

УДК 681.391:543/545

ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИГНАЛОВ В БАЗИСЕ ФУНКЦИЙ ЧЕБЫШЕВА – ЭРМИТА***Р.Т. Сайфуллин, А.В. Бочкарев***Самарский государственный технический университет
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Аннотация. Цель работы заключается в разработке базиса, позволяющего по коэффициентам разложения исходного сигнала в базисе функций Чебышева – Эрмита восстановить массив вейвлет-коэффициентов исходного сигнала. Для формирования базиса вейвлет-преобразования аналитически вычисляется вейвлет-преобразование функций Чебышева – Эрмита. В качестве вейвлетов в работе используются производные функции Гаусса с первым по четвертый порядок включительно. Для этих вейвлетов в работе представлен базис, содержащий вейвлет-преобразование первых двух функций Чебышева – Эрмита. При этом вейвлет-преобразование сигнала осуществляется в два этапа. На первом этапе получают разложение исходного сигнала в виде взвешенной суммы базисных функций Чебышева – Эрмита. На втором этапе, зная весовые множители функций, полученных на первом этапе, а также аналитическое выражение непрерывного вейвлет-преобразования для конкретных базисных функций и вейвлета, используя свойство линейности вейвлет-преобразования, восстанавливают вейвлет-преобразование исходного сигнала. Таким образом, по коэффициентам разложения исходного сигнала в выбранной системе базисных функций можно достаточно просто восстановить вейвлет-преобразование этого сигнала. Приведены примеры вычисления массивов вейвлет-коэффициентов аналитическим путем и с использованием описанного алгоритма. Для оценки погрешности восстановления вейвлет-коэффициентов используется приведенная погрешность. В качестве истинного значения вейвлет-коэффициентов принимается рассчитанный аналитически массив вейвлет-коэффициентов сигнала. Массивы вейвлет-коэффициентов и их разностей представлены в виде трехмерных поверхностей. Для вычислений и графического представления результатов моделирования использована система компьютерной алгебры *Wolfram Mathematica 11.3*.

Ключевые слова: функции Чебышева – Эрмита, вейвлет-преобразование, вейвлеты Гаусса, функция Гаусса, базис вейвлет-преобразования, преобразование сигналов, разложение сигнала.

Введение

Совершенствование вычислительных технологий обработки измерительной информации для сигналов сложной формы связано с развитием прикладных математических методов, лежащих в основе данных технологий, с внедрением новых программно-алгоритмических средств обработки данных. Таким образом, актуальной проблемой является разработка теоретических и прикладных подходов, которые позволяют синтезировать компактные и быстрые вычислительные алгоритмы оценки полезного сигнала, направленные на реализацию всех потен-

Сайфуллин Раухат Талгатович (д.т.н., проф.), профессор кафедры «Информационно-измерительная техника».

Бочкарев Андрей Владимирович, аспирант.

циальных возможностей аналитических приборов [1, 2].

Вейвлет-анализ является одним из наиболее мощных и гибких средств исследования и цифровой обработки сигналов: помимо задач их фильтрации и сжатия анализ в базисе вейвлет-функций позволяет решить задачи идентификации, моделирования, аппроксимации стационарных и нестационарных процессов, исследовать наличие разрывов и т. д.

1. Непрерывное вейвлет-преобразование сигнала

Результатом непрерывного вейвлет-преобразования сигнала $f(x)$ одной переменной является функция двух переменных $w_f(a, b)$, которая определяется выражением

$$w_f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx, \quad (1)$$

где $\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$, $a, b \in \mathbb{R}$ – базисные функции (вейвлеты).

Множитель $\frac{1}{\sqrt{a}}$ обеспечивает единичную норму для любой функции $\psi_{a,b}(x)$. Параметр b показывает расположение вейвлета на оси x (во времени при $x = t$), a – параметр масштаба, связанный с частотой. Большие значения a соответствуют низким частотам, малые – высоким. Частотный параметр в вейвлет-преобразовании принято характеризовать как параметр масштаба.

Вейвлет-преобразование (1) представляет функцию сигнала как линейную комбинацию вейвлетов. При этом коэффициенты $w_f(a, b)$ – это коэффициенты корреляции, или меры сходства сигнала $f(x)$ и соответствующего вейвлета $\psi_{a,b}(x)$.

В результате вейвлет-преобразования получается поверхность вейвлет-коэффициентов $w_f(a, b)$. В качестве графического представления результата возможно использовать трехмерный график.

Функцию, описывающую распределение энергии по масштабам, называют вейвлет-спектром, или скалограммой [3]. Она имеет вид

$$S(a_i, b_j) = \left| w_f(a_i, b_j) \right|^2,$$

где $i = 0, 2, \dots, N_a-1$;
 $j = 0, 2, \dots, N_b-1$.

Вместо поверхности можно использовать ее проекцию на плоскость, отслеживающую линии локальных экстремумов (скелетон). Скелетон вычисляется по соотношению

$$S_i(a_i, b_j) = \begin{cases} S(a_i, b_j), & \text{если } S(a_{i-1}, b_j) < S(a_i, b_j) \vee S(a_i, b_j) > S(a_{i+1}, b_j), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Также одним из способов представления результатов является скейлограмма, которая определяется соотношением

$$S_g(a_i) = \frac{1}{N_b} \sum_{j=0}^{N_b-1} S(a_i, b_j).$$

Выбор конкретной вейвлет-функции выполняется на основе ожидаемых свойств сигнала. При этом некоторые вейвлеты могут обеспечить более эффективное решение задачи исследования, чем другие. Иногда целесообразно предварительно выполнить синтез специальных вейвлетов, дополнительно удовлетворяющих требованиям решаемой задачи.

Важным параметром вейвлета является также и протяженность во времени. Этот параметр влияет на способность вейвлета к локализации особенностей сигнала. Чем более протяженный вейвлет использован для анализа, тем большая часть анализируемого сигнала будет влиять на результат преобразования и тем меньше способность вейвлета к локализации во времени. Однако более протяженные вейвлеты обеспечивают более точную локализацию компонентов по оси масштабов (частот).

2. Гауссовские вейвлеты

В качестве вейвлетов наиболее широко используется производная функции Гаусса:

$$\psi_m(x) = (-1)^{m+1} \frac{d^m e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^m}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

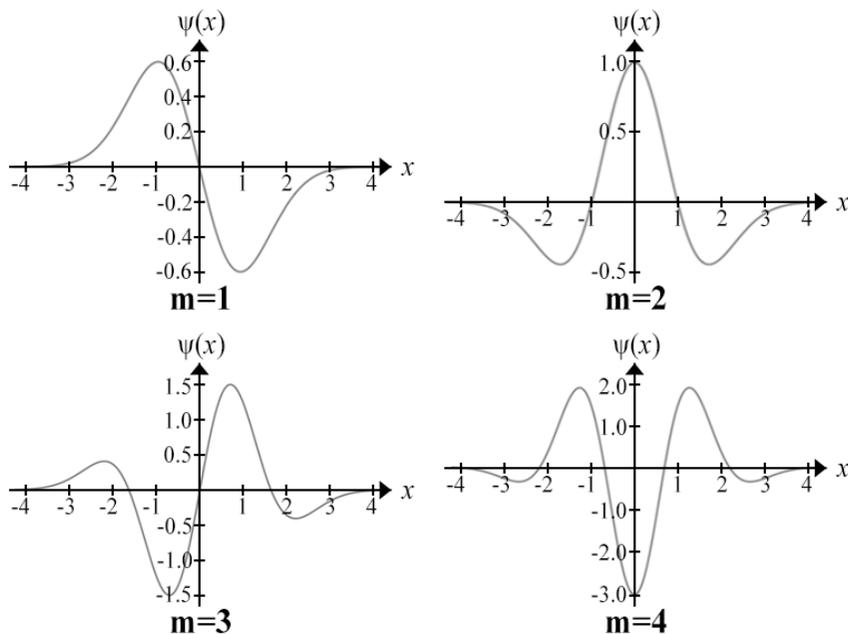


Рис. 1. Гауссовские вейвлеты для $m = 1, 2, 3, 4$

Наибольшее применение находят гауссовские вейвлеты малых порядков:

$$\psi_1(x) = -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (2)$$

$$\psi_2(x) = (1 - x^2) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (3)$$

$$\psi_3(x) = (x^3 - 3x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (4)$$

$$\psi_4(x) = (-x^4 + 6x^2 - 3) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (5)$$

Данные вейвлеты приведены на рис. 1.

3. Проекционная схема кодирования сигналов на базе функций Чебышева – Эрмита

Для математического описания выходного сигнала аналитического прибора $f(x)$ в работах [4, 5] предлагается использовать проекционную схему кодирования-декодирования данных, основанную на разложении сигнала в ряд по функциям Чебышева – Эрмита. Разложение сигнала в ряд по этим функциям позволяет производить анализ сигнала и его преобразование одновременно, поскольку функции Чебышева – Эрмита являются собственными функциями преобразования Фурье [6–9].

Функции Чебышева – Эрмита определяются следующим образом:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\alpha_n} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot H_n(x), \quad (6)$$

где $\alpha_n = \sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}$ – нормирующая константа;

$H_n(x)$ – стандартизированный многочлен Чебышева – Эрмита степени n :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}.$$

При $x \rightarrow \infty$ функции Чебышева – Эрмита обращаются в нуль.

Пусть F – оператор преобразования Фурье, тогда

$$F(\varphi_n(x)) = i^n \cdot \varphi_n(x).$$

Для всех $n \geq 2$ функции Чебышева – Эрмита можно определить через рекуррентные формулы:

$$\varphi_n(x) = x \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \varphi_{n-1}(x) - \sqrt{\frac{n-1}{n}} \cdot \varphi_{n-2}(x), \quad (7)$$

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (8)$$

$$\varphi_1(x) = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt[4]{\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (9)$$

Каждая из функций $\varphi_n(x)$ локализована на некотором отрезке $[-\tau_n, \tau_n]$.

Функции Чебышева – Эрмита образуют на бесконечном интервале $-\infty < x < \infty$ полную ортогональную нормированную с единичным весом систему:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) \cdot \varphi_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{при } m \neq n, \\ 1, & \text{при } m = n. \end{cases}$$

Четные и нечетные функции Чебышева – Эрмита также образуют полную ортогональную нормированную с единичным весом систему на интервале $0 < x < \infty$.

Набор функций $\varphi_n(x)$ (6) задает базис для кодирования и декодирования сигналов.

Примеры функций Чебышева – Эрмита $\varphi_n(x)$ для $n = 0, 1, 2, 3$ приведены на рис. 2.

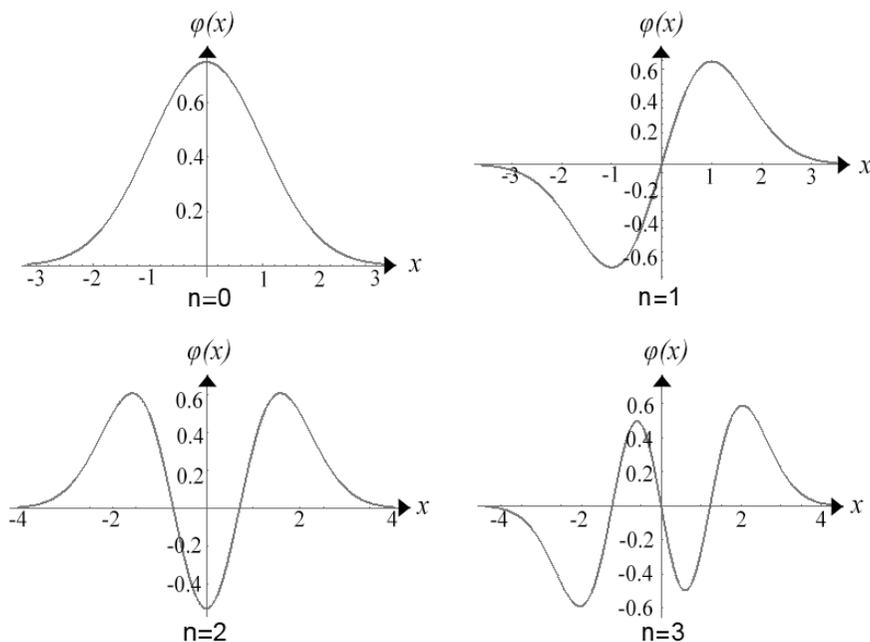


Рис. 2. Функции Чебышева – Эрмита для $n = 0, 1, 2, 3$

Представление сигнала $f(x)$ с помощью n функций разложения (алгоритм кодирования) заключается в нахождении коэффициентов c_n . В силу локализации функций Чебышева – Эрмита нахождение данных коэффициентов можно свести к формуле

$$c_n = \int_{-\tau_n}^{\tau_n} f(x) \cdot \varphi_n(x) dx, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (10)$$

Алгоритм декодирования с помощью N коэффициентов разложения выражается формулой

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=0}^N c_n \cdot \varphi_n(x). \quad (11)$$

Данные функции находят широкое применение в обработке сигналов [10–14]. Описанный алгоритм кодирования-декодирования обладает сглаживающим свойством [15].

4. Вейвлет-преобразование первого порядка нулевой базисной функции

Алгоритм вычисления вейвлет-преобразования выходного сигнала аналитических приборов состоит из следующих этапов:

- 1) представление исходного сигнала в виде разложения в базисе функций Чебышева – Эрмита и нахождение коэффициентов разложения;
- 2) нахождение базисных функций для восстановления непрерывного вейвлет-преобразования различных порядков;
- 3) восстановление непрерывного вейвлет-преобразования сигнала на основе рассчитанных на первом этапе коэффициентов и синтезированного на втором этапе базиса.

При использовании производной m -го порядка функции Гаусса в качестве вейвлета вейвлет-преобразование n -й базисной функции можно записать в виде

$$W_{m,\varphi_n}(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) \cdot \psi_m\left(\frac{x-a}{b}\right) dx. \quad (12)$$

Для расширения области применения вейвлет-преобразования функций Чебышева – Эрмита следует по аналогии с вейвлетами ввести параметры сдвига x_0 и масштаба γ для базисных функций. С учетом данного обстоятельства выражение (12) примет вид:

$$W_{m,\varphi_n}(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right) \cdot \psi_m\left(\frac{x-a}{b}\right) dx. \quad (13)$$

Рассмотрим нахождение вейвлет-преобразования первого порядка нулевой базисной функции. Для нахождения интеграла (13) необходимо ввести следующую переменную:

$$t = x - \frac{a^2 x_0 + \gamma^2 b}{a^2 + \gamma^2}. \quad (14)$$

Путем простых преобразований с учетом (14) получим следующее соотношение:

$$W_{1,\varphi_0}(a,b) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt[4]{a^3}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[t + a^2 \frac{x_0 - b}{a^2 + \gamma^2} \right] \cdot e^{-\frac{(t-\gamma^2 p)^2}{2\gamma^2} - \frac{(t+a^2 p)^2}{2a^2}} dt. \quad (15)$$

Введя новую переменную $d = \sqrt{a^2 + \gamma^2}$, имеем:

$$W_{1,\varphi_0}(a,b) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_0 - b}{d} \right)^2}}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt[4]{a^3}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(t + a^2 \frac{x_0 - b}{d^2} \right) \cdot e^{-t^2 \left(\frac{d}{\sqrt{2a\gamma}} \right)^2} dt, \quad (16)$$

или

$$W_{1,\varphi_0}(a,b) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_0 - b}{d} \right)^2}}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt[4]{a^3}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} t \cdot e^{-t^2 \left(\frac{d}{\sqrt{2a\gamma}} \right)^2} dt + a^2 \frac{x_0 - b}{d^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2 \left(\frac{d}{\sqrt{2a\gamma}} \right)^2} dt \right]. \quad (17)$$

Представление (17) позволяет использовать табличный интеграл [16]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n \cdot e^{-t^2 q} dt = \begin{cases} \frac{\prod_{k=0}^{n/2} (2k+1)}{2^n q^n} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{q}}, & \text{если } n \bmod 2 = 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При известном $q = \left(\frac{d}{\sqrt{2a\gamma}} \right)^2$ данное выражение примет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n \cdot e^{-t^2 \left(\frac{d}{\sqrt{2a\gamma}} \right)^2} dt = \begin{cases} \frac{\prod_{k=0}^{n/2} (2k+1)}{2^n \left(\frac{d}{\sqrt{2a\gamma}} \right)^{2n}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi a\gamma}}{d}, & \text{если } n \bmod 2 = 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (18)$$

Найдем оба входящих в (17) интеграла по отдельности с учетом (18):

$$\int_{-\infty}^{\infty} t \cdot e^{-t^2 \left(\frac{d}{\sqrt{2a\gamma}} \right)^2} dt = 0,$$

$$a^2 \frac{x_0 - b}{d^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2 \left(\frac{d}{\sqrt{2a\gamma}} \right)^2} dt = a^2 \frac{x_0 - b}{d^2} \cdot \frac{\sqrt{2\pi a\gamma}}{d}.$$

Подставим полученные интегралы в (17) и раскроем скобки:

$$W_{1,\Phi_0}(a,b) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_0 - b}{d} \right)^2}}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt[3]{a^3}} a^2 \frac{x_0 - b}{d^2} \cdot \frac{\sqrt{2\pi a\gamma}}{d},$$

после чего, приведя подобные члены, окончательно получим:

$$W_{1,\Phi_0}(a,b) = - \left[-e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_0 - b}{d} \right)^2} \frac{x_0 - b}{d} \right] \cdot \frac{\sqrt{2\sqrt{\pi}} \sqrt[3]{a^3} \gamma}{d^2},$$

где выражение $-e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_0 - b}{d} \right)^2} \frac{x_0 - b}{d}$ можно интерпретировать как вейвлет-преобразование первого порядка нулевой базисной функции Φ_0 для переменной x_0 с параметрами сдвига b и масштаба d :

$$W_{1,\Phi_0}(a,b) = - \frac{\gamma \sqrt{2a^3 \sqrt{\pi}}}{d^2} \cdot \Psi_1 \left(\frac{x_0 - b}{d} \right). \quad (19)$$

Аналогичным образом получаем аналитические выражения для вычисления коэффициентов вейвлет-преобразования 1–4-го порядков для первых двух базисных функций:

$$W_{1,\varphi_1}(a,b) = \frac{2\gamma\sqrt{a^3}\sqrt{\pi}\left[d^2 - (x_0 - b)^2\right]}{d^5} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_0-b}{d}\right)^2}, \quad (20)$$

$$W_{2,\varphi_0}(a,b) = \frac{\gamma\sqrt{2a}\sqrt{\pi}\left[d^2 - (x_0 - b)^2\right]}{d^5} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_0-b}{d}\right)^2}, \quad (21)$$

$$W_{2,\varphi_1}(a,b) = \frac{2\gamma^2\sqrt{a}\sqrt{\pi}\left[(x_0 - b)^2 - 3d^2\right]}{d^6} \cdot \Psi_1\left(\frac{x_0 - b}{d}\right), \quad (22)$$

$$W_{3,\varphi_0}(a,b) = -\frac{\gamma\sqrt{2a^7}\sqrt{\pi}\left[(x_0 - b)^2 - 3d^2\right]}{d^6} \Psi_1\left(\frac{x_0 - b}{d}\right), \quad (23)$$

$$W_{3,\varphi_1}(a,b) = \frac{2\gamma^2\sqrt{a^7}\sqrt{\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_0-b}{d}\right)^2}}{d^9} \left\{3d^8 + b^4 - 6b^2(\gamma^2 - x_0^2) + \right. \quad (24)$$

$$\left. + 4bx_0(6\gamma^2 - 2x_0^2 - b^2) - 6a^2\left[(x_0 - b)^2 - \gamma^2\right] - \gamma^2\right\},$$

$$W_{4,\varphi_0}(a,b) = -\frac{\gamma\sqrt{2a^9}\sqrt{\pi}}{d^9} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_0-b}{d}\right)^2} \left[6(b^2 - \gamma^2) + \right. \quad (25)$$

$$\left. + 3d^4 + b^4 + x_0^4 - 6a^2(x_0 - b)^2 - 4bx_0(x_0^2 - 3\gamma^2 + b^2)\right],$$

$$W_{4,\varphi_1}(a,b) = \frac{2\gamma^2\sqrt{a^9}\sqrt{\pi}}{d^5} \Psi_1\left(\frac{x_0 - b}{d}\right) \left\{15(a^4 + \gamma^4) + x_0^2(x_0^2 - 10\gamma^2) - \right. \quad (26)$$

$$\left. - 10a^2\left[(x_0 - b)^2 - 3\gamma^2\right] + 4bx_0(5\gamma^2 - x_0^2 - b^2) + b^2(b^2 - 10\gamma^2 + 6x_0^2)\right\}.$$

Сравним работу алгоритма на примере простейшего сигнала:

$$f(x) = 0.7 \cdot \varphi_0(x) + 0.5 \cdot \varphi_1(x), \quad (27)$$

который является суммой двух первых базисных функций. Такой сигнал имеет простую конфигурацию (малое число перегибов), а его кодирование по (10) сводится к вычислению заданных заранее известных коэффициентов $c_0 = 0.7$ и $c_1 = 0.5$ при соответствующих базисных функциях в (27).

Данный сигнал изображен на рис. 3.

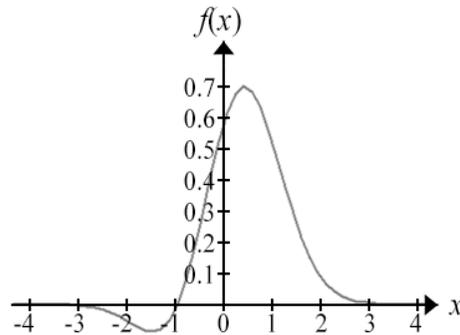


Рис. 3. Исследуемый сигнал

Сопоставим вейвлет-преобразование этого сигнала, полученное с помощью непосредственного вычисления аналитических выражений (2)–(4), и вейвлет-преобразование в базисе функций Чебышева – Эрмита (19)–(26). Первый алгоритм назовем аналитическим, второй – базисным. Массивы вейвлет-коэффициентов, полученные каждым из этих алгоритмов, приведены на рис. 4.

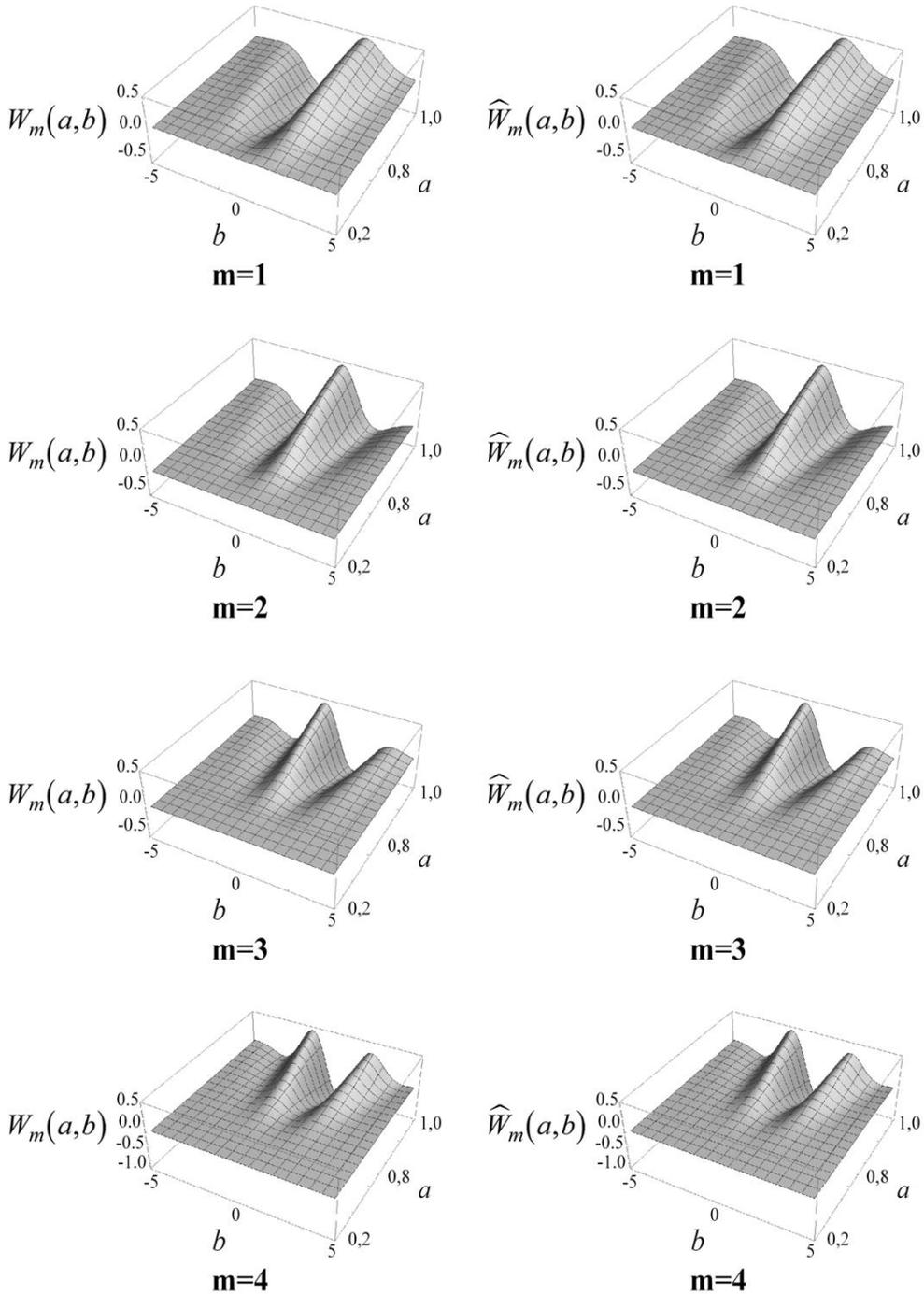


Рис. 4. Сравнение массивов вейвлет-коэффициентов:

$W_m(a,b)$ – аналитическое ВП m -го порядка; $\widehat{W}_m(a,b)$ – базисное ВП m -го порядка

По рис. 4 можно судить о визуальной идентичности результатов аналитического и базисного подходов. Рассмотрим разности $D_m(a,b)$ коэффициентов, полученных по каждому из описанных алгоритмов (рис. 5).

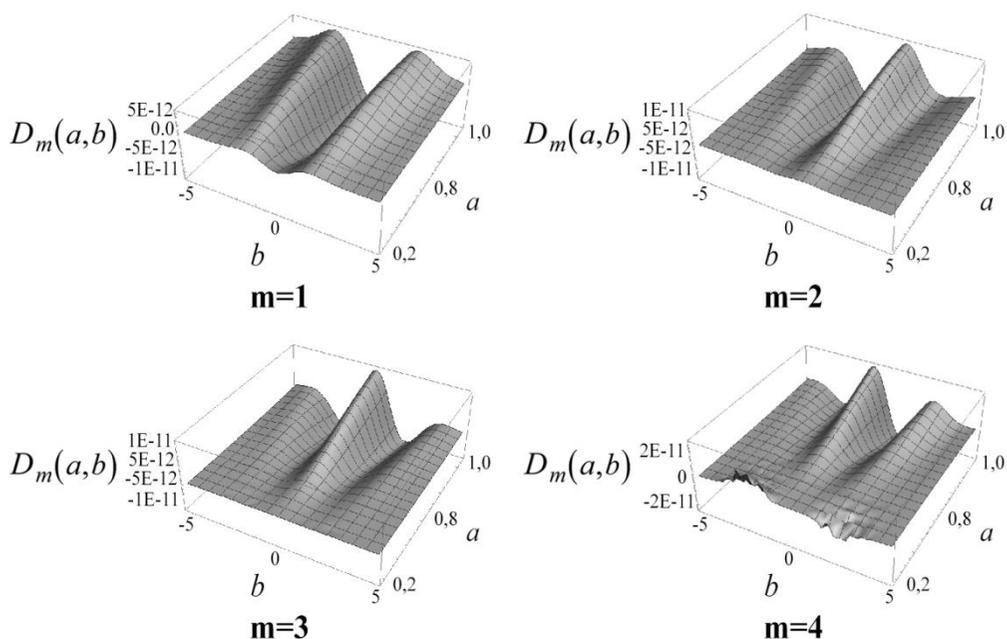


Рис. 5. Разности массивов вейвлет-коэффициентов

Для оценки ошибки вычисления вейвлет-коэффициентов определим приведенную погрешность полученных результатов в виде

$$\gamma_m = \frac{|W_m(a,b) - \hat{W}_m(a,b)|_{\max}}{|W_m(a,b)|_{\max}} \cdot 100\%, \quad (28)$$

где $W_m(a,b)$ – точная оценка коэффициента по аналитическому алгоритму;

$\hat{W}_m(a,b)$ – оценка коэффициента по базисному алгоритму.

Для приведенных примеров рассчитанная по формуле (28) погрешность не превышает $3 \cdot 10^{-8}\%$.

Заключение

Благодаря использованию полученных формул расчета вейвлет-коэффициентов в базисе функций Чебышева – Эрмита удастся построить быстрые вычислительные алгоритмы обработки, что в сочетании с высокой их эффективностью является значительным достоинством метода.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Русинов Л.А. Автоматизация аналитических систем определения состава и качества веществ. – Л.: Химия, 1984. – 158 с.
2. Гуревич А.Л., Русинов Л.А., Сягаев Н.А. Автоматический хроматографический анализ. – Л.: Химия, 1980. – 192 с.
3. Харкевич А.А. Спектры и анализ. – М.: Физматгиз, 1963. – 432 с.

4. Сайфуллин Р.Т., Бочкарев А.В. Использование функций Чебышева – Эрмита в обработке сигналов аналитических приборов // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Технические науки. – 2019. – № 1(61). – С. 68–81.
5. Сайфуллин Р.Т., Бочкарев А.В. Выбор необходимого числа базисных функций в алгоритмах кодирования-декодирования сигналов аналитических приборов. // Информационно-измерительные и управляющие системы: межвуз. сб. науч. статей. – 2019. – Вып. 1(17). – С. 35–42.
6. Martens J.B. The Hermite transform-theory // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1990. Vol. 38. No. 9. P. 1595–1606.
7. Martens J.B. The Hermite transform-applications // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1990. Vol. 38. No. 9. P. 1607–1618.
8. Сеге Г. Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.
9. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. – М.: Физматлит, 2005. – 480 с.
10. Павельева Е.А., Крылов А.С. Поиск и анализ ключевых точек радужной оболочки глаза методом преобразования Эрмита // Информатика и ее применения. – 2010. – № 1, т. 4. – С. 79–82.
11. Estudillo-Romero A., Escalante-Ramirez B. The Hermite transform: An alternative image representation model for iris recognition // LNCS, 2008. No. 5197. P. 86–93.
12. Мамаев Н.В. Алгоритм нелокального среднего на основе разложения по функциям Эрмита в задачах компьютерной томографии // Мамаев Н.В., Лукин А.С., Юрин Д.В., Глазкова М.А., Синицин В.Е. – ГРАФИКОН'2013. Труды конференции, 2013. – С. 254–258.
13. Горлов В.А., Паришин Д.С. Разложение функции с экспоненциальным ростом в ряд Фурье по ортогональным полиномам Чебышева – Эрмита // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2015. – Т. 3. – № 8–3 (19–3). – С. 245–248.
14. Нейросетевой анализ и сопоставление частотно-временных векторов на основе краткосрочного спектрального представления и адаптивного преобразования Эрмита / Ю.М. Баяковский, А.О. Жирков, Д.Н. Корчагин, А.С. Крылов, А.С. Лукин. Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2001, 087.
15. Балакин Д.А., Штыков В.В. Построение ортогонального банка фильтров на основе преобразований Эрмита для обработки сигналов // Журнал радиоэлектроники. – 2014. – № 9. – С. 1–15.
16. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.

Статья поступила в редакцию 2 апреля 2019 г.

COMPUTATION OF CONTINUOUS WAVELET TRANSFORM OF SIGNALS IN THE BASIS OF THE CHEBYSHEV-HERMITE FUNCTIONS

R.T. Sayfullin, A.V. Bochkarev

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

Abstract. The paper deals with the development of basis for computation wavelet-transform from the coefficients given by decomposition original signal with Chebyshev-Hermite functions. Decomposition with Chebyshev-Hermite functions allow to transform original signal into coefficients, that can be used for reconstructing different transforms of original signal like Fourier transform, derivatives of different orders, wavelet transform and others. These transforms can be obtained by using corresponding bases. In this paper considered basis for wavelet-transform with derivative of Gauss functions as wavelet. This

*Rauhat T. Sayfullin (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.
Andrey V. Bochkarev, Postgraduate Student.*

basis is computed by applying continuous wavelet transform with derivative of Gauss functions as wavelet into the Chebyshev-Hermite functions. For estimating error of Chebyshev-Hermite wavelet basis reduced error are used. Arrays of the wavelet coefficients are presented as 3D plots. The Mathematica 11.3 computer algebra system was used to calculations and graph the results.

Keywords: Chebyshev – Hermite functions, wavelet-transform, Gauss wavelets, Gauss function, wavelet-transform basis, signal transform, signal decomposition.

REFERENCES

1. *Rusinov L.A.* Automation of analytical systems for determining the composition and quality of substances. – L.: Chemistry, 1984. – 158 p.
2. *Gurevich A.L., Rusinov L.A., Syagaev N.A.* Automatic chromatographic analysis. – L.: Chemistry, 1980. – 192 p.
3. *Kharkevich A.A.* Spectra and analysis. – M.: Fizmatgiz, 1963. – 432 p.
4. *Saifullin R.T., Bochkarev A.V.* The use of Chebyshev-Hermite functions in signal processing of analytical instruments // Bulletin of the Samara State Technical University. Series: technical sciences, No 1 (61). – 2019, p. 68–81.
5. *Saifullin R.T., Bochkarev A.V.* Selection of the required number of basis functions in the coding-decoding algorithms of signals of analytical instruments // Information and measuring and control systems: mezhvuz. Sat scientific articles. Issue 1 (17). – 2019, p. 35–42.
6. *Martens J.B.* The Hermite transform-theory // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1990. Vol. 38. No. 9. P. 1595–1606.
7. *Martens J.B.* The Hermite transform-applications // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1990. Vol. 38. No. 9. P. 1607–1618.
8. *Szego G.* Orthogonal polynomials. – M.: Fizmatgiz, 1962. – 500 p.
9. *Suetin P.K.* Classical orthogonal polynomials. – M.: Fizmatlit, 2005. – 480 s.
10. *Paveleva E.A., Krylov A.S.* Search and analysis of key points of the iris by the Hermite transformation method // Informatics and its applications. 2010. № 1 v. 4. Pp. 79–82.
11. *Estudillo-Romero A., Escalante-Ramirez B.* The Hermite transform: An alternative image representation model for iris recognition // LNCS, 2008. No. 5197. P. 86–93.
12. *Mamaev N.V.* The non-local average algorithm based on the expansion of Ermit functions in computed tomography problems // Mamaev N.V., Lukin A.S., Yurin D.V., Glazkova M.A., Sinitin V.E. – GRAPHICON'2013. Conference proceedings, 2013, p. 254–258.
13. *Gorlov V.A., Parshin D.S.* Expansion of a function with exponential growth in a Fourier series in orthogonal Chebyshev-Hermite polynomials // Actual directions of scientific research of the XXI century: theory and practice. 2015. Vol. 3. No. 8–3 (19–3). Pp. 245–248.
14. Neural network analysis and comparison of time-frequency vectors based on the short-term spectral representation and adaptive Hermite transform. Yu.M. Bayakovskiy, A.O. Zhirkov, D.N. Korchagin, A.S. Krylov, A.S. Lukin. Preprints IPM them. M.V. Keldysh, 2001, 087.
15. *Balakin D.A., Shtykov V.V.* Construction of an orthogonal filter bank based on Hermite transformations for signal processing // Journal of Radio Electronics, № 9, 2014, p. 1–15.
16. *Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M.* Tables of integrals, sums, series and products. – M.: Fizmatgiz, 1963. – 1100 p.