakis, M. Sola, F. Spagnolo // Journal of Applied Econometrics. – 2004. – № 19 (1). – P. 6988.
13. Бурмистров А.В., Новиков А.В. Стохастическая кинетическая модель формирования цены // Международный научно-исследовательский журнал. – 2017. – № 07(61). – Ч. 3. – С. 107–112.
14. Черток А.В. Моделирование потоков заявок на финансовых рынках с помощью обобщенных процессов риска: Дис. ... канд. ф-м. наук. – М., 2015. – 113 с.
15. Снетков Н.Н. Имитационное моделирование экономических процессов: Учеб.-практ. пособие. – М.: Изд. Центр ЕАОИ, 2008. – 228 с.
16. Волков И.К., Зув С.М., Цветкова Г.М. Случайные процессы. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 448 с.
17. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
18. Шпилова С.С. Применение следящих систем к решению задач управления запасами // Молодой ученый. – 2015. – № 10. – С. 864–867.
19. Пищухин А.М. Управление предприятием на основе прогноза в ассортиментном пространстве // Экономика региона. – 2017. – Т. 13. – № 1. – С. 216–225. DOI 10.17059/2017-1-20.

20. *Higgins J.M.* Organizational Policy and Strategic Management: Text and Cases. 2nded. – Chicago: The Drydent Press, 1983, 721 p.
21. *Schendel D.E., Hatter K.J.* Business Policy or Strategic Management: A Broader View for an Emerging Discipline. Academy of Management Proceeding. August, 1972, p. 4.
22. *Tesfatsion L., Judd K.L.* Handbook of Computational Economics: Volume 2, Agent-Based Computational Economics. Amsterdam, The Netherlands: Handbook in Economics Series, 2006, p. 829–1660.
23. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов I-IV // Автоматика и телемеханика. – 1960, № 4, с. 436–441; № 5, с. 561–568; № 6, с. 661–665; 1961, № 4, с. 425–435.
24. *Александров А.Г.* Оптимальные и адаптивные системы. – М.: Высш. шк., 1989. – 263 с.
25. *Пищухина Т.А.* Методы и средства выбора и оценки эффективности технического оснащения технологических процессов: дис. ... канд. техн. наук. – Краснодар, 2007. – С. 37–39.

Статья поступила в редакцию 18 января 2018 г.

PROBABILISTIC MODEL OF HARMONIZATION OF THE PRODUCTION PROCESS WITH THE REGIONAL MARKET

A.M. Pishchukhin

Orenburg State University
13, Victory avenue, Orenburg, 460018, Russian Federation

Abstract. *The market can be considered the brightest representative of stochastic processes. But the production of products also cannot be considered deterministic. Therefore, when managing an enterprise, it is necessary to strive for the harmonization of two stochastic processes. The model of market behavior and the production process was chosen that obeys the Kolmogorov equation. Then, the question was raised - how to manage production: to accelerate or freeze production volumes smoothly, or to apply the quickest possible braking and accelerating of production, following the classical rule - time is money. Using the Euler-Lagrange method, it is shown that the matching of stochastic processes can be reduced in this formulation to a third-order differential equation from the control action in the event of a smooth change. In the case of stepwise application of control actions, the Pontryagin maximum principle is applied to solve the optimal control problem. On the basis of the virtual work concept of control actions, as the work is performed in a larger volume with the most frequently encountered values of market demand, these two methods of control are given to the possibility of comparing the results obtained. As a result, it is shown that for a product with a long production cycle, optimal control, based on the Euler-Lagrange method, has the greatest efficiency, and if the production cycle is short, then control is needed with maximum application of control actions that accelerate or slow down production on the Pontryagin maximum principle. The technique proposed distinguished these two cases even with a rough estimate, which proves its efficiency.*

Keywords: *follower management, Kolmogorov equation, discontinuous control, virtual operation of control actions, stochastic market process, production stochasticity, agreement of stochastic processes, Letov method, quadratic functional, Euler-Lagrange method.*

REFERENCES

1. *Pishchukhin A.M.* Consistency of the components of the system and the methods for achieving it. Vestnik OGU. – 1999 (no. 1), pages 87–90.
2. *Kolassa S.* Evaluating predictive count data distributions in retail sales forecasting. International Journal of Forecasting. – 2016, vol. 32 (no. 3), pages 788–803.
3. *Merigó J.M., Palacios-Marqués D., Ribeiro-Navarrete B.* Aggregation systems for sales forecasting. Journal of Business Research. – 2015, vol. 68 (no. 11), pages 2299–2304.

A.M. Pishchukhin (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.

4. *Zhi-Ping Fan, Yu-Jie Che, Zhen-Yu Chen.* Product sales forecasting using online reviews and historical sales data: A method combining the Bass model and sentiment analysis. *Journal of Business Research.* – 2017, vol. 74, pages 90–100.
5. *Pishchukhin A.M., Chernov F.V.* The method of stochastic forecasting of favorable periods for sales of products. *Fundamental research.* – 2017 (no. 6), pages 165–169.
6. *Lebedeva A.L., Ermilov M.M.* Application of the theory of mass service in the market research. *Fundamental research of the cooperative sector of the economy.* – 2014 (no. 4), pages 35–39.
7. *Lykov I.A., Bystray G.P.* Advanced multifactorial multifractal method of socio-economic forecasting. *Bulletin of Cybernetics.* – 2015 (no. 2 (18)), pages 72–89.
8. *Bochkov A.* Efficiency of automated control systems for economic objects. *Digital economy and "Industry 4.0": problems and perspectives: scientific and practical conference.* – 2017, SPb.: Publishing house Polytechnic. University, page 628.
9. *Kuan Chung-Ming.* Markov switching model. *Quantile.* – 2013 (no. 11), pages 13–39.
10. *Sokolov G., Volobueva E.* Markovskaya model of optimization of the process of supply of goods with a one-step consumer value. *Logistics.* – 2012 (no.11), pages 46–49.
11. *Bezborodova A.* Credit boom: Markov models with switching modes. *Bank Gazette.* – 2015 (no. 9), pages 10–17.
12. *Psaradakis Z., Sola M., Spagnolo F.* On Markov Error Correction Models, with an Application to Stock Prices and Dividends. *Journal of Applied Econometrics.* – 2004 (no. 19 (1)), page 6988.
13. *Burmistrov A.V., Novikov A.V.* Stochastic kinetic model of price formation. *International scientific-research journal.* – 2017 (no. 07 (61)), Part 3, pages 107–112.
14. *Chertok A.V.* Modeling of flows of applications in financial markets with the help of generalized risk processes. *Dis. ... cand. f/m nauk.* – 2015, Moscow, pages 113.
15. *Snetkov N.N.* Simulation of economic processes. *Uch. practical guide.* – 2008. – M.: Izd. The EAOI Center, pages 228.
16. *Volkov I.K., Zuev S.M., Tsvetkova G.M.* Random processes. – 2006, Publishing house of the MSTU, N.E. Bauman, pages 448.
17. *Tikhonov A.N., Samarskii A.A.* *Equations of Mathematical Physics.* – 1977. – M.: Nauka, pages 736.
18. *Shipilova S.S.* The application of tracking systems to the solution of problems of inventory management. *Young scientist.* – 2015 (no. 10), pages 864–867.
19. *Pishukhin A.M.* Enterprise management based on the forecast in the assortment space. *Economy of the region.* – 2017, vol. 13 (no. 1), pages 216–225. DOI 10.17059/2017-1-20.
20. *Higgins J.M.* *Organizational Policy and Strategic Management: Text and Cases.* 2nded. – 1983, Chicago: The Drydent Press, 721 p.
21. *Schendel D.E., Hatter K.J.* *Business Policy or Strategic Management: A Broader View for an Emerging Discipline.* – 1972, Academy of Management Proceeding, August, pages 4.
22. *Tesfatsion L., Judd K.L.* *Handbook of Computational Economics: 2006, Volume 2, Agent-Based Computational Economics.* Amsterdam, The Netherlands: Handbook in Economics Series, pages 829–1660.
23. *Letov A.M.* Analytical design of regulators I–IV. *Automation and telemechanics.* – 1960 (no. 4), pages 436–441; (no. 5), pages 561–568; (no. 6), pages 661–665; 1961, (no. 4), pages 425–435.
24. *Alexandrov A.G.* *Optimal and adaptive systems.* – 1989, M.: High. Sc., pages 263.
25. *Pischukhina T.A.* Methods and means of selecting and evaluating the effectiveness of technical equipment of technological processes: *dis. ... cand. tech. sciences.* – 2007, Krasnodar, pages 37–39.