

УДК 681.5

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫМ ПРОЦЕССОМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С КОМБИНИРОВАННЫМИ ВНЕШНИМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ ПО ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЯМ*

Н.А. Ильина, Э.Я. Рапопорт

Самарский государственный технический университет
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

E-mail: ilina.natalyaa@yandex.ru; edgar.rapoport@mail.ru

Аннотация. *Предлагается постановка и метод решения задачи оптимального по быстродействию управления процессом нагрева бесконечной пластины с двумя внешними воздействиями по граничным условиям, в качестве одного из которых рассматривается граничное сосредоточенное управление по величине внешнего теплового потока, а в роли второго фигурирует тепловой поток, определяемый заданной температурой окружающей среды. Решение задачи производится в условиях заданной точности равномерного приближения конечного температурного распределения по толщине пластины к заданному. Применяется метод конечных интегральных преобразований для поиска вход-выходной характеристики объекта с распределенными параметрами с двумя внешними граничными воздействиями. Предлагаемый подход к решению данной задачи использует предварительную параметризацию управляющих воздействий на основе аналитических условий оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина и последующую редукцию к задаче полубесконечной оптимизации, решение которой находится с помощью альтернансного метода. Альтернансные свойства конечного результирующего температурного состояния в конце оптимального процесса приводят к базовой системе соотношений, которая при наличии дополнительной информации о форме кривой температурного распределения сводится к системе уравнений, разрешаемой относительно всех искомым неизвестных. Приводится представляющий самостоятельный интерес пример решения задачи оптимального по быстродействию управления температурным полем неограниченной пластины с двумя граничными воздействиями.*

Ключевые слова: *оптимальное управление, альтернансный метод, задача полубесконечной оптимизации, процесс нестационарной теплопроводности.*

Для повышения эффективности технологических процессов ставится задача оптимизации режимов нагрева металлических полуфабрикатов перед последующими операциями пластической деформации в производственных комплексах перед обработкой металла давлением [1].

Решение этой проблемы требует использования методов теории управления объектами с распределенными параметрами.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 18-08-00048а).

*Ильина Наталья Андреевна, магистрантка.
Рапопорт Эдгар Яковлевич (д.т.н., проф.), профессор кафедры «Автоматика и управление в технических системах».*

Постановка задачи оптимального управления

В качестве объекта управления рассматривается процесс нагрева неограниченной пластины. Температурное поле пластины $Q(x, t)$ описывается в зависимости от пространственной координаты x и времени t линейным пространственно-одномерным однородным уравнением теплопроводности следующего вида [2]:

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2}, \quad x \in [0, R]; t \in [0, T]. \quad (1)$$

Здесь a – коэффициент температуропроводности; R – толщина пластины.

Начальное распределение принимается равномерным по всему объему пластины и, в частности, равным нулю:

$$Q(x, 0) = Q_0(x) = Q_0 = const = 0. \quad (2)$$

Типовые граничные условия для модели объекта (1)–(2) в общем случае имеют вид [3]

$$\alpha_0 Q(0, t) + \beta_0 \frac{\partial Q(0, t)}{\partial x} = g_{01}(t), \quad t > 0; \quad (3)$$

$$\alpha_1 Q(R, t) + \beta_1 \frac{\partial Q(R, t)}{\partial x} = g_{11}(t), \quad t > 0, \quad (4)$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ – заданные коэффициенты для левой и правой границ пластины;

$g_{01}(t), g_{11}(t)$ – сосредоточенные внешние воздействия на левой и правой границе.

Если принять в (3), (4) $\alpha_0 = \alpha_1 = 0, \beta_0 = -\lambda, \beta_1 = \lambda$, то получим:

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{\partial Q(0, t)}{\partial x} &= g_{01}(t); \\ \lambda \frac{\partial Q(R, t)}{\partial x} &= g_{11}(t), \end{aligned} \quad (5)$$

где λ – коэффициент теплопроводности.

Соотношения (5) соответствуют граничным условиям 2-го рода [2]. Если в роли $g_{01}(t), g_{11}(t)$ рассматриваются сосредоточенные управляющие воздействия, то задача (1), (2), (5) описывает процесс управления температурным полем неограниченной пластины с двуканальным граничным управлением по величине внешнего теплового потока на ее поверхностях. Математическая постановка задачи оптимального по быстродействию управления объектом вида (1), (2), (5) и метод ее решения представлены в [4].

В случае, когда в (3), (4) $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = \alpha, \beta_0 = -\lambda, \beta_1 = \lambda, g_{11}(t) = Q_n(t) = 0$, получим вместо (5):

$$-\lambda \frac{\partial Q(0, t)}{\partial x} = g_{01}(t); \quad \alpha Q(R, t) + \lambda \frac{\partial Q(R, t)}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

что соответствует граничным условиям 2-го и 3-го рода на различных поверхно-

стях пластины с одним граничным управлением $g_{01}(t)$, сосредоточенным в точке $x = 0$, и тепловыми потерями на границе $x=R$ по закону конвективного теплообмена с коэффициентом теплопередачи α в окружающую среду с заданной температурой $Q_n(t) = 0$ (рис. 1).

Граничное управляющее воздействие $g_{01}(t)$ изменяется в заранее заданных пределах:

$$g_{01\min} \leq g_{01}(t) \leq g_{01\max}. \quad (7)$$

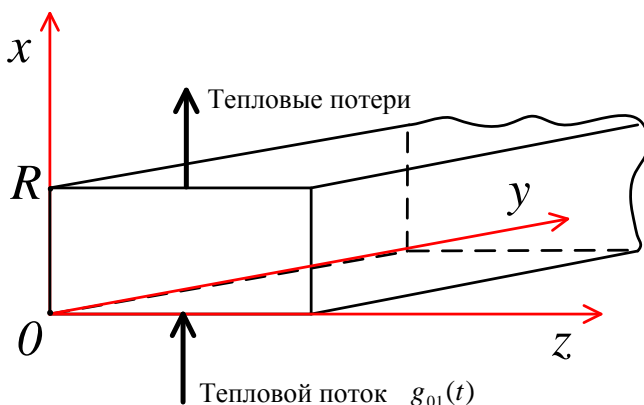


Рис. 1. Иллюстрация граничных воздействий

В момент T окончания процесса управления требуется обеспечить заданную точность ε равномерного приближения конечного распределения температуры $Q(x, T)$ к заданному $Q^*(x) = Q^* = const > Q_0$.

$$\max_{x \in [0, R]} |Q(x, T) - Q^*| \leq \varepsilon. \quad (8)$$

В качестве критерия оптимальности выступает величина T в виде следующего интегрального функционала качества:

$$I = \int_0^T dt = T \rightarrow \min_{g_{01}(t)}. \quad (9)$$

Метод конечных интегральных преобразований [3, 5–6] приводит к описанию температурного поля $Q(x, t)$ в зависимости от пространственной координаты $x \in [0, R]$ и времени $t \in [0, T]$ в форме его разложения в сходящийся ряд по собственным функциям $\phi(\mu_n, x)$ начально-краевой задачи (1), (2), (6), где μ_n^2 – собственные числа с коэффициентами, в роли которых выступают временные моды $\bar{Q}_n(\mu_n, t)$ функции $Q(x, t)$:

$$Q(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{Q}_n(\mu_n, t) \phi(\mu_n, x). \quad (10)$$

Выражение для $Q(x, t)$ в форме (10) находится в явном виде по следующему

алгоритму [3]:

1. Определяются путем решения задачи Штурма – Лиувилля

$$\begin{cases} a \frac{d^2 \phi(\mu, x)}{dx^2} = -\mu^2 \phi(\mu, x); \\ \frac{d\phi(\mu, 0)}{dx} = 0; \\ \frac{d\phi(\mu, R)}{dx} + \frac{\alpha}{\lambda} \phi(\mu, R) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

ортонормированные собственные функции модели объекта (1), (2), (5):

$$\varphi_n(\mu_n, x) = \frac{1}{E_n} \cdot \cos\left(\eta_n \frac{x}{R}\right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

где собственные числа μ_n^2 , нормирующие множители $\frac{1}{E_n}$ и числа η_n , определяются соотношениями

$$\eta_n \cdot \operatorname{tg} \eta_n - Bi = 0; \quad Bi = \frac{\alpha \cdot R}{\lambda}; \quad \mu_n = \frac{\sqrt{a}}{R} \eta_n; \quad (13)$$

$$E_n = \sqrt{\frac{a}{R} \cdot \frac{2 \eta_n}{\eta_n + \sin \eta_n \cos \eta_n}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

2. Находится весовая функция конечного интегрального преобразования:

$$r(x) = \frac{1}{a}. \quad (14)$$

3. Составляется бесконечная система дифференциальных уравнений для временных мод $\bar{Q}_n(\mu_n, t)$:

$$\frac{d\bar{Q}_n(\mu_n, t)}{dt} = -\mu_n^2 \bar{Q}_n(\mu_n, t) + \frac{1}{\lambda E_n} g_{01}(t), \quad n = 1, 2, \dots; \quad (15)$$

$$\bar{Q}_n(\mu_n, 0) = \bar{Q}_0(\mu_n) = 0, \quad (16)$$

решение которой имеет следующий вид:

$$\bar{Q}_n(\mu_n, t) = \int_0^t V(\mu_n, \tau) G_n^*(\mu_n, t - \tau) d\tau, \quad n = 1, 2, \dots \quad (17)$$

4. Определяется функция $v(\mu_n, t)$ в (17), учитывающая граничные условия (5), и функция Грина $G_n^*(\mu_n, t)$, представляющая собой решение каждого из уравнений (15) на воздействие $g_{01}(t)$ вида δ -функции при нулевых начальных (16) и однородных граничных условиях:

$$V(\mu_n, t) = \frac{1}{\lambda} g_{01}(t) \varphi(\mu_n, x), \quad n = 1, 2, \dots; \quad (18)$$

$$G_n^*(\mu_n, t) = \exp\left(-\eta_n^2 \frac{a}{R^2} t\right).$$

Подставляя (12), (13), (17), (18) в (10), получаем итоговую зависимость температурного поля от внешних воздействий по граничным условиям:

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{Q}_n(\mu_n, t) \varphi(\mu_n, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\mu_n, x) \int_0^t V(\mu_n, \tau) G_n^*(\mu_n, (t - \tau)) d\tau =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{\lambda \cdot R} \cdot \frac{2\eta_n}{\eta_n + \sin \eta_n \cos \eta_n} \cos\left(\eta_n \frac{x}{R}\right) \int_0^t g_{01}(\tau) e^{-\eta_n^2 \frac{a}{R^2}(t-\tau)} d\tau. \quad (19)$$

Выражение (19) определяет в форме свертки по времени выходное температурное распределение, реализуемое за счет управляющего воздействия $g_{01}(t)$ по граничным условиям (5) с конвективными тепловыми потерями в окружающую среду с нулевой температурой.

Таким образом, может быть сформулирована следующая задача оптимального по быстродействию управления. Требуется найти такое программное управляющее воздействие $g_{01}^*(t)$, стесненное ограничением (7), которое переводит объект управления (15) из заданного начального состояния (16) в требуемое конечное согласно (8), где $Q(x, t)$ определяется выражениями (13)–(19), при минимальном значении критерия оптимальности (9).

Параметризация управляющих воздействий и редукция к задаче полубесконечной оптимизации

Предварительная параметризация управляющих воздействий позволяет получить их параметрическое представление с точностью до вектора искомых параметров.

Согласно технологии принципа максимума Понтрягина [7–9], распространяемого на бесконечномерный объект управления (15), (16), вводится функция Понтрягина:

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(t) f_n(Q, g_{01}, t) = \psi_0(t) f_0(Q, g_{01}, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t) f_n(Q, g_{01}, t), \quad (20)$$

где f_0 – подынтегральная функция критерия оптимальности (9), равная 1;

$f_n(Q, g_{01}, t)$ – правые части уравнений модели объекта (15);

$\psi_0(t)$ – сопряженная переменная, которая принимается равной -1 ;

$\psi_n(t)$ – сопряженные переменные, которые должны удовлетворять сопряженной системе уравнений:

$$\frac{d\psi_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q_j}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (21)$$

На основании (9), (15) функция Понтрягина (20) принимает следующий вид:

$$H = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t) \left[-\mu_n^2 \bar{Q}_n(\mu_n, t) + \frac{1}{\lambda E_n} g_{01}(t) \right]. \quad (22)$$

Функция Понтрягина, рассматриваемая как функция одной переменной g_{01} , при соответствующих оптимальному процессу значениях $\bar{Q}_1^*(t), \dots, \bar{Q}_{N_0}^*(t)$ и сопряженных переменных $\psi_1^*(t), \dots, \psi_{N_0}^*(t)$ достигает своего максимума по этой переменной именно при оптимальном управлении в любой момент времени [7–9]:

$$\max_{g_{01}(t) \in [g_{01 \min}, g_{01 \max}]} H(\bar{Q}, \psi^*, g_{01}, t) = H(\bar{Q}^*, \psi^*, g_{01}^*, t).$$

Найдем решение сопряженной системы (21), которая принимает следующий вид:

$$\frac{d\psi_n}{dt} = \mu_n^2 \psi_n(t), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (23)$$

независимый от $g_{01}(t)$ и $\bar{Q}_n(\mu_n, t)$.

Матрица постоянных коэффициентов этой системы является диагональной, и каждое из уравнений разрешается независимо от других, что определяет в итоге сопряженные переменные в виде экспоненциальных функций времени:

$$\psi_n(t) = \psi_n^* e^{-\mu_n^2(T-t)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (24)$$

где $\psi_n^* = \psi_n(T)$ – конечные значения сопряженных переменных.

Подставляя (24) в (22), получим линейную относительно управляющего воздействия функцию Понтрягина, условие достижения максимума которой на оптимальном управлении приводит к его определению в форме релейной функции времени, попеременно принимающей свои допустимые значения в (7):

$$g_{01}^*(t) = \frac{g_{01 \max} + g_{01 \min}}{2} \pm \frac{g_{01 \max} - g_{01 \min}}{2} \text{sign} M_1(t), \quad (25)$$

где $M_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda E_n} g_{01}(t) \cdot \psi_n^* \cdot \exp(-\mu_n^2(T-t))$, и бесконечная сумма экспонент в выражении для $M_1(t)$ нигде тождественно не равна нулю [8].

В соответствии с (25) $g_{01}^*(t)$ определяется в параметризованной форме $g_{01}^*(\Delta^{(N_0)}, t)$ с точностью до вектора $\Delta^{(N_0)} = (\Delta_i^{(N_0)})$, $i = \overline{1, N_0}$ длительностей $\Delta_i^{(N_0)}$ интервалов постоянства, общее число которых равно N_0 :

$$g_{01}^*(\Delta_0^{(N_0)}, t) = \frac{g_{01_{max}} + g_{01_{min}}}{2} + (-1)^{j+1} \frac{g_{01_{max}} - g_{01_{min}}}{2};$$

$$\sum_{i=0}^{j-1} \Delta_i^{(N_0)} < t < \sum_{i=0}^j \Delta_i^{(N_0)}, j = 1, N_0, \Delta_0^{(N_0)} = 0. \quad (26)$$

В пределах первого интервала постоянства согласно ограничениям (7) здесь и далее принимается $g_{01}^*(t) = g_{01_{max}}$ в рассматриваемой задаче нагрева пластины до температуры $Q^* > Q_0$. Релейный характер двухинтервального оптимального по быстродействию управления представлен на рис. 2.

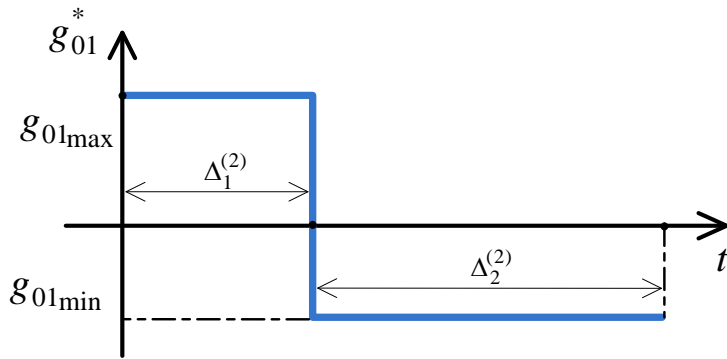


Рис. 2. Вид оптимального по быстродействию управления при $N_0 = 2$

В соответствии с параметризованной формой управляющего воздействия вида (26) выражение (19) также будет иметь параметризованную форму представления конечного температурного состояния $Q(x, \Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)})$ после подстановки (26) в (19) и вычисления интегралов при $t = T$.

В частности, ограничиваясь здесь и далее широко распространенным на практике случаем двухинтервального управления при $N_0 = 2$, будем иметь в результате:

$$Q(x, \Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)}) = \frac{R}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\eta_n^2} \cdot \frac{2\eta_n}{\eta_n + \sin \eta_n \cos \eta_n} \cdot \cos\left(\eta_n \frac{x}{R}\right) \times$$

$$\times \left[g_{01_{max}} \left(\exp\left(-\eta_n^2 \frac{a}{R^2} \Delta_2\right) - \right. \right. \quad (27)$$

$$\left. \left. - \exp\left(-\eta_n^2 \frac{a}{R^2} (\Delta_1 + \Delta_2)\right) \right) + g_{01_{min}} \left(1 - \exp\left(-\eta_n^2 \frac{a}{R^2} \Delta_2\right) \right) \right].$$

При полученном параметрическом представлении искомых управляющих воздействий можно представить критерий оптимальности (9) в виде простой суммы длительностей отдельных интервалов постоянства оптимального управления:

$$I = \Delta_1^{(2)} + \Delta_2^{(2)} \rightarrow \min, \quad (28)$$

а условие (8) оценки конечного распределения температур будет иметь вид

$$\Phi(\Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)}) = \max_{x \in [0, R]} \left| Q(x, \Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)}) - Q^* \right| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (29)$$

Здесь $Q(x, \Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)})$ определяется по формуле (27). Условие (29) означает, что абсолютные отклонения от требуемого состояния температуры пластины оказываются либо строго меньшими ε , либо строго равными ε в отдельных точках на отрезке $[0, R] \ni x$.

Таким образом, производится точная редукция исходной задачи к задаче полубесконечной оптимизации (ЗПО) на минимум целевой функции (28) конечного числа переменных $\Delta_j^{(2)}, j = 1, 2$ с бесконечным числом ограничений (29), порожаемых требованием обеспечения заданной точности равномерного приближения во всех точках $x \in [0, R]$ [10].

Решение задачи полубесконечной оптимизации альтернансным методом

Задача (28)–(29) разрешима в условиях $N_0 = 2$ не при всех ε , а только для $\varepsilon \geq \varepsilon_{\min}^{(2)}$ в (29), где $\varepsilon_{\min}^{(2)}$ – минимально достижимая величина ε в рассматриваемом классе граничных управлений:

$$\varepsilon_{\min}^{(2)} = \min_{\Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)}} \left\{ \max_{x \in [0, R]} \left| Q(x, \Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)}) - Q^* \right| \right\}. \quad (30)$$

Решение $\Delta_j^{(2)}, j = 1, 2$ задачи (28)–(29) при достаточно малостеснительных допущениях обладает базовыми альтернансными свойствами [8, 10–11].

Основное свойство заключается в том, что число точек $x_j^0 \in [0, R], j = 1, R_x$, в которых достигаются предельно допустимые абсолютные отклонения $Q(x, \Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)})$ от Q^* , равные ε , всегда оказывается равным числу всех неизвестных в ЗПО (28), (29). В качестве неизвестных фигурируют длительности интервалов постоянства $\Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)}$ оптимального управления и величина минимакса $\varepsilon_{\min}^{(2)}$ в случае $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$ в (29).

Таким образом, на искомом решении $\Delta^{(2)} = (\Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)})$ задачи быстродействия выполняются R_x равенств вида

$$\left| Q(x_j^0, \Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)}) - Q^* \right| = \varepsilon, \quad j = \overline{1, R_x}, \quad (31)$$

где

$$R_x = \begin{cases} s, & \varepsilon > \varepsilon_{\min}^{(2)}; \\ s + 1, & \varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}. \end{cases} \quad (32)$$

Здесь s – число свободно варьируемых параметров в составе $\Delta_j^{(N_0)}$, $j = 1, 2$. В условиях двухинтервального характера управления при $N_0 = 2$ имеем $s = 2$ в предельном случае $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$. Следовательно, при $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$ число уравнений (31) будет равно

$$R_x = s + 1 = 3 \quad (33)$$

при наличии трех неизвестных $\Delta_1^{(2)}$, $\Delta_2^{(2)}$, $\varepsilon_{\min}^{(2)}$, а при заранее фиксированной величине $\varepsilon > \varepsilon_{\min}^{(2)}$ это число сокращается до двух при двух неизвестных $\Delta_1^{(2)}$, $\Delta_2^{(2)}$.

Таким образом, соотношения (31) с учетом (32)–(33) оказываются замкнутыми относительно всех параметров процесса управления, что указывает на возможность решения исходной задачи оптимального управления.

Основное затруднение теперь состоит в том, что равенствам (31) формально соответствует множество вариантов по форме кривой пространственного распределения $Q(x, \Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)})$. Для однозначного определения вида этой кривой нужно установить знаки разностей $Q(x_j^0, \Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)}) - Q^*$ в каждом из уравнений (31) и найти координаты точек x_j^0 . Эта задача может быть решена только при известной конфигурации кривой температурного распределения $Q(x_j^0, \Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)}) - Q^*$ на отрезке $[0, R] \ni x$ при двухинтервальном граничном управлении, устанавливаемой на основании физических закономерностей процессов нестационарной теплопроводности в зависимости от величины ε .

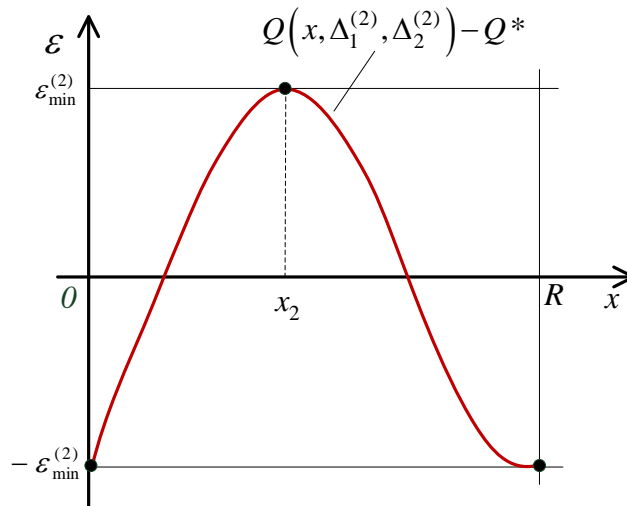


Рис. 3. Форма кривой результирующего температурного распределения при $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$

Анализ этих закономерностей [10] приводит к однозначно фиксируемому варианту по форме кривой $Q(x_j^0, \Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)}) - Q^*$ в условиях $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$ в (31), представленному на рис. 3.

Приведенной форме кривой результирующего температурного распределения, указанной на рис. 3, отвечает система уравнений (34), составляемая на основании равенств (31) и дополняемая условиями существования экстремума функции $Q(x_j^0, \Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)}) - Q^*$ во внутренней точке x_2^0 отрезка $[0, R]$ для определения ее координат.

$$\begin{aligned} Q(0, \Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)}) - Q^* &= -\varepsilon_{\min}^{(2)} ; \\ Q(x_2^0, \Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)}) - Q^* &= \varepsilon_{\min}^{(2)} ; \\ Q(R, \Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)}) - Q^* &= -\varepsilon_{\min}^{(2)} ; \\ \frac{\partial Q(x_2^0, \Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)})}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

В этом случае максимально допустимые отклонения $\varepsilon_{\min}^{(2)}$ оказываются знакопереодночередующимися в последовательно расположенных точках $x_j^0 \in [0, R]$, $j = 1, R_x$, образующих чебышевский альтернанс [8].

Система (34) четырех уравнений решается стандартными численными методами относительно четырех неизвестных $\Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)}, \varepsilon_{\min}^{(2)}, x_2^0$.

Численные результаты решения системы уравнений (34), полученные в программной среде MATLAB [12–15] для исходных данных, указанных в табл. 1, приведены в табл. 2 и на рис. 4.

Таблица 1

Исходные данные для расчета

Материал	Титановый сплав
Толщина пластины R , м	0,2
Начальная температура Q_0 , °C	0
Требуемая конечная температура Q^* , °C	460
Коэффициент теплопроводности титанового сплава λ , Вт / м ² · °C	35
Коэффициент температуропроводности a , м ² / с	$4,34 \cdot 10^{-6}$
Коэффициент теплопередачи α , Вт / м ² · °C	260
Максимальная величина теплового потока $g_{01_{\max}}$, Вт / м ²	416000
Минимальная величина теплового потока $g_{01_{\min}}$, Вт / м ²	-124800

Расчетные результаты

$\Delta_1^{(2)}, \text{с}$	$\Delta_2^{(2)}, \text{с}$	$\varepsilon_{\min}^{(2)}, ^\circ\text{C}$	$x_2^0, \text{М}$
1336	871	57,7	0,0785

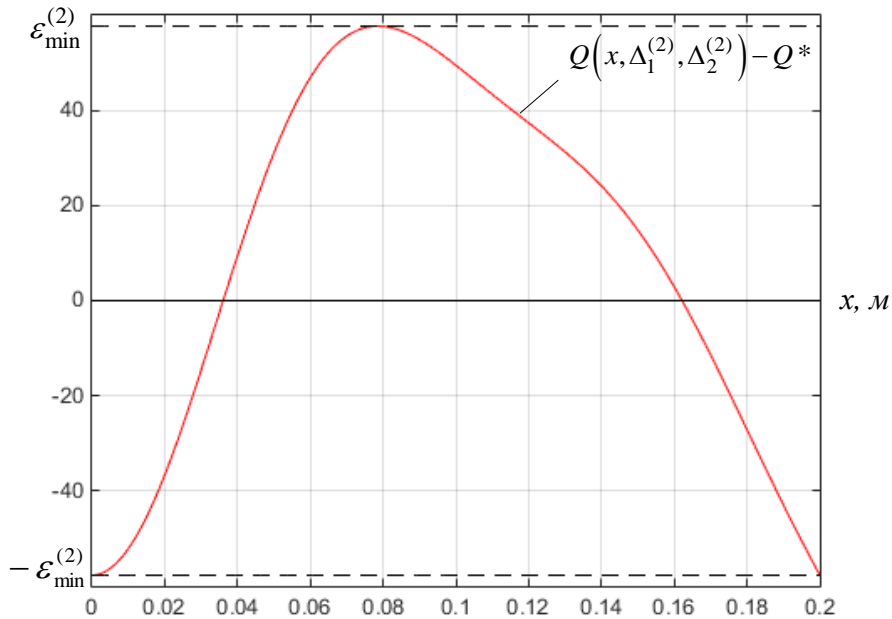


Рис. 4. Кривая температурного распределения при $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$, полученная при расчетах

Решение систем уравнений производилось с учетом первых 10 членов бесконечного ряда в (20).

Как видно из рис. 4, температурное распределение в конце оптимального процесса соответствует предположению на рис. 3.

Теперь, когда величина $\varepsilon_{\min}^{(2)}$ найдена, вернемся к случаю, когда $\varepsilon > \varepsilon_{\min}^{(2)}$ в (31). Тогда число точек R_x и, следовательно, число уравнений согласно (32) будет равным

$$R_x = s = 2 .$$

Можно показать, что вид кривой результирующего температурного распределения будет совпадать с кривой, представленной на рис. 3, за тем лишь исключением, что отклонение в точке $x=R$ не достигает предельно допустимой величины $|\varepsilon_{\min}^{(2)}|$ [8, 10]. На этом основании соответствующая система уравнений будет выглядеть следующим образом вместо (34):

$$\begin{aligned}
 Q(0, \Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)}) - Q^* &= -\varepsilon; \\
 Q(x_2^0, \Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)}) - Q^* &= \varepsilon; \\
 \frac{\partial Q(x_2^0, \Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)})}{\partial x} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

Исходя из условия $\varepsilon > \varepsilon_{\min}^{(2)}$ примем величину $\varepsilon = 80 \text{ }^\circ\text{C}$ в (35) и найдем решение этой системы из трех уравнений с тремя неизвестными: $\Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)}, x_2^0$. Результаты решения представлены в табл. 3, кривая $Q(x_j^0, \Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)}) - Q^*$ изображена на рис. 5.

Таблица 3

Расчетные результаты при $\varepsilon > \varepsilon_{\min}^{(2)}$

$\Delta_1^{(2)}, \text{с}$	$\Delta_2^{(2)}, \text{с}$	$x_2^0, \text{м}$
1690	1412	0,127

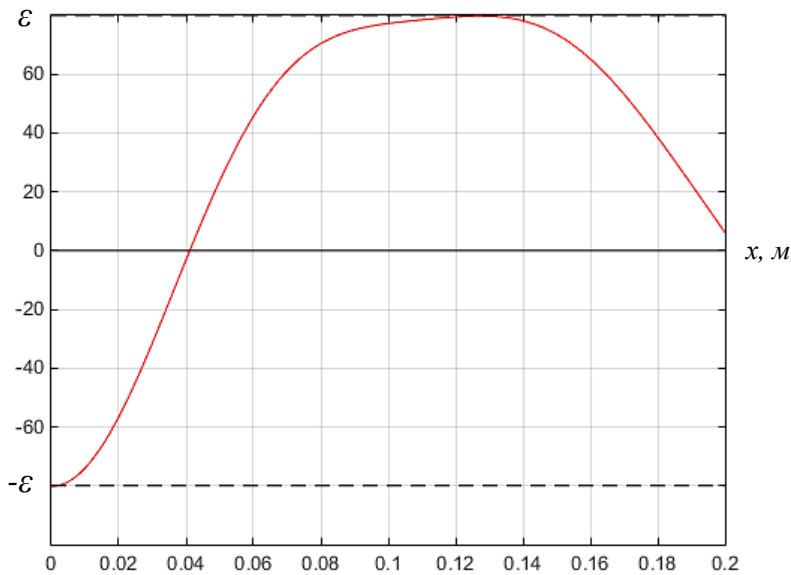


Рис. 5. Кривая температурного распределения при $\varepsilon > \varepsilon_{\min}^{(2)}$

При тепловой изоляции границы $x=R$, то есть при отсутствии тепловых потерь на этой границе, следует принять в (3), (4) $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, $\beta_0 = -\lambda$, $\beta_1 = \lambda$, $g_{01}(t) = g_{01}(t)$, $g_{11}(t) = 0$, и граничные условия записываются в следующем виде в отличие от (5) и (6):

$$\begin{aligned}
-\lambda \frac{\partial Q(0,t)}{\partial x} &= g_{01}(t); \\
\lambda \frac{\partial Q(R,t)}{\partial x} &= 0.
\end{aligned}
\tag{36}$$

Тогда метод конечных интегральных преобразований по вышеприведенной схеме (10)–(19) опять приводит к описанию управляемой функции $Q(x,t)$ в (1) в зависимости от пространственной координаты $x \in [0, R]$ и времени $t \in [0, T]$ бесконечной системой дифференциальных уравнений (15), (16) для временных мод $\bar{Q}_n(\mu_n, t)$ разложения $Q(x,t)$ в сходящийся в среднем ряд (10) по собственным функциям $\varphi_n(\mu_n, x)$, но теперь уже с отличающимися от (12), (13) собственными функциями и собственными числами [3]:

$$\begin{aligned}
\varphi_n(\mu_n, x) &= \frac{1}{E_n} \cos\left(\pi n \frac{x}{R}\right); \quad \mu_n = \frac{\sqrt{a}}{R} \pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \\
E_n &= \begin{cases} \sqrt{\frac{R}{a}}, & n = 0; \\ \sqrt{\frac{R}{2a}}, & n = 1, 2, \dots, \end{cases}
\end{aligned}
\tag{37}$$

что приводит к следующей зависимости температурного поля от управляющего воздействия:

$$Q(x,t) = \frac{1}{Rc\gamma} \int_0^t g_{01}(\tau) d\tau + \frac{2}{Rc\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\pi n \frac{x}{R}\right) \cdot \int_0^t g_{01}(\tau) \cdot e^{-\mu_n^2(t-\tau)} d\tau,
\tag{38}$$

не совпадающей с (19).

Оптимальное управление для рассматриваемой задачи также определяется в форме релейной функции времени (25), откуда следует, что параметризованная форма конечного температурного состояния представляется с учетом (26), (38) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
Q(x, \Delta_0^{(2)}, \Delta_1^{(2)}) &= g_{01_{\max}} \Lambda_{01}(x, \Delta_{01}^{(2)} + \Delta_{02}^{(2)}) + \\
&+ (g_{01_{\min}} - g_{01_{\max}}) \Lambda_{01}(x, \Delta_{02}^{(2)}),
\end{aligned}
\tag{39}$$

где

$$\Lambda_{01}(x,t) = \frac{R}{\lambda} \left[\frac{at}{R^2} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{x}{R} \right)^2 - \frac{1}{3} \right) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{\pi nx}{R}\right) \cdot e^{-\mu_n^2 t} \right].$$

Схема применения альтернансного метода повторяет предыдущую. Следовательно, итоговая система уравнений будет аналогична (34) с тем отличием, что $Q(x, \Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)})$ определяется по формуле (39).

Численные результаты решения для данного случая представлены в табл. 4,

а кривая температурного распределения управляемой величины в конце оптимального процесса с отклонениями $\varepsilon_{\min}^{(2)}$ от заданного состояния показана на рис. 6.

Таблица 4

**Расчетные результаты при одноканальном управлении
со стороны теплового потока $g_{01}(t)$**

$\Delta_{01}^{(2)}, \text{с}$	$\Delta_{02}^{(2)}, \text{с}$	$\varepsilon_{\min}^{(2)}, ^\circ\text{C}$	$x_2^0, \text{М}$
4031	892	13	0,065

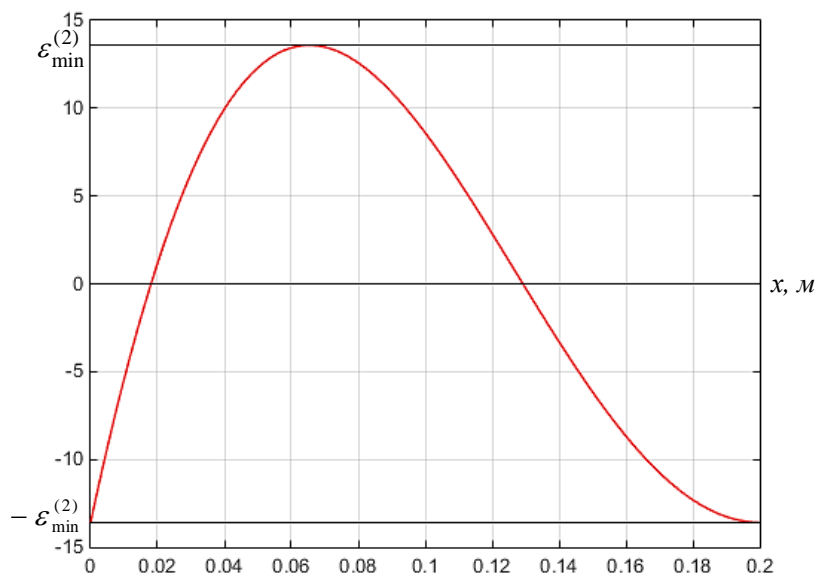


Рис. 6. Кривая результирующего температурного распределения при отсутствии влияния тепловых потерь на границе $x=R$

Как следует из сравнения расчетных результатов, представленных на рис. 4 и рис. 6, тепловые потери оказывают существенное влияние на величину минимаксного отклонения $\varepsilon_{\min}^{(2)}$, увеличивая его в 4 раза.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бутковский А.Г., Малый С.А., Андреев Ю.Н. Управление нагревом металла. – М.: Металлургия, 1981. – 272 с.
2. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа, 2001. – 550 с.
3. Рапопорт Э.Я. Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. – М.: Высшая школа, 2003. – 299 с.
4. Рапопорт Э.Я., Ильина Н.А. Двухканальное оптимальное по быстродействию управление процессом нестационарной теплопроводности // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Технические науки. – 2018. – № 1(57). – С. 7–18.
5. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Наука, 1970. – 707 с.
6. Мартыненко Н.А., Пустыльников Л.М. Конечные интегральные преобразования и их

- применение к исследованию систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1986. – 303 с.
7. *Понтрягин Л.С.* Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – 2-е изд. – М.: Наука, 1969. – 384 с.
 8. *Рапопорт Э.Я.* Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. – М.: Высшая школа, 2009. – 677 с.
 9. *Понтелеев А.В., Бортаковский А.С.* Теория управления в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2017.
 10. *Рапопорт Э.Я.* Альтернативный метод в прикладных задачах оптимизации. – М.: Наука, 2000. – 336 с.
 11. *Рапопорт Э.Я., Плишвицева Ю.Э.* Алгоритмически точный метод параметрической оптимизации в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами // Автоматизация. – 2009. – Т. 45. – № 5. – С. 103–112.
 12. *Дьяконов В.П.* MATLAB. Полный самоучитель. – М.: ДМК Пресс, 2012. – 768 с.
 13. *Потемкин В.Г.* Введение в Matlab [Электронный ресурс]. – М.: Softline Co, 2001. – Режим доступа: <http://matlab.exponenta.ru/ml/book1/index.php> (accessed March 02, 2019).
 14. MATLAB. Exponenta [Электронный ресурс]: Optimization Toolbox 2.2 Руководство пользователя / авт. А.Г. Трифионов. – Электрон. и текстовые данные. – Режим доступа: http://matlab.exponenta.ru/optimiz/book_1/ (accessed March 02, 2019).
 15. MATLAB. Exponenta [Электронный ресурс]: Введение в современные методы оптимизации систем управления. – Режим доступа: <http://matlab.exponenta.ru/optimrobast/book1/index.php> (accessed February 10, 2019).

Статья поступила в редакцию 25 марта 2019 г.

TIME-OPTIMAL CONTROL OF THE HEATING PROCESS WITH COMBINED EXTERNAL INFLUENCES BY THE BOUNDARY CONDITIONS

N.A. Ilina, E.Ya. Rapoport

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

E-mail: ilina.natalyaa@yandex.ru; edgar.raoport@mail.ru

Abstract. *The formulation and method of solving the problem of optimal speed control of the heating process of an unlimited plate with two external influences on the boundary conditions, as one of which is considered the boundary concentrated control of the magnitude of the external heat flow, and the another is the heat flow, determined by a given ambient temperature. The solution of the problem is carried out under the conditions of a given accuracy of uniform approximation of the final temperature distribution over the plate thickness to the specified one. The method of finite integral transformations is used to find the input-output characteristics of an object with distributed parameters with two external boundary effects. The proposed method of solution of this problem is used the preliminary parametrization of control actions based on the analytical conditions of optimality in the form of the Pontryagin maximum principle and the subsequent reduction to the semi-infinite optimization problem, the solution of which is found using the alternance method. The alternance properties of the final resultant temperature state at the end of the optimal process leads to a basic system of relations, which, in the presence of additional information about the shape of the temperature distribution curve, is reduced to a system of equations that is resolved with respect to all the required unknowns. An example of solving*

*Natalya A. Ilina, Postgraduate Student.
Edgar Ya. Rapoport (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.*

the problem of optimal speed control of the temperature field of an unlimited plate with two boundary influences is presented.

Keywords: *optimal control, two-channel control, alternance method, semi-infinite optimization, process of non-stationary heat conductivity.*

REFERENCES

1. *Butkovskiy A.G., Malyy S.A., Andreev Yu.N.* Upravlenie nagrevom metalla [Control of Metal Heating]. Moscow, Metallurgy Publ., 1981. 272 p. (In Russian).
2. *Kartashov E.M.* Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdukh tel [Analytical methods in the theory of heat conductance in solids]. Moscow, Vyssh. Shkola, 2001. 550 p. (In Russian).
3. *Rapoport E.Ya.* Strukturnoe modelirovanie ob'ektov i sistem s raspredelennymi parametrami [Structural modeling of objects and control systems with the distributed parameters]. Moscow, Vyssh. Shkola, 2003. 299 p. (In Russian).
4. *Rapoport E.Ya., Il'ina N.A.* Dvukanal'noe optimal'noe po bystrodeystviyu upravlenie protsessom nestatsionarnoy teploprovodnosti [Two-channel time-optimal control of the process of nonstationary heat conductivity] // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Un-ta. Ser. Tekhn. Nauki. – Samara, 2018. no. 1(57). Pp. 7–18. (In Russian).
5. *Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M.* Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoy fiziki [The partial differential equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1970. 707 p. (In Russian).
6. *Martynenko N.A., Pustynnikov L.M.* Konechnye integralnye preobrazovaniya i ih primeneniye k issledovaniyu sistem s raspredelennymi parametrami [Final engineering transformations and their application to the study of systems with distributed parameters]. Moscow, Nauka, 1986. 303 p. (In Russian).
7. *Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Gamkrelidze R.V., Mischenko E.F.* Matematicheskaya teoriya optimalnykh protsessov [Mathematical theory of optimal processes]. Moscow, Nauka, 1969. 384 p.
8. *Rapoport E.Ya.* Optimal'noe upravlenie sistem s raspredelennymi parametrami [Optimal Control for Systems with Distributed Parameters]. Moscow, Vyssh. Shkola, 2009. 677 p. (In Russian).
9. *Ponteleev A.V., Bortakovskiy A.S.* Teoriya upravleniya v primerakh i zadachakh [The theory of control in examples and problems]. Moscow, Vyssh. Shkola, 2017.
10. *Rapoport E.Ya.* Al'ternantsnyy metod v prikladnykh zadachakh optimizatsii [Alternance Method for Solving Applied Optimization Problems]. Moscow, Nauka, 2000. 336 p. (In Russian).
11. *Rapoport E.Ya., Pleshivtseva Yu.E.* Algoritmicheskiy tochnyy metod parametricheskoy optimizatsii v kraevykh zadachakh optimal'nogo upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami [Algorithmically accurate method of parametric optimization in boundary value problems of optimal control of systems with distributed parameters] // Avtomatizatsiya, 2009. vol. 45. no. 5. P. 103–112 (In Russian).
12. *Dyakonov V.P.* MATLAB. Polnuy samouchitel' [MATLAB.Full tutorial]. Moscow, DMK Press, 2012. 768 p. (In Russian).
13. *Potemkin V.G.* Vvedenie v Matlab [Introduction to Matlab]. Moscow, Softline Co, 2001. <http://matlab.exponenta.ru/ml/book1/index.php> (accessed March 02, 2019).
14. *Optimization Toolbox 2.2 Rukovodstvo pol'zovatelya* [Optimization Toolbox 2.2 User manual] http://matlab.exponenta.ru/optimiz/book_1/ (accessed March 02, 2019).
15. *MATLAB.Exponenta* Vvedenie v sovremennyye metody optimizatsii sistem upravleniya [Introduction to modern methods of control systems optimization]. <http://matlab.exponenta.ru/optimrobast/book1/index.php> (accessed February 10, 2019).