

УДК 621.391.1: 621.395

## ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ГИПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИПЕРЭРЛАНГОВСКИХ ВХОДНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В СИСТЕМАХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

*В.Н. Тарасов, Э.Г. Ахметшина, Када Отхмане*

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики  
Россия, 443010, г. Самара, ул. Л. Толстого, 23

E-mail: [veniamin\\_tarasov@mail.ru](mailto:veniamin_tarasov@mail.ru), [elyamalusha@mail.ru](mailto:elyamalusha@mail.ru), [otman2333@gmail.com](mailto:otman2333@gmail.com)

**Аннотация.** Предложено использовать в качестве входных распределений для описания систем массового обслуживания два закона распределения достаточно общего вида: гиперэкспоненциальный и гиперэрланговский с широким диапазоном изменения коэффициентов вариаций. Выявлена главная характерная черта этих законов распределений, заключающаяся в том, что они однозначно могут описываться как двумя первыми моментами, так и тремя. Предложен механизм их аппроксимации с использованием известного метода моментов как с использованием двух первых моментов, так и с использованием трех первых моментов. Использование этих законов распределений в теории массового обслуживания расширяет и дополняет известную незавершенную формулу для среднего времени ожидания для систем массового обслуживания при произвольных законах распределения интервалов входного потока требований и времени обслуживания. Полученные результаты важны для современной теории телетрафика.

**Ключевые слова:** гиперэкспоненциальный и гиперэрланговский законы распределения, системы массового обслуживания.

### Введение

Для моделирования трафика современных сетей телекоммуникаций широко используются законы распределений, такие как закон Эрланга, экспоненциальный, гиперэкспоненциальный, гиперэрланговский и др., для которых коэффициенты вариации случайных величин больше или равны 1 ( $c \geq 1$ ) или же меньше 1 ( $c < 1$ ). Коэффициент вариации, больший 1, свидетельствует о том, что вероятность появления больших значений случайной величины значительно выше, чем у классического экспоненциального распределения, а «хвост» распределения весомее. Для коэффициента вариации, меньшего 1, будет наоборот.

Как известно, например, из [1, 3], для системы массового обслуживания (СМО) с произвольными законами распределений для входного потока и времени обслуживания  $G/G/1$  среднее время ожидания в очереди определяется выражением

---

*Тарасов Вениамин Николаевич (д.т.н., проф.), заведующий кафедрой «Программное обеспечение и управление в технических системах».*  
*Ахметшина Элеонора Газинуровна, аспирантка.*  
*Када Отхмане, аспирант.*

$$\bar{W} = \frac{D_\lambda + D_\mu + (1-\rho)^2 / \lambda^2}{2(1-\rho) / \lambda} - \frac{\bar{I}^2}{2\bar{I}}, \quad (1)$$

где  $\rho$  – коэффициент загрузки системы,  $0 < \rho = \lambda/\mu < 1$ ;

$\lambda$  – интенсивность входного потока;

$\mu$  – интенсивность обслуживания;

$D_\lambda, D_\mu$  – соответственно дисперсии интервалов поступления и времени обслуживания;

$\bar{I}, \bar{I}^2$  – соответственно среднее значение и второй начальный момент периода простоя.

Следовательно, первое слагаемое в правой части (1) зависит от двух первых моментов распределения интервалов входного потока и времени обслуживания. Второе слагаемое в правой части (1) для общего случая системы G/G/1 остается неизвестным, и поэтому выражение (1) является до сих пор незавершенной формулой. Вполне вероятно, что второе слагаемое может зависеть от моментов интервалов поступления и времени обслуживания более высокого порядка, чем первые два. Поэтому при анализе СМО G/G/1 необходимо учитывать не только первые два момента случайных интервалов времен поступления и обслуживания, но и моменты более высокого порядка.

### Постановка задачи

Из формулы (1) для среднего времени ожидания требований в системе G/G/1 следует, что главная характеристика СМО – среднее время ожидания требований в очереди – связано с коэффициентами вариаций интервалов между поступлениями требований и времени обслуживания квадратичной зависимостью, и таким образом «хвост» распределения, используемого для описания СМО, обусловленный величиной коэффициента вариации  $c$ , влияет напрямую на среднее время ожидания. Степень такого влияния и выясним на примере двух законов распределений достаточно общего вида, в качестве которых рассмотрим гиперэкспоненциальный и гиперэрланговский законы.

### Решение задачи

Рассмотрим вначале гиперэкспоненциальный закон распределения. Распределение с плотностью  $f(t) = \sum_{i=1}^R \alpha_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}$ , где  $t \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^R \alpha_i = 1$ , называют гиперэкспоненциальным (гиперпоказательным) порядка  $R$  и обозначают  $H_R$  [1]. В этой же работе доказано, что коэффициент вариации случайной величины, распределенной по такому закону, больше либо равен единице. Аналогичное определение  $H_R$ , только относительно функции распределения, дано в работе [2]. В теории массового обслуживания это распределение выше второго порядка не используется, т. к. в этом случае затруднительно получить решение для среднего времени ожидания.

Гиперэкспоненциальный закон распределения второго порядка  $H_2$  как вероятностная смесь экспоненциальных распределений с функцией плотности

$$a(t) = p\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \quad (2)$$

содержит три параметра ( $0 < p < 1$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ) и таким образом позволяет аппроксими-

мировать произвольные входные распределения методом моментов на уровне трех первых моментов. Кроме того, закон распределения  $H_2$  обладает уникальным свойством, заключающимся в том, что он полностью может описываться как с использованием двух первых моментов, так и с использованием трех первых моментов [3, 4].

На рис. 1 показаны графики функции плотности (2) с математическим ожиданием, равным 2, для случаев  $c=2$  и  $c=4$ , а также для сравнения показана плотность экспоненциального распределения с тем же математическим ожиданием. Параметры распределения (2) при  $c=2$ :  $p=0,8873$ ;  $\lambda_1=0,8873$ ;  $\lambda_2=0,1127$ , а при  $c=4$  –  $p=0,9697$ ;  $\lambda_1=0,9697$ ;  $\lambda_2=0,0303$ .

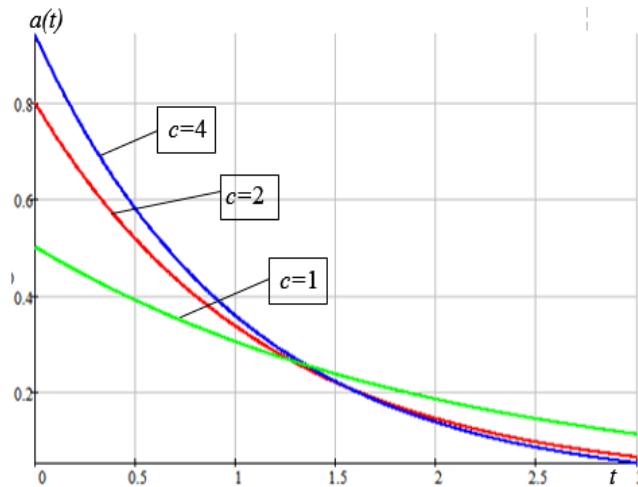


Рис. 1. Графики функции плотности (2) при  $c=2$  и  $c=4$

Более полное представление о гиперэкспоненциальном распределении дает его «хвост», график которого приведен на рис. 2.

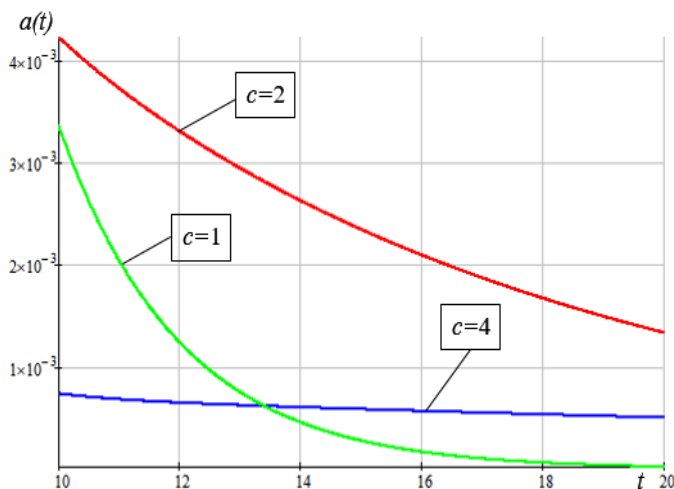


Рис. 2. «Хвост» гиперэкспоненциального распределения

Из рис. 2 видно, что кривая плотности при  $c=4$  имеет т. н. «тяжелый хвост», которому характерно малое изменение во времени. Для такого случая вероятность появления больших значений случайной величины значительно выше, чем для экспоненциального закона [5]. Поэтому исходя из выражения (1) делаем вывод: входное распределение (2) в СМО при  $c=4$  дает большее время ожидания, чем при  $c=2$  и тем более чем при  $c=1$  для экспоненциального закона.

### Аппроксимация законов распределений с использованием двух первых моментов

Преобразование Лапласа функции (2) имеет вид

$$A^*(s) = p \frac{\lambda_1}{s + \lambda_1} + (1-p) \frac{\lambda_2}{s + \lambda_2} \quad (3)$$

Воспользуемся свойством преобразования Лапласа воспроизведения моментов и запишем начальные моменты до второго порядка для распределения (2):

$$\bar{\tau}_\lambda = \frac{p}{\lambda_1} + \frac{(1-p)}{\lambda_2}, \quad (4)$$

$$\overline{\tau_\lambda^2} = \frac{2p}{\lambda_1^2} + \frac{2(1-p)}{\lambda_2^2}. \quad (5)$$

Рассматривая равенства (4) и (5) как запись известного метода моментов, найдем неизвестные параметры распределения (2)  $\lambda_1, \lambda_2, p$ . Система двух уравнений (4), (5) при этом является недоопределенной, поэтому к ней добавим выражение для квадрата коэффициента вариации

$$c^2 = \frac{\overline{\tau_\lambda^2} - (\bar{\tau}_\lambda)^2}{(\bar{\tau}_\lambda)^2} \quad (6)$$

как связующее условие между (4) и (5). Исходя из вида уравнения (4) положим

$$\lambda_1 = 2p / \bar{\tau}_\lambda, \quad \lambda_2 = 2(1-p) / \bar{\tau}_\lambda \quad (7)$$

и потребуем выполнения условия (6). Подставив выражения (4), (5) с параметрами (7) в (6) и решив квадратное уравнение относительно параметра  $p$ ,

получим для него два значения:  $p = \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{\frac{c_\lambda^2 - 1}{c_\lambda^2 + 1}})$ . При этом можно

воспользоваться любым из них [3, 4]. Подставив полученное значение  $p$  в (7), определим недостающие параметры  $\lambda_1, \lambda_2$ . Таким образом, методом подбора можно получить решение недоопределенной системы уравнений (4) и (5). Следовательно, гиперэкспоненциальный закон распределения может определяться полностью двумя первыми моментами и перекрывать весь диапазон изменения коэффициента вариации – от 1 до  $\infty$  [4, 5].

### Аппроксимация с использованием трех моментов

Учитывая тот факт, что распределение  $H_2$  является трехпараметрическим, аппроксимацию можно выполнить и на уровне трех первых моментов, что позволит сравнить полученные результаты. Для этого запишем выражение для момента 3-го порядка, полученное через преобразование Лапласа (3):

$$\overline{\tau_\lambda^3} = \frac{6p}{\lambda_1^3} + \frac{6(1-p)}{\lambda_2^3} \quad (8)$$

Решив систему нелинейных уравнений (4), (5) и (8) в математическом пакете Mathcad, определяем неизвестные параметры распределения (2)  $\lambda_1, \lambda_2, p$ .

Однако эта система уравнений будет не всегда разрешимой. Для существования решения системы (4), (5) и (8) необходимо и достаточно выполнение условия [7, 8]

$$\overline{\tau_\lambda^3} \cdot \overline{\tau_\lambda} \geq 1,5 \cdot \overline{\tau_\lambda^2} \quad (9)$$

Решив систему нелинейных уравнений (4), (5) и (8) в математическом пакете Mathcad, определяем неизвестные параметры распределения (2)  $\lambda_1, \lambda_2, p$ .

Рассмотрим пример. Предположим, что первые два начальных момента распределения (2) равны:  $\overline{\tau_\lambda} = 10/9$ ,  $\overline{\tau_\lambda^2} = 17 \cdot (10/9)^2$ , что соответствует коэффициенту вариации  $c = 4$  согласно равенству (6). Теперь к первым двум моментам добавим третий:  $\overline{\tau_\lambda^3} = 497 \cdot (10/9)^3$ , что соответствует коэффициенту асимметрии  $A_s = 7$  [7]. Заметим, что для классического экспоненциального распределения  $c = 1$ ,  $A_s = 2$ .

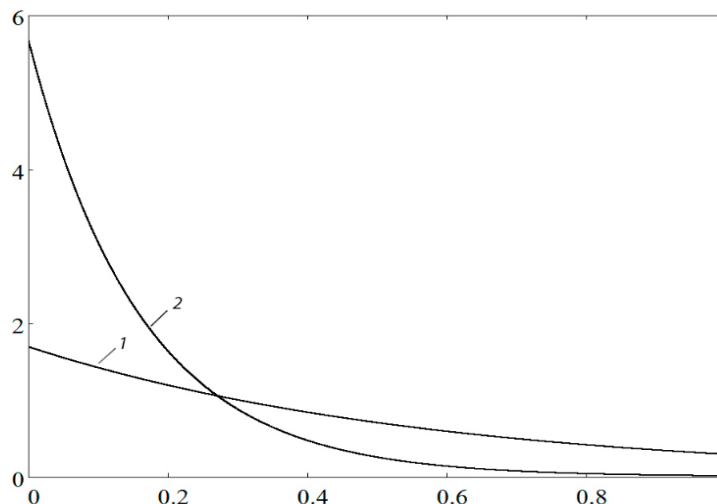


Рис. 3. Графики функции плотности (2): 1 – аппроксимация закона распределения  $H_2$  на уровне 2-х моментов; 2 – на уровне 3-х моментов

Аппроксимация с использованием двух первых моментов дает  $p \approx 0,9697$ ,  $\lambda_1 \approx 1,7454$ ,  $\lambda_2 \approx 0,0546$ . График функции плотности (2) с этими параметрами приведен на рис. 3 (кривая 1). Для аппроксимации с использованием трех первых моментов решаем систему трех уравнений в пакете Mathcad:

$$\begin{cases} \frac{p}{\lambda_1} + \frac{(1-p)}{\lambda_2} = 10/9 \\ \frac{2p}{\lambda_1^2} + \frac{2(1-p)}{\lambda_2^2} = 17 \cdot (10/9)^2 \\ \frac{6p}{\lambda_1^3} + \frac{6(1-p)}{\lambda_2^3} = 497 \cdot (10/9)^3, \end{cases}$$

что дает следующие результаты для параметров:  $p \approx 0,9111$ ,  $\lambda_1 \approx 6,2291$ ,  $\lambda_2 \approx 0,0922$ . Условие (9) в этом случае выполняется. График функции плотности (2) с этими параметрами приведен на рис. 3 (кривая 2).

Рис. 3 наглядно демонстрирует разницу между аппроксимацией с использованием двух первых моментов и с использованием трех моментов. Как показано в работах [4, 10, 13], аппроксимация закона распределения (2) с использованием двух первых моментов может занижать среднее время ожидания в очереди в СМО до 10 % по сравнению с аппроксимацией на уровне трех моментов.

### Гиперэрланговский закон распределения

Распределение с плотностью  $f(t) = \sum_{i=1}^R \alpha_i \frac{k_i \lambda_i (k_i \lambda_i t)^{k_i - 1}}{(k_i - 1)!} e^{-k_i \lambda_i t}$ , где  $t \geq 0$ ,

$\sum_{i=1}^R \alpha_i = 1$ , называют гиперэрланговским порядка  $R$  и обозначают  $HE_R$  [1]. Гиперэр-

ланговское распределение представляет собой вероятностную смесь нормированных распределений Эрланга порядка  $k$  с функцией плотности вида

$$f_k(t) = \frac{k \lambda (k \lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k \lambda t} \text{ и является наиболее общим распределением неотрица-}$$

тельных непрерывных случайных величин, поскольку имеет коэффициент вариации  $c_\tau$  в интервале от 0 до  $\infty$  [5, 6].

По той же причине, что и выше, мы ограничимся гиперэрланговским распределением 2-го порядка при  $k_i = 2$  с функцией плотности

$$a(t) = 4p\lambda_1^2 t e^{-2\lambda_1 t} + 4(1-p)\lambda_2^2 t e^{-2\lambda_2 t}. \quad (10)$$

Как будет показано ниже, коэффициент вариации для такого распределения  $c_\tau \geq 1/\sqrt{2}$ . Распределение (10) в научной литературе обозначают через  $HE_2$ . Оно содержит три параметра ( $0 < p < 1$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ) и таким образом позволяет аппроксимировать произвольные входные распределения на уровне трех первых моментов с использованием известного метода моментов. Приведенные выше выкладки для распределения  $H_2$  подтверждают тот факт, что распределение  $HE_2$ , как и гиперэкспоненциальное  $H_2$ , однозначно может определяться как двумя, так и тремя первыми моментами. В этом случае начальные моменты до третьего порядка включительно для распределения (10) имеют вид

$$\bar{\tau}_\lambda = \frac{p}{\lambda_1} + \frac{(1-p)}{\lambda_2}, \quad \bar{\tau}_\lambda^2 = \frac{3}{2} \left[ \frac{p}{\lambda_1^2} + \frac{(1-p)}{\lambda_2^2} \right], \quad \bar{\tau}_\lambda^3 = \frac{3p}{\lambda_1^3} + \frac{3(1-p)}{\lambda_2^3}. \quad (11)$$

При аппроксимации с использованием двух первых моментов поступаем точно так же, как и в случае с распределением (2), и получим для параметра  $p$

$$p = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{2(1+c_\lambda^2)-3}{8(1+c_\lambda^2)}}.$$

Дальнейшие действия по определению параметров  $\lambda_1, \lambda_2$  уже очевидны. Точно так же при аппроксимации с использованием трех первых моментов, решив систему уравнений (11) в математическом пакете Mathcad, определяем неизвестные параметры распределения (10)  $\lambda_1, \lambda_2, p$ .

На рис. 4 представлены графики функции плотности (10) с математическим ожиданием, равным 2, для случаев  $c=0,71$ ,  $c=2$  и  $c=4$ , а также для сравнения показана плотность экспоненциального распределения с тем же математическим ожиданием.

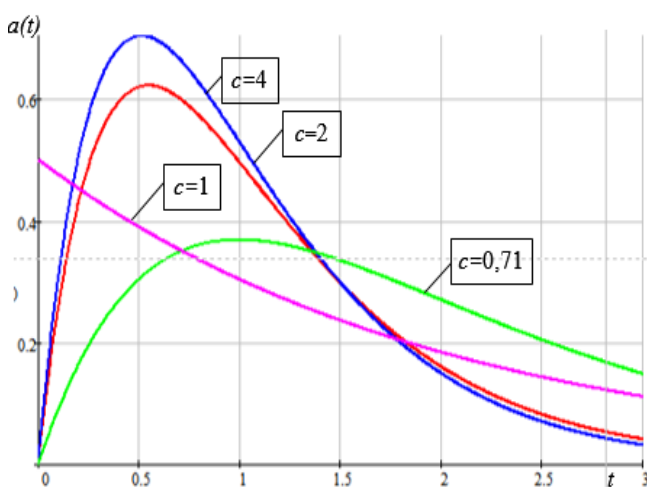


Рис. 4. Графики функции плотности (10) при  $c=0,71$ ,  $c=2$  и  $c=4$

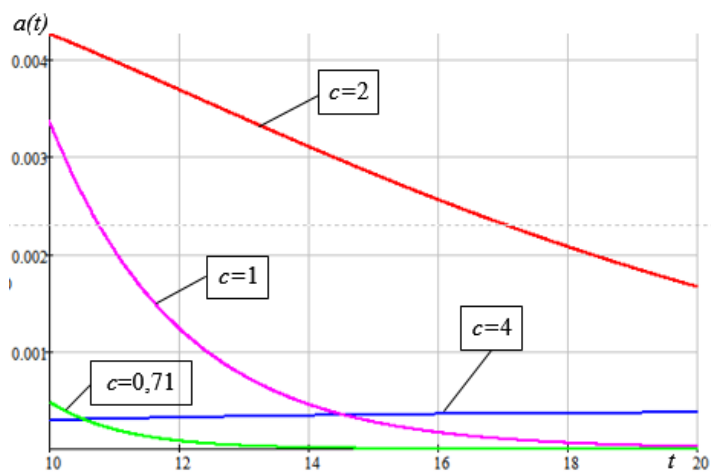


Рис. 5. «Хвост» гиперэрланговского распределения

Более полное представление о гиперэрланговском распределении также дает его «хвост», график которого приведен на рис. 5. Из рис. 5 также видно, что кривая плотности при  $c = 4$  имеет т. н. «тяжелый хвост», которому характерно малое изменение во времени. Следовательно, и для коэффициентов вариаций выше 4 эта тенденция будет сохраняться и будет резко возрастать среднее время ожидания требований в системе. Аналогично будет и для гиперэкспоненциального закона распределения, рассмотренного выше.

Данный факт проверим на основе вычислительного эксперимента для систем массового обслуживания  $H_2/H_2/1$  и  $HE_2/HE_2/1$ , для которых решения для среднего времени ожидания в замкнутой форме с полным выводом и анализом представлены в работах [4] и [11] соответственно.

В таблице приведены данные расчетов среднего времени ожидания (в единицах времени) для систем  $H_2/H_2/1$  и  $HE_2/HE_2/1$  для случаев малой, средней и высокой нагрузки  $\rho = 0,1; 0,5; 0,9$  с учетом того, что диапазон изменения коэффициентов вариаций интервалов входного потока  $c_\lambda$  и времени обслуживания  $c_\mu$  для распределения  $HE_2$  шире, чем у распределения  $H_2$ . Коэффициент загрузки в расчетах определяется отношением средних интервалов времени обслуживания и интервалов между требованиями  $\rho = \bar{c}_\mu / \bar{c}_\lambda$ . Расчеты проведены для нормированного времени обслуживания  $\bar{c}_\mu = 1$ . С учетом того факта, что система  $H_2/H_2/1$  неприменима в случаях  $c_\lambda < 1$  и  $c_\mu < 1$ , в таблице поставлен прочерк.

**Результаты для времени ожидания при коэффициентах вариаций, больших и меньших 1**

Входные параметры		Среднее время ожидания	
$\rho$	$(c_\lambda, c_\mu)$	для системы $H_2/H_2/1$	для системы $HE_2/HE_2/1$
0,1	(0,71; 0,71)	–	0,02
	(2,2)	0,45	0,34
	(4,4)	1,78	1,68
	(8,8)	7,11	7,16
0,5	(0,71; 0,71)	–	0,40
	(2,2)	4,04	3,98
	(4,4)	16,13	16,53
	(8,8)	64,18	66,73
0,9	(0,71; 0,71)	–	4,40
	(2,2)	36,20	36,21
	(4,4)	144,83	145,31
	(8,8)	577,86	580,56



Данные таблицы хорошо согласуются с результатами [12], что также подтверждает адекватность полученных результатов. Полученные результаты полностью подтверждают наши предположения о среднем времени ожидания в очереди, выдвинутые выше.

### Выводы

1. Выявлена характерная особенность у двух законов распределений достаточно общего вида: гиперэкспоненциального и гиперэрланговского, заключающаяся в том, что они однозначно описываются как двумя первыми моментами, так и тремя первыми моментами.

2. Представлен механизм их аппроксимации на практике с использованием известного метода моментов как с использованием двух, так и с использованием трех первых моментов.

3. Применение этих законов распределений в теории массового обслуживания расширяет диапазон изменения коэффициентов вариаций интервалов входного потока и времени обслуживания, а также дополняет и расширяет формулу (1) для среднего времени ожидания в системе G/G/1.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания: Пер. с англ. под ред. В.И. Неймана. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.
2. *Бочаров П.П., Печинкин А.В.* Теория массового обслуживания. – М.: Изд-во РУДН, 1995. – 529 с.
3. *Brannstrom N.* A Queueing Theory analysis of wireless radio systems. – Applied to HS-DSSS. Lulea university of technology, 2004. – 79 p.
4. *Тарасов В.Н.* Исследование систем массового обслуживания с гиперэкспоненциальными входными распределениями // Проблемы передачи информации. – 2016. – Т. 52. – № 1. – С. 16–26.
5. *Алиев Т.И.* Основы моделирования дискретных систем. – СПб.: СПбГУ ИТМО, 2009. – 363 с.
6. *Алиев Т.И.* Аппроксимация вероятностных распределений в моделях массового обслуживания // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2013. – № 2(84). – С. 88–93.
7. *Whitt W.* Approximating a point process by a renewal process, I: two basic methods // Operation Research. – 1982. – Vol. 32, no. 1. – P. 125–147.
8. *Myskja A.* An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals // Teletraffic and datatraffic in a Period of Change, ITC-13. Elsevier Science Publishers. – 1991. – P. 683–688.
9. *Jennings O.B. & Pender J.* Comparisons of ticket and standard queues. Queueing Systems, 2016, vol. 84, no. 1, pp. 145–202.
10. *Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф., Горелов Г.А., Малахов С.В.* Анализ входящего трафика на уровне трех моментов распределений временных интервалов // Информационные технологии. – 2014. – № 9. – С. 54–59.
11. *Тарасов В.Н.* Анализ и сравнение двух систем массового обслуживания с гиперэрланговскими входными распределениями // Радиоэлектроника, информатика, управление. – 2018. – № 4. – С. 61–70.
12. *Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф.* Обобщенная двумерная диффузионная модель массового обслуживания типа GI/G/1 // Телекоммуникации. – 2009. – № 7. – С. 2–8.
13. *Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф., Горелов Г.А.* Математическая модель трафика с тяжелохвостным распределением на основе системы массового обслуживания H<sub>2</sub>/M/1 // Инфокоммуникационные технологии. – 2014. – Т. 12. – № 3. – С. 36–41.

Статья поступила в редакцию 25 декабря 2018 г.

# FEATURES OF APPLICATION OF HYPEREXPONENTIAL AND HYPERERLANGIAN INPUT DISTRIBUTIONS IN QUEUEING SYSTEMS

*V.N. Tarasov, E.G. Akhmetshina, Kada Othmane*

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics  
23, L. Tolstogo st., Samara, 443010, Russian Federation

E-mail: veniamin\_tarasov@mail.ru, elyamalusha@mail.ru, otman2333@gmail.com

**Abstract.** *It has been proposed to use two distribution laws of a fairly general form as input distributions for describing queueing systems: hyperexponential and hypererlangian with a wide range of variation coefficients. The main characteristic feature of these laws of distributions is revealed, showing that they can unambiguously be described both by the first two moments and by three moments. The mechanism for their approximation is proposed using the well-known method of moments using both the first two moments and the first three moments. The use of these laws of distributions in the queueing theory extends and complements the well-known incomplete formula for the average waiting time for queueing systems with arbitrary laws of intervals distribution of input requirements and service time. The results obtained are important for modern teletraffic theory.*

**Keywords:** *hyperexponential and hypererlangian distribution laws, queueing systems.*

## REFERENCES

1. Kleinrock L. Teoriya massovogo obsluzhivaniya [Queueing theory]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ, 1979. 432 pp. (In Russian).
2. Bocharov P.P., Pechinkin A.V. Teoriya massovogo obsluzhivaniya [Queueing theory]. Moscow, Publishing House of Peoples' Friendship University, 1995. 529 pp. (In Russian).
3. Brannstrom N. A Queueing Theory analysis of wireless radio systems. Applied to HS-DSCH. Lulea university of technology. 2004. 79 pp.
4. Tarasov V.N. Analysis of queues with hyperexponential arrival distributions // Problemy peredachi informacii, 2016. no. 1 (55). Pp. 14–23. (In Russian).
5. Aliev T.I. Osnovy modelirovaniya diskretnykh system [Fundamentals of discrete systems modeling] SPb, SPbGU ITMO, 2009. 363 pp. (In Russian).
6. Алуев Т.И. Approximation of probability distributions in queueing models // Nauchno-tekhnicheskij vestnik informacionnykh tekhnologij, mekhaniki i optiki, 2013. no. 2(84). Pp. 88–93. (In Russian).
7. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process: two basic methods // Operation Research, 1982. no. 1(30). Pp. 125–147.
8. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals // Teletraffic and datatraffic in a Period of Change, ITC-13. Elsevier Science Publishers, 1991. Pp. 683–688.
9. Jennings O.B. & Pender J. Comparisons of ticket and standard queues // Queueing Systems, 2016. no. 1 (84). Pp. 145–202.
10. Tarasov V.N., Bakhareva N.F., Gorelov G.A., Malakhov S.V. Analyzing the Incoming Traffic at the Three Moments Distribution of Time Intervals // Informacionnye tekhnologii, 2014. no. 9. Pp. 54–59. (In Russian).
11. Tarasov V.N. Analysis and comparison of two queueing systems with hypererlangian input distributions // Radioelektronika, informatika, upravlenie, 2018. no. 4. Pp. 61–70. (In Russian).

---

Veniamin N. Tarasov (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.  
Eleonora G. Akhmetshina, graduate student.  
Kada Othmane, graduate student.

12. *Tarasov V.N., Bahareva N.F.* A generalized two-dimensional diffusion queueing model of the GI/G/1 type // *Telekommunikacii*, 2009. no. 7. Pp. 2–8. (In Russian).
13. *Tarasov V.N., Bakhareva N.F., Gorelov G.A.* Mathematical model of traffic with heavy-tailed distributions based queueing  $H_2/M/1$  // *Infokommunikacionnye technologii*, 2014. no. 3. Pp. 36–41. (In Russian).
14. *Tarasov V.N.* Extension of the Class of Queueing Systems with Delay // *Avtomatika i telemekhanika*, 2018. Vol. 79, no. 12, pp. 2147-2158.
15. *Gromoll H.C., Terwilliger B. & Zwart B.* Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times. *Queueing Systems*, 2018. Vol. 89, no. 3, pp. 213-241.
16. *Legros B.* M/G/1 queue with event-dependent arrival rates. *Queueing Systems*, 2018. Vol. 89, no. 3, pp. 269-301.
17. *Jennings O.B. & Pender J.* Comparisons of ticket and standard queues. *Queueing Systems*, 2016. Vol. 84, no. 1, pp. 145-202.