

УДК 621.391.1: 621.395

МОДЕЛИ ТЕЛЕТРАФИКА НА ОСНОВЕ ДВОЙСТВЕННЫХ СИСТЕМ С ГИПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ И ЭРЛАНГОВСКИМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева, Э.Г. Ахметшина

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики
Россия, 443010, г. Самара, ул. Л. Толстого, 23

E-mail: veniamin_tarasov@mail.ru, nadin1956_04@inbox.ru, elyamalusha@mail.ru

Аннотация. Представлены результаты исследований по системам массового обслуживания (СМО) $H_2/E_2/1$ и $E_2/H_2/1$ с гиперэкспоненциальными и эрланговскими входными распределениями второго порядка. Рассматриваемые СМО относятся к типу $G/G/1$. Использование этих законов распределений более высокого порядка затруднено нарастающей вычислительной сложностью. Для таких законов распределений второго порядка классический метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли для систем $G/G/1$ позволяет получить решение в замкнутой форме. В статье представлены полученные спектральные разложения решения интегрального уравнения Линдли для рассматриваемых систем и выведенные через них формулы для среднего времени ожидания в очереди. Адекватность полученных результатов подтверждена корректностью использования классического метода спектрального разложения и результатами численного моделирования. Для практического применения полученных результатов использован метод моментов теории вероятностей. Системы типа $G/G/1$ широко используются в теории телетрафика при моделировании систем передачи данных. Например, по среднему времени ожидания в очереди оценивают задержки пакетов в сетях пакетной коммутации при их моделировании с помощью СМО.

Ключевые слова: гиперэкспоненциальный и эрланговский законы распределения, системы массового обслуживания, метод спектрального разложения.

Введение

Для моделирования трафика современных сетей телекоммуникаций на основе теории массового обслуживания широко используются законы распределений, преобразуемых по Лапласу, такие как Эрланга (E_R), экспоненциальный (M), гиперэкспоненциальный (H_R), гиперэрланговский (HE_R) и др., для которых коэффициенты вариации случайных величин больше или равны 1 ($c \geq 1$) или же меньше 1 ($c < 1$). При этом необходимо заметить, что системы массового обслуживания (СМО) с бесконечной очередью могут моделировать реальные системы передачи данных лишь в первом приближении, т. к. последние могут содержать буферы ограниченной емкости.

Настоящая статья посвящена анализу СМО $H_2/E_2/1$ и $E_2/H_2/1$ с гиперэкспоненциальными и эрланговскими входными распределениями второго порядка. В научной литературе по теории массового обслуживания для таких систем результатов авторами не обнаружено, поэтому решение для среднего времени ожи-

Тарасов Вениамин Николаевич (д.т.н., проф.), заведующий кафедрой ПОУТС.
Бахарева Надежда Федоровна (д.т.н., проф.), заведующий кафедрой ИВТ.
Ахметшина Элеонора Газинуровна, преподаватель кафедры ПОУТС.

дания в очереди для них будем строить на основе классического метода спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли (ИУЛ) [1]. По этой характеристике, например, оценивают задержки пакетов в сетях пакетной коммутации при их моделировании с помощью СМО [11–13]. Рассматриваемые СМО относятся к типу G/G/1.

Как известно, например, из [1, 2], для СМО с произвольными законами распределений для входного потока и времени обслуживания G/G/1 среднее время ожидания в очереди определяется формулой

$$\bar{W} = \frac{D_\lambda + D_\mu + (1-\rho)^2 / \lambda^2}{2(1-\rho) / \lambda} - \frac{\bar{I}^2}{2\bar{I}},$$

где ρ – коэффициент загрузки системы $0 < \rho = \lambda/\mu < 1$;

λ – интенсивность входного потока;

μ – интенсивность обслуживания;

D_λ, D_μ – соответственно дисперсии интервалов поступления и времени обслуживания;

\bar{I}, \bar{I}^2 – соответственно среднее значение и второй начальный момент периода простоя.

Следовательно, первое слагаемое в правой части приведенной выше формулы зависит от двух первых моментов распределения интервалов входного потока и времени обслуживания. Очевидно, что среднее время ожидания требований в очереди к системе зависит от квадратов коэффициентов вариаций интервалов поступлений между требованиями и времени обслуживания этих требований. Второе слагаемое в правой части формулы для общего случая системы G/G/1 остается неизвестным, и поэтому это выражение является до сих пор незавершенной формулой.

Постановка задачи

В работе ставится задача нахождения решения для среднего времени ожидания требований в очереди для двойственной пары СМО с гиперэкспоненциальными и эрланговскими входными распределениями $H_2/E_2/1$ и $E_2/H_2/1$. Из теории массового обслуживания известно, что все остальные характеристики СМО являются производными от среднего времени ожидания. Для решения поставленной задачи выбираем классический метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли.

Решение задачи для системы $H_2/E_2/1$

Метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли в исследовании систем G/G/1 играет важную роль, и большинство результатов в теории массового обслуживания получены именно с помощью данного метода. Одна из форм ИУЛ выглядит так [1]:

$$W(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^y W(y-u) dC(u), & y \geq 0; \\ 0, & y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $W(y)$ – функция распределения вероятностей (ФРВ) времени ожидания требования в очереди;

$C(u) = P(\tilde{u} < u)$ – ФРВ случайной величины $\tilde{u} = \tilde{x} - \tilde{t}$, где, в свою очередь, \tilde{x} – случайное время обслуживания требования; \tilde{t} – случайная величина – интервал времени между поступлениями требований.

При использовании метода спектрального разложения решения ИУЛ будем придерживаться подхода и символики автора классики теории массового обслуживания [1]. Нам необходимо найти закон распределения случайной величины – времени ожидания в системе через спектральное разложение вида $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s) / \psi_-(s)$, где $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ – некоторые рациональные функции от s , которые возможно разложить на множители. Функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ должны удовлетворять следующим условиям согласно [1]:

– для $\text{Re}(s) > 0$ функция $\psi_+(s)$ является аналитической без нулей в этой полуплоскости;

– для $\text{Re}(s) < D$ функция $\psi_-(s)$ является аналитической без нулей в этой полуплоскости, где D – некоторая положительная константа, определяемая из условия $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) / e^{-Dt} < \infty$.

Кроме того, функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty, \text{Re}(s) > 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = 1; \quad \lim_{|s| \rightarrow \infty, \text{Re}(s) < D} \frac{\psi_-(s)}{s} = -1. \quad (2)$$

Для решения поставленной задачи необходимо вначале построить для рассматриваемых систем спектральные разложения вида $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s) / \psi_-(s)$ с учетом условий (1), (2) в каждом случае.

Для системы $H_2/E_2/1$ законы распределения интервалов входного потока и времени обслуживания задаются функциями плотности вида

$$a(t) = p\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}; \quad (3)$$

$$b(t) = 4\mu^2 t e^{-2\mu t}. \quad (4)$$

Запишем преобразования Лапласа функций (3) и (4):

$$A^*(s) = p \frac{\lambda_1}{s + \lambda_1} + (1-p) \frac{\lambda_2}{s + \lambda_2}, \quad B^*(s) = \left(\frac{2\mu}{2\mu + s} \right)^2.$$

Тогда выражение для спектрального разложения решения ИУЛ для системы $H_2/E_2/1$ примет вид

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \left[p \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s} + (1-p) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s} \right] \times \left(\frac{2\mu}{2\mu + s} \right)^2 - 1 = \frac{-s(s + s_1)(s + s_2)(s - s_3)}{(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)(2\mu + s)^2},$$

т. к. многочлен 4-й степени в числителе этого выражения можно представить в виде разложения $-s(s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0)$ с коэффициентами $c_2 = 4\mu - \lambda_1 - \lambda_2$,

$c_1 = 4\mu(\mu - \lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2$, $c_0 = 4\mu[\lambda_1\lambda_2 + \mu(\lambda_1\rho - \lambda_1 - \lambda_2\rho)]$. В свою очередь, кубический многочлен $s^3 + c_2s^2 + c_1s + c_0$ с такими коэффициентами в стационарном режиме функционирования СМО при загрузке $\rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda < 1$ имеет два действительных отрицательных корня $-s_1$, $-s_2$ и один положительный корень s_3 .

Окончательно

$$\frac{\Psi_+(s)}{\Psi_-(s)} = \frac{-s(s+s_1)(s+s_2)(s-s_3)}{(\lambda_1-s)(\lambda_2-s)(2\mu+s)^2}. \quad (5)$$

С учетом условий (1), (2) за функцию $\Psi_+(s)$ примем $\Psi_+(s) = s(s+s_1)(s+s_2)/(s+2\mu)^2$, т. к. нули кубического многочлена $s=0$, $s=-s_1$, $s=-s_2$ и полюс $s=-2\mu$ лежат в области $\text{Re}(s) \leq 0$, а за функцию $\Psi_-(s)$

$$\Psi_-(s) = -(\lambda_1-s)(\lambda_2-s)/(s-s_3).$$

Теперь выполнение условий (1) и (2) для построенных функций $\Psi_+(s)$ и $\Psi_-(s)$ очевидно. Это подтверждает и рис. 1, где отображены нули и полюсы отношения $\Psi_+(s)/\Psi_-(s)$ на комплексной s -плоскости для исключения ошибок построения спектрального разложения. На рис. 1 полюсы отмечены крестиками, а нули – кружками.

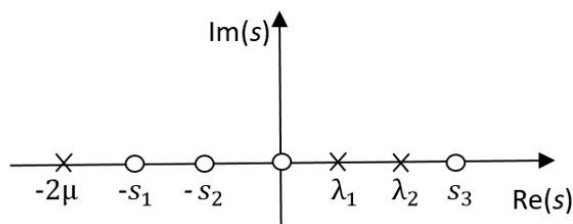


Рис. 1. Нули и полюсы функции $\Psi_+(s)/\Psi_-(s)$ для системы $H_2/E_2/1$

Далее по методике спектрального разложения найдем константу K :

$$K = \lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{\Psi_+(s)}{s} = \lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{(s+s_1)(s+s_2)}{(s+2\mu)^2} = \frac{s_1s_2}{4\mu^2}.$$

Построим функцию $\Phi_+(s) = K/\Psi_+(s)$, через которую найдем преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания:

$$W^*(s) = \frac{s_1s_2(s+2\mu)^2}{4\mu^2(s+s_1)(s+s_2)}. \quad (6)$$

Тогда среднее время ожидания для системы $H_2/E_2/1$ будет равно значению производной от функции $W^*(s)$ со знаком минус в т. $s=0$:

$$\bar{W} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} - \frac{1}{\mu}, \quad (7)$$

где s_1, s_2 – абсолютные значения отрицательных корней $-s_1$ и $-s_2$ кубического многочлена $s^3 + c_2s^2 + c_1s + c_0$ с приведенными выше коэффициентами. Таким образом, среднее время для системы $H_2/E_2/1$ однозначно определено в виде замкнутой формы (7). Из выражения (6) можно определить при необходимости и моменты высших порядков для времени ожидания. Например, вторая производная от функции (6) при $s = 0$ дает второй начальный момент времени ожидания. С учетом определения вариации задержки – джиттера в телекоммуникациях как разброса времени ожидания от его среднего значения [10] получим возможность определения джиттера через дисперсию времени ожидания.

Для практического применения формулы (7) необходимо определить числовые характеристики распределений (3) и (4). Для этого воспользуемся свойством преобразования Лапласа воспроизведения моментов и запишем начальные моменты до третьего порядка для распределения (3):

$$\bar{\tau}_\lambda = \frac{p}{\lambda_1} + \frac{(1-p)}{\lambda_2}, \quad \bar{\tau}_\lambda^2 = \frac{2p}{\lambda_1^2} + \frac{2(1-p)}{\lambda_2^2}, \quad \bar{\tau}_\lambda^3 = \frac{6p}{\lambda_1^3} + \frac{6(1-p)}{\lambda_2^3}. \quad (8)$$

При аппроксимации закона распределения методом моментов с использованием первых двух начальных моментов неизвестные параметры распределения (3) λ_1, λ_2, p определяются следующим образом [3–6]. Рассматривая два первых равенства (8) как запись метода моментов, найдем неизвестные параметры распределения (3) λ_1, λ_2, p . Система двух первых уравнений (8) при этом является не доопределенной, поэтому к ней добавим выражение для квадрата коэффициента вариации

$$c^2 = \frac{\bar{\tau}_\lambda^2 - (\bar{\tau}_\lambda)^2}{(\bar{\tau}_\lambda)^2} \quad (9)$$

как связующее условие между двумя первыми равенствами (8). Кроме того, коэффициент вариации будем использовать в дальнейшем в качестве входного параметра системы.

Исходя из вида первого уравнения (8) положим

$$\lambda_1 = 2p/\bar{\tau}_\lambda, \quad \lambda_2 = 2(1-p)/\bar{\tau}_\lambda \quad (10)$$

и потребуем выполнения условия (9). Подставив выражения (10) в (9) и решив квадратное уравнение относительно параметра p , получим для него два значения:

$$p = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{c_\lambda^2 - 1}{c_\lambda^2 + 1}} \right). \quad \text{При этом можно воспользоваться любым из них. Таким образом, неизвестные параметры закона распределения (3) однозначно определены:}$$

$$\lambda_1 = 2p/\bar{\tau}_\lambda, \quad \lambda_2 = 2(1-p)/\bar{\tau}_\lambda, \quad p = \frac{1}{2} [1 \pm \sqrt{(c_\lambda^2 - 1)/(c_\lambda^2 + 1)}]. \quad (11)$$

Следовательно, гиперэкспоненциальный закон распределения может определяться полностью двумя первыми моментами и перекрывать весь диапазон изменения коэффициента вариации от 1 до ∞ .

Так как распределение (3) является трехпараметрическим, аппроксимацию можно проводить с использованием трех начальных моментов. При аппроксимации закона распределения методом моментов с использованием первых трех начальных моментов неизвестные параметры λ_1, λ_2, p распределения (3) можем найти решением системы трех уравнений метода моментов (8) в математическом пакете Mathcad. В работе [3] отмечена эта отличительная черта гиперэкспоненциального и гиперэрланговского распределений, заключающаяся в том, что они однозначно могут описываться как с использованием двух начальных моментов, так и с использованием трех начальных моментов. В [4] показано, что аппроксимация гиперэкспоненциального распределения с использованием первых двух начальных моментов по сравнению с аппроксимацией закона распределения методом моментов с использованием трех начальных моментов занижает значение среднего времени ожидания в очереди.

Аналогичный подход к аппроксимации законов распределений рассмотрен в [7–9].

Из выражений (11) следует, что коэффициент вариации случайной величины, распределенной по гиперэкспоненциальному закону, $c_\lambda \geq 1$.

$$\text{Для распределения (4) имеем: } \bar{\tau}_\mu = \frac{1}{\mu}, \bar{\tau}_\mu^2 = \frac{3}{2\mu^2}, c_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Величины $\bar{\tau}_\lambda, \bar{\tau}_\mu, c_\lambda, c_\mu = 1/\sqrt{2}$ будем считать входными параметрами для расчета среднего времени ожидания для системы $H_2/E_2/1$ с использованием формулы (7). Тогда алгоритм расчета сведется к последовательному определению параметров распределения (3) из выражений (11) методом моментов и к нахождению нужных корней многочлена $s^3 + c_2s^2 + c_1s + c_0$ с приведенными выше коэффициентами в пакете Mathcad, а затем к использованию формулы (7).

Решение задачи для системы $E_2/H_2/1$

Для системы $E_2/H_2/1$ законы распределения интервалов входного потока и времени обслуживания задаются функциями плотности вида:

$$a(t) = 4\lambda^2 t e^{-2\lambda t}; \quad (12)$$

$$b(t) = q\mu_1 e^{-\mu_1 t} + (1-q)\mu_2 e^{-\mu_2 t}. \quad (13)$$

Запишем преобразования Лапласа функций (12) и (13):

$$A^*(s) = \left(\frac{2\lambda}{2\lambda + s} \right)^2, \quad B^*(s) = q \frac{\mu_1}{s + \mu_1} + (1-q) \frac{\mu_2}{s + \mu_2}.$$

Выражение для спектрального разложения решения ИУЛ для системы $E_2/H_2/1$ примет вид

$$\frac{\Psi_+(s)}{\Psi_-(s)} = \left(\frac{2\lambda}{2\lambda - s} \right)^2 \left[q \frac{\mu_1}{\mu_1 + s} + (1-q) \frac{\mu_2}{\mu_2 + s} \right] - 1 = \frac{-s(s + s_1)(s + s_2)(s - s_3)}{(2\lambda - s)^2 (s + \mu_1)(s + \mu_2)}, \quad (14)$$

т. к. многочлен четвертой степени в числителе выражения (14) можно представить в виде разложения $-s(s^3 - c_2s^2 - c_1s - c_0)$ с коэффициентами

$$c_2 = 4\lambda - \mu_1 - \mu_2, \quad c_1 = 4\lambda(\mu_1 + \mu_2 - \lambda) - \mu_1\mu_2, \quad c_0 = 4\lambda^2 q(\mu_1 - \mu_2) + 4\lambda\mu_1(\mu_2 - \lambda).$$

Кубический многочлен

$$s^3 - c_2s^2 - c_1s - c_0 \quad (15)$$

с такими коэффициентами имеет два действительных отрицательных корня $-s_1$, $-s_2$ и один положительный корень s_3 в случае стационарного режима, т. е. когда нагрузка системы $0 < \rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda < 1$. Тогда исходя из правил (1), (2) построения функций $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ из выражения (14) за функцию $\psi_+(s)$ примем

$$\psi_+(s) = \frac{s(s+s_1)(s+s_2)}{(s+\mu_1)(s+\mu_2)},$$

т. к. нули многочлена (15) $s=0$, $-s_1$, $-s_2$ и полюсы $s=-\mu_1$, $s=-\mu_2$ лежат в области $\text{Re}(s) \leq 0$. За функцию $\psi_-(s)$ из выражения (15) примем

$$\psi_-(s) = -\frac{(2\lambda - s)^2}{(s - s_3)},$$

т. к. ее нуль $s=2\lambda$ и полюс $s=s_3$ лежат в области $\text{Re}(s) \geq D$, определенной условием (1). Теперь выполнение условий (1), (2) для построенных функций $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ очевидно. Это подтверждает и рис. 2, где нули $s=0$, $-s_1$, $-s_2$, s_3 и полюсы 2λ , $-\mu_1$, $-\mu_2$ полученного разложения (14) показаны на комплексной s -плоскости. На рис. 2 полюсы также отмечены крестиками, а нули – кружками.

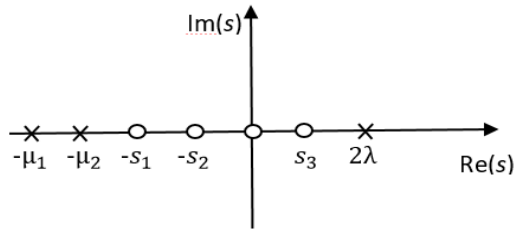


Рис. 2. Нули и полюсы функции $\psi_+(s)/\psi_-(s)$ для системы $E_2/H_2/1$

Необходимая для получения решения константа равна $K = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = \frac{s_1s_2}{\mu_1\mu_2}$. Далее строим функцию

$$\Phi_+(s) = \frac{K}{\psi_+(s)} = \frac{s_1s_2(s+\mu_1)(s+\mu_2)}{s(s+s_1)(s+s_2)\mu_1\mu_2}.$$

Отсюда следует, что преобразование

Лапласа функции плотности времени ожидания в системе $E_2/H_2/1$:

$$W^*(s) = s \cdot \Phi_+(s) = \frac{s_1s_2(s+\mu_1)(s+\mu_2)}{(s+s_1)(s+s_2)\mu_1\mu_2}. \quad (16)$$

Производная от функции $W^*(s)$ со знаком минус в т. $s=0$ даст среднее время ожидания:

$$-\frac{dW^*(s)}{ds}\Big|_{s=0} = -\frac{s_1 s_2 (s + \mu_1)(s + \mu_2)}{(s + s_1)(s + s_2)\mu_1 \mu_2}\Big|_{s=0} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}.$$

Окончательно среднее время ожидания в системе $E_2/H_2/1$ может быть определено из выражения

$$\bar{W} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}, \quad (17)$$

где s_1, s_2 – абсолютные значения отрицательных корней $-s_1, -s_2$ кубического многочлена (15) с приведенными выше коэффициентами, а μ_1, μ_2 – параметры распределения (13).

Таким образом, для среднего времени ожидания в СМО $E_2/H_2/1$ получено решение в замкнутой форме (17).

Для этой системы неизвестные параметры μ_1, μ_2, q с использованием двух первых моментов по аналогии с системой $H_2/E_2/1$ определяются следующими выражениями:

$$\mu_1 = 2q / \bar{\tau}_\mu, \quad \mu_2 = 2(1 - q) / \bar{\tau}_\mu, \quad q = \frac{1}{2} [1 \pm \sqrt{(c_\mu^2 - 1) / (c_\mu^2 + 1)}]. \quad (18)$$

Тогда алгоритм расчета среднего времени ожидания для СМО $E_2/H_2/1$ сведется к последовательному определению параметров распределения (4) из выражений (18) методом моментов, а затем к определению значений нужных корней $-s_1, -s_2$ многочлена (15) с приведенными выше коэффициентами в пакете Mathcad и использованию формулы (17) для расчета среднего времени ожидания при заданных входных параметрах $\bar{\tau}_\lambda, \bar{\tau}_\mu, c_\lambda = 1/\sqrt{2}, c_\mu \geq 1$.

Результаты вычислительных экспериментов

Ниже в таблице приведены данные расчетов для систем $H_2/E_2/1$ и $E_2/H_2/1$ для случаев малой, средней и высокой нагрузки $\rho = 0,1; 0,5; 0,9$. Коэффициент загрузки ρ в обеих таблицах определяется отношением средних интервалов $\rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda$. Расчеты, приведенные в таблицах, проведены для нормированного времени обслуживания $\bar{\tau}_\mu = 1$. Заметим, что первая система применима для коэффициентов вариаций интервалов поступления и обслуживания $c_\lambda \geq 1$ и $c_\mu = 1/\sqrt{2}$, а вторая – для $c_\lambda = 1/\sqrt{2}$ и $c_\mu \geq 1$. Данные таблицы свидетельствуют о незначительном различии сравниваемых систем в случае высоких нагрузок и более значительных расхождениях – при средних и малых нагрузках.

Как известно из теории массового обслуживания, результаты для среднего времени ожидания для двойственных систем обычно могут различаться значительно, т. к. определение двойственности пары систем не предполагает равенства значений среднего времени ожидания для этих систем.

Данные таблицы хорошо согласуются с результатами [12, 13] в той области изменения параметров, в которой применимы рассматриваемые системы, что также подтверждает адекватность полученных результатов. Полученные резуль-

таты полностью подтверждают наши предположения о среднем времени ожидания в очереди: оно связано с коэффициентами вариаций интервалов поступлений и времени обслуживания квадратичной зависимостью, выдвинутой выше.

Результаты вычислительных экспериментов для СМО $H_2/E_2/1$ и $E_2/H_2/1$

Входные параметры			Среднее время ожидания	
ρ	c_λ для СМО $H_2/E_2/1$	c_μ для СМО $E_2/H_2/1$	для системы $H_2/E_2/1$	для системы $E_2/H_2/1$
0,1	1	1	0,083	0,030
	2	2	0,141	0,160
	4	4	0,171	0,795
	8	8	0,182	3,448
0,5	1	1	0,751	0,618
	2	2	1,764	2,094
	4	4	4,082	8,082
	8	8	8,911	32,079
0,9	1	1	6,752	6,588
	2	2	20,016	20,072
	4	4	73,321	74,065
	8	8	286,642	290,063

Выводы

В работе получены спектральные разложения решения интегрального уравнения Линдли для двойственной пары систем $H_2/E_2/1$ и $E_2/H_2/1$, а через них выведены формулы для среднего времени ожидания в очереди для этих систем. Эти формулы дополняют известную незавершенную формулу для среднего времени ожидания для систем типа $G/G/1$.

Полученные модели систем массового обслуживания с бесконечной очередью могут моделировать реальные системы передачи данных лишь в первом приближении, т. к. последние могут содержать буферы ограниченной емкости. В этом случае будут нужны соответствующие модели массового обслуживания с ограничениями на длину очереди, более адекватно отображающие функционирование систем передачи данных.

Среднее время ожидания в очереди – это основная характеристика для систем массового обслуживания, т. к. все остальные характеристики – время задержки, средняя длина очереди, количество требований в системе и др. – являются производными от основной характеристики.

Адекватность полученных результатов обеспечена корректным использованием классического метода спектрального разложения, а проведенные вычислительные эксперименты только подтверждают данный факт.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания / пер. с англ. под ред. В.И. Неймана. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.
2. *Brannstrom N.* A Queueing Theory analysis of wireless radio systems. – Applied to HS-DSCH. Lulea university of technology, 2004. – 79 p.
3. *Тарасов В.Н., Ахметшина Э.Г., Када Отхмане.* Особенности применения гиперэкспоненциальных и гиперэрланговских входных распределений в системах массового обслуживания //

- Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Технические науки. – 2019. – Т. 61. – № 1. – С. 34–44.
4. *Tarasov V.H.* Исследование систем массового обслуживания с гиперэкспоненциальными входными распределениями // Проблемы передачи информации. – 2016. – Т. 52. – № 1. – С. 16–26.
 5. *Tarasov V.H., Bakhareva N.F., Litulina L.V.* Математическая модель телетрафика на основе системы G/M/1 и результаты вычислительных экспериментов // Информационные технологии. – 2016. – Т. 22. – № 2. – С. 121–126.
 6. *Tarasov V.H., Карташевский И.В.* Способы аппроксимации входных распределений для системы G/G/1 и анализ полученных результатов // Системы управления и информационные технологии. – 2015. – № 3. – С. 182–185.
 7. *Алиев Т.И.* Аппроксимация вероятностных распределений в моделях массового обслуживания // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2013. – № 2(84). – С. 88–93.
 8. *Whitt W.* Approximating a point process by a renewal process, I: two basic methods // Operation Research. – 1982. – Vol. 32. – No. 1. – P. 125–147.
 9. *Myskja A.* An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals // Teletraffic and datatraffic in a Period of Change, ITC-13. – Elsevier Science Publishers. – 1991. – P. 683–688.
 10. *Jennings O.B. & Pender J.* Comparisons of ticket and standard queues // Queueing Systems. – 2016. – vol. 84. – No. 1. – Pp. 145–202.
 11. *Tarasov V.H., Горелов Г.А., Ушаков Ю.А.* Восстановление моментных характеристик распределения интервалов между пакетами входящего трафика // Инфокоммуникационные технологии. – 2014. – № 2. – С. 40–44.
 12. *Tarasov V.H., Bakhareva N.F.* Обобщенная двумерная диффузионная модель массового обслуживания типа GI/G/1 // Телекоммуникации. – 2009. – № 7. – С. 2–8.
 13. *Tarasov V.H.* Вероятностное компьютерное моделирование сложных систем. – Самара: СНЦ РАН, 2002.
 14. *Gromoll H.C., Terwilliger B. & Zwart B.* Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times // Queueing Systems. – 2018. – Vol. 89. – No. 3. – Pp. 213–241.
 15. *Legros B.* M/G/1 queue with event-dependent arrival rates // Queueing Systems. – 2018. – Vol. 89. – No. 3. – pp. 269–301.
 16. *Jennings O.B. & Pender J.* Comparisons of ticket and standard queues // Queueing Systems. – 2016. – Vol. 84. – No. 1. – Pp. 145–202.

Статья поступила в редакцию 18 сентября 2019 года

TELETRAFIC MODELS BASED ON DUAL SYSTEMS WITH HYPEREXPONENTIAL AND ERLANG DISTRIBUTIONS

V.N. Tarasov, N.F. Bakhareva, E.G. Akhmetshina

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics
23, L. Tolstogo st., Samara, 443010, Russia

E-mail: veniamin_tarasov@mail.ru, nadin1956_04@inbox.ru, elyamalusha@mail.ru

Abstract. This paper presents the results of studies on queueing systems (QS) $H_2/E_2/1$ and $E_2/H_2/1$ with second-order hyperexponential and Erlang input distributions. Considered QS are of type G/G/1. The use of these higher-order distribution laws is hindered by increasing computational complexity. For such second-order distribution laws, the classical method of spectral decomposition of the solution of the Lindley integral equation for G/G/1 systems makes it possible to obtain a solution in closed form. The article presents

Veniamin N. Tarasov (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.
Nadezhda F. Bakhareva (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.
Eleonora G. Akhmetshina, graduate student.

the obtained spectral decompositions of the solution of the Lindley integral equation for the considered systems and the formula for the average waiting time in the queue. The adequacy of the results is confirmed by the correct use of the classical method of spectral decomposition and the results of numerical simulation. For practical application of the results obtained, the probability theory moments method is used. Systems of the G/G/1 type are widely used in the theory of teletraffic when modeling data transmission systems. For example, according to the average waiting time in the queue, packet delays in packet switching networks are estimated when they are modeled using QS.

Keywords: *hyperexponential and erlangian distribution laws, queuing systems, method of spectral decomposition.*

REFERENCES

1. Kleinrock L. Teoriya massovogo obsluzhivaniya [Queuing theory]. Moscow, Mashinostroenie Publ, 1979. 432 pp. (In Russian).
2. Brannstrom N. A Queuing Theory analysis of wireless radio systems. Applied to HS-DSCH. Lulea university of technology. 2004. 79 pp.
3. Tarasov V.N., Akhmetshina E.G., Kada Othmane. Features of application of hyperexponential and hypererlangian input distributions in queuing systems // Vestn. SamGTU. Ser. Tekhn. Nauki. 2019. Vol. 61. no. 1. Pp. 34–44 (In Russian).
4. Tarasov V.N. Analysis of queues with hyperexponential arrival distributions // Problemy peredachi informacii, 2016. no. 1 (55). Pp. 14–23 (In Russian).
5. Tarasov V.N., Bakhareva N.F., Lipilina L.V. Mathematical model of teletraffic on the based G/M/1 system and results of computational experiment // Informacionnye tehnologii. 2016. Vol. 22, no. 2. Pp. 121–126 (In Russian).
6. Tarasov V.N., Kartashevskiy I.V. Methods for approximating input distributions for the G/G/1 system and analysis of the results // Sistemy upravleniya i informatsionnye tehnologii. 2015. no. 3. Pp. 182–185 (In Russian).
7. Aliev T.I. Approximation of probability distributions in queuing models // Nauchno-tekhnicheskij vestnik informacionnyh tekhnologij, mekhaniki i optiki. 2013. no. 2(84). Pp. 88–93 (In Russian).
8. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process: two basic methods // Operation Research, 1982. no. 1(30). Pp. 125–147.
9. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals // Teletraffic and datatraffic in a Period of Change, ITC-13. Elsevier Science Publishers, 1991. Pp. 683–688.
10. Jennings O.B. & Pender J. Comparisons of ticket and standard queues // Queueing Systems, 2016. no. 1 (84). Pp. 145–202.
11. Tarasov V.N., Gorelov G.A., Ushakov Y.A. Restoring moment distribution characteristics interval between packets of incoming traffic // Informacionnye tehnologii. 2014. no. 2. Pp. 40–44 (In Russian).
12. Tarasov V.N., Bahareva N.F. A generalized two-dimensional diffusion queuing model of the GI/G/1 type // Telekommunikacii. 2009. no. 7. Pp. 2–8 (In Russian).
13. Tarasov V.N. Probabilistic computer modeling of complex systems, Samara, SNC RAN. 2002. (In Russian).
14. Gromoll H.C., Terwilliger B. & Zwart B. Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times. Queueing Systems, 2018. Vol. 89, no. 3, pp. 213–241.
15. Legros B. M/G/1 queue with event-dependent arrival rates. Queueing Systems, 2018. Vol. 89, no. 3, pp. 269–301.
16. Jennings O.B. & Pender J. Comparisons of ticket and standard queues. Queueing Systems, 2016. Vol. 84, no. 1, pp. 145–202.