

УДК 621.3.078

ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОГРУЖНОГО АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ

**А.В. Стариков¹, С.Л. Лисин¹, Т.В. Табачникова², И.А. Косорлуков¹,
О.С. Беляева¹**

¹Самарский государственный технический университет

Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

²Альметьевский государственный нефтяной институт

Россия, 423450, Республика Татарстан, г. Альметьевск, ул. Ленина, 2

Аннотация. В настоящее время погружные асинхронные двигатели находят широкое применение в установках электроцентробежных насосов, обеспечивающих основную долю добычи нефти в России. Для поддержания заданного динамического уровня жидкости в скважине станции управления погружными насосами оснащаются замкнутыми системами с частотными преобразователями. Для корректного синтеза регуляторов системы стабилизации динамического уровня необходимо знать передаточную функцию асинхронного двигателя как объекта управления. При этом следует учитывать, что для согласования высоковольтного погружного двигателя с частотным преобразователем используют повышающий трансформатор и скалярное частотное управление асинхронной машиной. Существующие линеаризованные математические модели асинхронного двигателя при таком способе управления являются приближенными. Поэтому цель настоящего исследования заключается в получении уточненной модели погружного асинхронного двигателя. В статье приводится известная система уравнений асинхронной машины при скалярном частотном управлении. Показано, что эта система является нелинейной, поскольку в ней происходит перемножение ряда переменных. Произведена линеаризация основных нелинейностей методом их разложения в ряд Тейлора. В линеаризованной системе за входную координату принята частота питающего напряжения статора, а за выходную – скорость вращения ротора асинхронного двигателя. Избавляясь методом последовательной подстановки от промежуточных переменных, получаем передаточную функцию погружного асинхронного двигателя при скалярном частотном управлении. Показано, что характеристический полином найденной передаточной функции имеет пятнадцатый порядок. Найдены аналитические выражения, связывающие коэффициенты передаточной функции с параметрами асинхронного двигателя и координатами начальной точки. Произведена оценка адекватности полученной математической модели методом сравнения результатов моделирования переходных

Стариков Александр Владимирович (д.т.н., проф.) заведующий кафедрой «Электропривод и промышленная автоматика».

Лисин Сергей Леонидович (к.т.н.), доцент кафедры «Электропривод и промышленная автоматика».

Табачникова Татьяна Владимировна (к.т.н., доц.), заведующий кафедрой «Электро- и теплоэнергетика».

Косорлуков Игорь Андреевич (к.т.н., доц.), докторант кафедры «Электропривод и промышленная автоматика».

Беляева Ольга Сергеевна аспирант кафедры «Электропривод и промышленная автоматика».

процессов в нелинейной системе уравнений и в линеаризованной. Показано, что расхождение результатов не превышает 0,54 %.

Ключевые слова: погружной асинхронный двигатель, скалярное управление, математическая модель, передаточная функция, линеаризация.

Погружные асинхронные двигатели находят широкое применение в установках электроцентробежных насосов, обеспечивающих значительную долю механизированной добычи нефти в России. С целью поддержания требуемого динамического уровня жидкости в скважине станции управления погружными насосами оснащаются частотными преобразователями и замкнутыми по соответствующему датчику системами [1–8]. В качестве датчиков обратной связи могут применяться датчики давления на приеме насоса или эхолоты, измеряющие непосредственно динамический уровень жидкости в скважине.

Отличительной особенностью электротехнического комплекса нефтяной скважины, оснащенной погружным электроцентробежным насосом, является наличие повышающего трансформатора, включенного между частотным преобразователем и двигателем. Поэтому в таких системах, как правило, применяется скалярное управление погружным асинхронным двигателем. В связи с этим при синтезе регулятора системы стабилизации динамического уровня жидкости в скважине необходимо знать математическую модель асинхронного двигателя при скалярном частотном управлении. Такие модели существуют [9–16], но обладают рядом недостатков. Большинство моделей асинхронного двигателя как объекта управления являются нелинейными [9–14], что не позволяет напрямую найти его передаточную функцию. Другие модели являются линеаризованными [15, 16], но передаточные функции двигателя по отношению к управляющему и возмущающему воздействию в них получены с большими погрешностями, вызванными применяемыми методами линеаризации. Существует также математическая модель асинхронного двигателя, получаемая на основе компьютерного моделирования и дальнейшей идентификации переходных процессов [17]. Погрешность передаточной функции двигателя в этом случае в основном зависит от точности определения величин опорных точек идентификации с графика переходных процессов.

Целью настоящего исследования является получение уточненной линеаризованной математической модели погружного асинхронного двигателя в виде передаточной функции.

Движение асинхронного двигателя при линейном законе регулирования напряжения в функции частоты описывается известной системой уравнений [9–17]

$$\left. \begin{aligned}
\frac{d\psi_{1x}}{dt} &= U_{1x} - \frac{R_1 L_2'}{\Delta} \psi_{1x} + \frac{R_1 L_0}{\Delta} \psi_{2x} + \omega_0 \psi_{1y}; \\
\frac{d\psi_{1y}}{dt} &= U_{1y} - \frac{R_1 L_2'}{\Delta} \psi_{1y} + \frac{R_1 L_0}{\Delta} \psi_{2y} - \omega_0 \psi_{1x}; \\
\frac{d\psi_{2x}}{dt} &= -\frac{R_2' L_1}{\Delta} \psi_{2x} + \frac{R_2' L_0}{\Delta} \psi_{1x} + (\omega_0 - \omega) \psi_{2y}; \\
\frac{d\psi_{2y}}{dt} &= -\frac{R_2' L_1}{\Delta} \psi_{2y} + \frac{R_2' L_0}{\Delta} \psi_{1y} - (\omega_0 - \omega) \psi_{2x}; \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{m_1 Z_n L_0}{2 J_{np} \Delta} (\psi_{1y} \psi_{2x} - \psi_{1x} \psi_{2y}) - \frac{1}{J_{np}} M_c; \\
U_{1x} &= k_{U1} f_1 + U_0; \\
U_{1y} &= k_{U1} f_1 + U_0; \\
\omega_0 &= \frac{2\pi f_1}{Z_n},
\end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где ψ_{1x} и ψ_{1y} – проекции вектора потокосцепления статора в ортогональной системе координат Oxy , вращающейся со скоростью магнитного поля;

U_{1x} и U_{1y} – проекции изображающего вектора напряжения в той же системе координат;

ψ_{2x} и ψ_{2y} – соответствующие проекции вектора потокосцепления ротора;

L_1 и R_1 – индуктивность и активное сопротивление цепи статора;

L_2' и R_2' – приведенные индуктивность и активное сопротивление цепи ротора;

L_0 – взаимная индуктивность;

ω_0 – угловая скорость вращения магнитного поля;

ω – угловая частота вращения ротора двигателя;

J_{np} – приведенный момент инерции ротора;

m_1 – число фаз электродвигателя;

Z_n – число пар полюсов;

M_c – момент сопротивления на валу погружного электродвигателя;

$\Delta = L_1 L_2' - L_0^2$;

f_1 – частота питающего напряжения;

k_{U1} – коэффициент пропорциональности,

U_0 – напряжение при нулевой частоте;

t – время.

Система уравнений (1) является нелинейной, поскольку в ней наблюдаются такие произведения переменных, как $\omega_0 \psi_{1y}$, $\omega_0 \psi_{1x}$, $(\omega_0 - \omega) \psi_{2y}$, $(\omega_0 - \omega) \psi_{2x}$, $\psi_{1y} \psi_{2x}$ и $\psi_{1x} \psi_{2y}$. Для определения передаточной функции погружного асинхронного двигателя, например по отношению к управляющему воздействию f_1 , необходимо произвести линеаризацию уравнений в системе (1). Воспользуемся

разложением в степенной ряд Тейлора основных нелинейностей, отбросив при этом члены высшего порядка малости [18–20]. Тогда приведенные выше произведения переменных $\omega_0 \psi_{1y}$ можно представить в виде

$$\omega_0 \psi_{1y} = \frac{2\pi}{Z_n} (\psi_{1y0} f_1 + f_{10} \psi_{1y}); \quad (2)$$

$$\omega_0 \psi_{1x} = \frac{2\pi}{Z_n} (\psi_{1x0} f_1 + f_{10} \psi_{1x}); \quad (3)$$

$$(\omega_0 - \omega) \psi_{2y} = \frac{2\pi}{Z_n} (\psi_{2y0} f_1 + f_{10} \psi_{2y}) - (\psi_{2y0} \omega + \omega_{00} \psi_{2y}); \quad (4)$$

$$(\omega_0 - \omega) \psi_{2x} = \frac{2\pi}{Z_n} (\psi_{2x0} f_1 + f_{10} \psi_{2x}) - (\psi_{2x0} \omega + \omega_{00} \psi_{2x}); \quad (5)$$

$$\psi_{1y} \psi_{2x} = \psi_{2x0} \psi_{1y} + \psi_{1y0} \psi_{2x}; \quad (6)$$

$$\psi_{1x} \psi_{2y} = \psi_{2y0} \psi_{1x} + \psi_{1x0} \psi_{2y}, \quad (7)$$

где ψ_{1x0} , ψ_{1y0} , ψ_{2x0} , ψ_{2y0} , ω_{00} и f_{10} – начальные условия.

Подставляя формулы (2) – (7) в (1) и полагая $U_0 = 0$, после несложных преобразований получим линеаризованную систему уравнений движения погружного асинхронного двигателя

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1) \psi_{1x} &= A f_1 + F \psi_{2x} + B \psi_{1y}; \\ (T_1 p + 1) \psi_{1y} &= C f_1 + F \psi_{2y} - B \psi_{1x}; \\ (T_2 p + 1) \psi_{2x} &= D \psi_{1x} + G f_1 + (H - T_2 \omega_{00}) \psi_{2y} - T_2 \psi_{2y0} \omega; \\ (T_2 p + 1) \psi_{2y} &= D \psi_{1y} - K f_1 - (H - T_2 \omega_{00}) \psi_{2x} + T_2 \psi_{2x0} \omega; \\ J_{np} p \omega &= k_m \left[(\psi_{2x0} \psi_{1y} + \psi_{1y0} \psi_{2x}) - (\psi_{2y0} \psi_{1x} + \psi_{1x0} \psi_{2y}) \right] - M_c, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где $T_1 = \frac{\Delta}{R_1 L_2};$

$T_2 = \frac{\Delta}{R_2 L_1}$ – электромагнитные постоянные времени цепей статора

и ротора;

$p = \frac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования; $A = \left(k_{U1} + \frac{2\pi \psi_{1y0}}{Z_n} \right) T_1;$

$B = \frac{2\pi T_1 f_{10}}{Z_n}; C = \left(k_{U1} - \frac{2\pi \psi_{1x0}}{Z_n} \right) T_1;$

$D = \frac{L_0}{L_1}; F = \frac{L_0}{L_2}; G = \frac{2\pi T_2 \psi_{2y0}}{Z_n};;$

$H = \frac{2\pi T_2 f_{10}}{Z_n}; K = \frac{2\pi T_2 \psi_{2x0}}{Z_n}; k_m = \frac{m_1 Z_n L_0}{2\Delta}.$

Найдем из системы уравнений (8) передаточную функцию асинхронного двигателя по отношению к управляющему воздействию f_1 , при этом за выходную координату примем угловую частоту ω вращения ротора двигателя. Вос-

пользуемся принципом суперпозиции и примем возмущающее воздействие M_c равным нулю. Для достижения поставленной цели выразим из первого уравнения (8) переменную ψ_{1x} :

$$\psi_{1x} = \frac{A}{(T_1 p + 1)} f_1 + \frac{F}{(T_1 p + 1)} \psi_{2x} + \frac{B}{(T_1 p + 1)} \psi_{1y}. \quad (9)$$

Подставляя (9) в остальные уравнения системы (8), получим

$$\left. \begin{aligned} \psi_{1y} &= \frac{C(T_1 p + 1) - AB}{(T_1 p + 1)^2 + B^2} f_1 + \frac{F(T_1 p + 1)}{(T_1 p + 1)^2 + B^2} \psi_{2y} - \frac{BF}{(T_1 p + 1)^2 + B^2} \psi_{1x}; \\ [(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) - DF] \psi_{2x} &= [G(T_1 p + 1) + AD] f_1 + BD \psi_{1y} + \\ &+ (H - T_2 \omega_{00})(T_1 p + 1) \psi_{2y} - \psi_{2y0} T_2 (T_1 p + 1) \omega; \\ (T_2 p + 1) \psi_{2y} &= D \psi_{1y} - K f_1 - (H - T_2 \omega_{00}) \psi_{2x} + T_2 \psi_{2x0} \omega; \\ \frac{J_{np}}{k_m} (T_1 p + 1) p \omega &= [\psi_{2x0} (T_1 p + 1) - B \psi_{2y0}] \psi_{1y} + \\ &+ [\psi_{1y0} (T_1 p + 1) - F \psi_{2y0}] \psi_{2x} - A \psi_{2y0} f_1 - \psi_{1x0} (T_1 p + 1) \psi_{2y}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Производя подстановку ψ_{1y} из первого уравнения (10) во второе, третье и четвертое и избавляясь в дальнейшем аналогичным образом от переменных ψ_{2x} и ψ_{2y} , в конечном итоге получим передаточную функцию асинхронного двигателя при скалярном частотном управлении

$$W_{\omega y}(p) = \frac{\omega(p)}{f_1(p)} = \frac{k_{\omega y} (b_0 p^{13} + b_1 p^{12} + b_2 p^{11} + b_3 p^{10} + b_4 p^9 + b_5 p^8 + b_6 p^7 + b_7 p^6 + b_8 p^5 + b_9 p^4 + b_{10} p^3 + b_{11} p^2 + b_{12} p + 1)}{f_1(p) (a_0 p^{15} + a_1 p^{14} + a_2 p^{13} + a_3 p^{12} + a_4 p^{11} + a_5 p^{10} + a_6 p^9 + a_7 p^8 + a_8 p^7 + a_9 p^6 + a_{10} p^5 + a_{11} p^4 + a_{12} p^3 + a_{13} p^2 + a_{14} p + 1)}, \quad (11)$$

$$\text{где } k_{\omega y} = \frac{A_{71} A_{65} + A_{62} A_{76}}{A_{71} A_{84} + A_{63} A_{76}}; \quad b_0 = A_{40} (A_{01} A_{05} + A_{02} A_{06}); \quad A_{40} = \frac{1}{A_{71} A_{65} + A_{62} A_{76}};$$

$$b_1 = A_{40} (A_{01} A_{15} + A_{11} A_{05} + A_{02} A_{16} + A_{12} A_{06});$$

$$b_2 = A_{40} (A_{01} A_{25} + A_{11} A_{15} + A_{21} A_{05} + A_{02} A_{26} + A_{12} A_{16} + A_{22} A_{06});$$

$$b_3 = A_{40} (A_{01} A_{35} + A_{11} A_{25} + A_{21} A_{15} + A_{31} A_{05} + A_{02} A_{36} + A_{12} A_{26} + A_{22} A_{16} + A_{32} A_{06});$$

$$b_4 = A_{40} (A_{01} A_{45} + A_{11} A_{35} + A_{21} A_{25} + A_{31} A_{15} + A_{41} A_{05} + A_{02} A_{46} + A_{12} A_{36} + A_{22} A_{26} + A_{32} A_{16} + A_{42} A_{06});$$

$$b_5 = A_{40} (A_{01} A_{55} + A_{11} A_{45} + A_{21} A_{35} + A_{31} A_{25} + A_{41} A_{15} + A_{51} A_{05} + A_{02} A_{56} + A_{12} A_{46} + A_{22} A_{36} + A_{32} A_{26} + A_{42} A_{16} + A_{52} A_{06});$$

$$b_6 = A_{40} (A_{01} A_{65} + A_{11} A_{55} + A_{21} A_{45} + A_{31} A_{35} + A_{41} A_{25} + A_{51} A_{15} + A_{61} A_{05} + A_{02} A_{66} + A_{12} A_{56} + A_{22} A_{46} + A_{32} A_{36} + A_{42} A_{26} + A_{52} A_{16} + A_{62} A_{06});$$

$$b_7 = A_{40} (A_{11} A_{65} + A_{21} A_{55} + A_{31} A_{45} + A_{41} A_{35} + A_{51} A_{25} + A_{61} A_{15} + A_{71} A_{05} + A_{02} A_{76} + A_{12} A_{66} + A_{22} A_{56} + A_{32} A_{46} + A_{42} A_{36} + A_{52} A_{26} + A_{62} A_{16});$$

$$b_8 = A_{40} (A_{21} A_{65} + A_{31} A_{55} + A_{41} A_{45} + A_{51} A_{35} + A_{61} A_{25} + A_{71} A_{15} + A_{12} A_{76} + A_{22} A_{66} + A_{32} A_{56} + A_{42} A_{46} + A_{52} A_{36} + A_{62} A_{26});$$

$$\begin{aligned}
b_9 &= A_{40} (A_{31}A_{65} + A_{41}A_{55} + A_{51}A_{45} + A_{61}A_{35} + A_{71}A_{25} + A_{22}A_{76} + A_{32}A_{66} + A_{42}A_{56} + A_{52}A_{46} + \\
&+ A_{62}A_{36}) \\
b_{10} &= A_{40} (A_{41}A_{65} + A_{51}A_{55} + A_{61}A_{45} + A_{71}A_{35} + A_{32}A_{76} + A_{42}A_{66} + A_{52}A_{56} + A_{62}A_{46}); \\
b_{11} &= A_{40} (A_{51}A_{65} + A_{61}A_{55} + A_{71}A_{45} + A_{42}A_{76} + A_{52}A_{66} + A_{62}A_{56}); \\
b_{12} &= A_{40} (A_{61}A_{65} + A_{71}A_{55} + A_{52}A_{76} + A_{62}A_{66}); \quad a_0 = A_{40}A_{01}A_{04}; \quad a_1 = A_{40} (A_{01}A_{14} + A_{11}A_{04}); \\
a_2 &= A_{40} (A_{01}A_{24} + A_{11}A_{14} + A_{21}A_{04} + A_{03}A_{06}); \\
a_3 &= A_{40} (A_{01}A_{34} + A_{11}A_{24} + A_{21}A_{14} + A_{31}A_{04} + A_{03}A_{16} + A_{13}A_{06}); \\
a_4 &= A_{40} (A_{01}A_{44} + A_{11}A_{34} + A_{21}A_{24} + A_{31}A_{14} + A_{41}A_{04} + A_{03}A_{26} + A_{13}A_{16} + A_{23}A_{06}); \\
a_5 &= A_{40} (A_{01}A_{54} + A_{11}A_{44} + A_{21}A_{34} + A_{31}A_{24} + A_{41}A_{14} + A_{51}A_{04} + A_{03}A_{36} + A_{13}A_{26} + A_{23}A_{16} + \\
&+ A_{33}A_{06}) \\
a_6 &= A_{40} (A_{01}A_{64} + A_{11}A_{54} + A_{21}A_{44} + A_{31}A_{34} + A_{41}A_{24} + A_{51}A_{14} + A_{61}A_{04} + A_{03}A_{46} + A_{13}A_{36} + \\
&+ A_{23}A_{26} + A_{33}A_{16} + A_{43}A_{06}) \\
a_7 &= A_{40} (A_{01}A_{74} + A_{11}A_{64} + A_{21}A_{54} + A_{31}A_{44} + A_{41}A_{34} + A_{51}A_{24} + A_{61}A_{14} + A_{71}A_{04} + A_{03}A_{56} + \\
&+ A_{13}A_{46} + A_{23}A_{36} + A_{33}A_{26} + A_{43}A_{16} + A_{53}A_{06}) \\
a_8 &= A_{40} (A_{01}A_{84} + A_{11}A_{74} + A_{21}A_{64} + A_{31}A_{54} + A_{41}A_{44} + A_{51}A_{34} + A_{61}A_{24} + A_{71}A_{14} + A_{03}A_{66} + \\
&+ A_{13}A_{56} + A_{23}A_{46} + A_{33}A_{36} + A_{43}A_{26} + A_{53}A_{16} + A_{63}A_{06}) \\
a_9 &= A_{40} (A_{11}A_{84} + A_{21}A_{74} + A_{31}A_{64} + A_{41}A_{54} + A_{51}A_{44} + A_{61}A_{34} + A_{71}A_{24} + A_{03}A_{76} + A_{13}A_{66} + \\
&+ A_{23}A_{56} + A_{33}A_{46} + A_{43}A_{36} + A_{53}A_{26} + A_{63}A_{16}) \\
a_{10} &= A_{40} (A_{21}A_{84} + A_{31}A_{74} + A_{41}A_{64} + A_{51}A_{54} + A_{61}A_{44} + A_{71}A_{34} + A_{13}A_{76} + A_{23}A_{66} + A_{33}A_{56} + \\
&+ A_{43}A_{46} + A_{53}A_{36} + A_{63}A_{26}) \\
a_{11} &= A_{40} (A_{31}A_{84} + A_{41}A_{74} + A_{51}A_{64} + A_{61}A_{54} + A_{71}A_{44} + A_{23}A_{76} + A_{33}A_{66} + A_{43}A_{56} + A_{53}A_{46} + \\
&+ A_{63}A_{36}) \\
a_{12} &= A_{40} (A_{41}A_{84} + A_{51}A_{74} + A_{61}A_{64} + A_{71}A_{54} + A_{33}A_{76} + A_{43}A_{66} + A_{53}A_{56} + A_{63}A_{46}); \\
a_{13} &= A_{40} (A_{51}A_{84} + A_{61}A_{74} + A_{71}A_{64} + A_{43}A_{76} + A_{53}A_{66} + A_{63}A_{56}); \\
a_{14} &= A_{40} (A_{61}A_{84} + A_{71}A_{74} + A_{53}A_{76} + A_{63}A_{66}).
\end{aligned}$$

Коэффициенты $A_{01} - A_{71}$; $A_{02} - A_{62}$; $A_{03} - A_{63}$; $A_{04} - A_{84}$; $A_{05} - A_{65}$; $A_{06} - A_{76}$ имеют сложную взаимосвязь с параметрами асинхронного двигателя и начальными условиями. Например, коэффициенты A_{42} и A_{45} равны

$$\begin{aligned}
A_{42} &= \left\{ K(1+B^2-DF)T_1 + (2K-CD) \left[(3+B^2-2DF)T_1 + (1+B^2)T_2 \right] + \right. \\
&+ \left[K(1+B^2) + (AB-C)D \right] \left[(3+B^2)T_2 + (3-DF)T_1 \right] + \\
&+ \left\{ A_{30}(H-T_2\omega_{00}) + 2(H-T_2\omega_{00}) \left[(1+B^2)G + 2(AD+G) + BCD \right] + \right. \\
&\left. \left. + A_{20}(ATD+3G) \right\} T_1 \right\} T_1; \\
A_{45} &= \left\{ \left[(10AD+3AB^2D+6BCD+B^3CD+15G+12B^2G+B^4G)\psi_{1y0} + \right. \right. \\
&+ (10C+3B^2C-6AB-AB^3-B^2CDF-6BFG-B^3FG-6CDF)\psi_{2x0} - \\
&- (10A+3AB^2+6BC+B^3C+10FG+3B^2FG)\psi_{2y0} \left. \right] T_1 + \\
&+ \left[(5C+3B^2C-4AB-2AB^3)\psi_{2x0} - (5A+3AB^2+4BC+2B^3C)\psi_{2y0} \right] T_2 \left. \right\} T_1,
\end{aligned}$$

где $A_{20} = (H - T_2 \omega_{00})(1 + B^2) + BDF$; $A_{30} = AD + BCD + (1 + B^2)G$.

Для оценки адекватности полученной передаточной функции произведем моделирование в программе Matlab Simulink асинхронного двигателя 1LA7083-2AA10-Z, имеющего следующие технические характеристики: $P_n = 1100$ Вт; $U_{1n} = 220$ В; $f_{1n} = 50$ Гц; $I_{1n} = 2,3$ А; $\cos \varphi = 0,87$; $\eta = 0,83$; $R_1 = 7,731$ Ом; $L_1 = 0,833$ Гн; $L_2' = 0,677$ Гн; $L_0 = 0,648$ Гн; $T_1 = 0,0275$ с; $T_2 = 0,0273$ с, $Z_n = 1$, $J_{np} = 0,001$ кгм². Расчет переходного процесса «в малом» по нелинейной системе уравнений (1) показывает, что при начальной частоте $f_{10} = 50$ Гц и приращении $\Delta f_1 = 0,3$ Гц время переходного процесса составляет $t_{nn} = 0,197$ с, а перерегулирование – $\sigma = 45,3$ % (рис. 1).

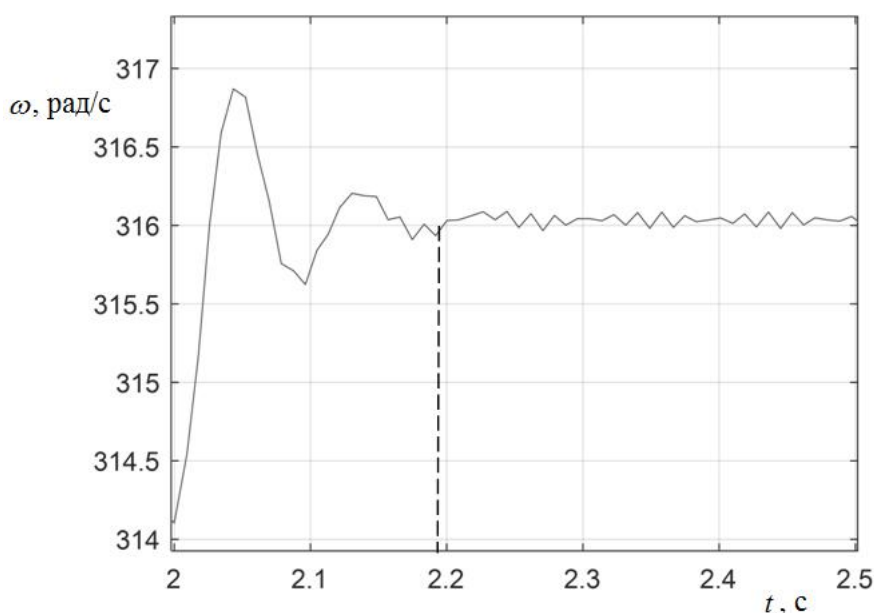


Рис. 1. Переходный процесс на начальной частоте 50 Гц, построенный по нелинейной системе уравнений

При этом проекции потокоцеплений статора и ротора имеют следующие начальные условия: $\psi_{1x0} = 0,718$ Вс, $\psi_{1y0} = -0,678$ Вс, $\psi_{2x0} = 0,56$ Вс, $\psi_{2y0} = -0,528$ Вс, а начальная угловая скорость ротора равна $\omega_{00} = 314,1$ рад/с. Подставляя значения начальных условий и параметров исследуемой электрической машины в формулу (11), найдем численные значения передаточной функции асинхронного двигателя по управляющему воздействию на номинальной частоте питающего напряжения:

$$W_{dy}^{50}(p) = \frac{6,283(1,5859 \cdot 10^{-26} p^{13} + 6,9265 \cdot 10^{-26} p^{12} + 7,6212 \cdot 10^{-23} p^{11} + 2,4949 \cdot 10^{-20} p^{10} + 1,3255 \cdot 10^{-17} p^9 + 3,2488 \cdot 10^{-15} p^8 + 1,0191 \cdot 10^{-12} p^7 + 1,8053 \cdot 10^{-10} p^6 + 3,2033 \cdot 10^{-8} p^5 + 3,6683 \cdot 10^{-6} p^4 + 2,3046 \cdot 10^{-4} p^3 + 7,892 \cdot 10^{-3} p^2 + 0,13948p + 1)}{(3,0808 \cdot 10^{-32} p^{15} + 1,5705 \cdot 10^{-29} p^{14} + 1,5947 \cdot 10^{-26} p^{13} + 5,888 \cdot 10^{-24} p^{12} + 2,9614 \cdot 10^{-21} p^{11} + 8,0395 \cdot 10^{-19} p^{10} + 2,4591 \cdot 10^{-16} p^9 + 4,8007 \cdot 10^{-14} p^8 + 8,8611 \cdot 10^{-12} p^7 + 1,148 \cdot 10^{-9} p^6 + 1,0426 \cdot 10^{-7} p^5 + 6,8865 \cdot 10^{-6} p^4 + 3,1473 \cdot 10^{-4} p^3 + 9,093 \cdot 10^{-3} p^2 + 0,146691p + 1)} \quad .(12)$$

По передаточной функции (12) также построен переходный процесс (рис. 2).

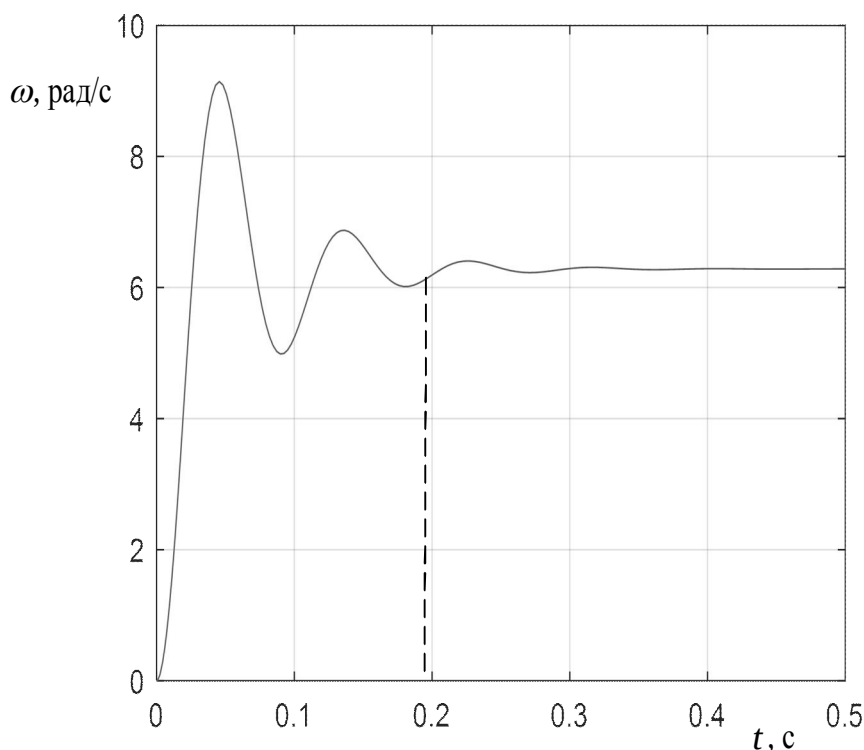


Рис. 2. Переходный процесс на начальной частоте 50 Гц, построенный по передаточной функции

Анализ графика показывает, что время переходного процесса равно $t_m = 0,1976$ с, а перерегулирование – $\sigma = 45,5$ %. Сравнение с аналогичными показателями, полученными по нелинейной системе уравнений, позволяет сказать, что расхождение результатов не превышает 0,44 %.

Для убедительности промоделируем по уравнениям (1) рассматриваемый электродвигатель на начальной частоте $f_{10} = 1$ Гц и $\Delta f_1 = 0,05$ Гц (рис. 3). Время переходного процесса в этом случае составляет $t_m = 0,55$ с, а перерегулирование равно нулю. Начальные условия имеют следующие значения: $\psi_{1x0} = 0,545$

Вс, $\psi_{1y0} = 0,105$ Вс, $\psi_{2x0} = 0,424$ Вс, $\psi_{2y0} = 0,082$ Вс, $\omega_{00} = 6,282$ рад/с. Поэтому передаточная функция (11) принимает следующие численные значения:

$$W_{dy}^1(p) = \frac{6,2837(1,7671 \cdot 10^{-19} p^{13} + 7,7186 \cdot 10^{-17} p^{12} + 1,5189 \cdot 10^{-14} p^{11} + 1,78 \cdot 10^{-12} p^{10} + 1,3826 \cdot 10^{-10} p^9 + 7,4948 \cdot 10^{-9} p^8 + 2,9057 \cdot 10^{-7} p^7 + 8,1211 \cdot 10^{-6} p^6 + 1,6286 \cdot 10^{-4} p^5 + 2,3063 \cdot 10^{-3} p^4 + 0,0225 p^3 + 0,1445 p^2 + 0,5647 p + 1)}{(1,0923 \cdot 10^{-22} p^{15} + 5,5684 \cdot 10^{-20} p^{14} + 1,3048 \cdot 10^{-17} p^{13} + 1,864 \cdot 10^{-15} p^{12} + 1,8144 \cdot 10^{-13} p^{11} + 1,2736 \cdot 10^{-11} p^{10} + 6,6499 \cdot 10^{-10} p^9 + 2,625 \cdot 10^{-8} p^8 + 7,8773 \cdot 10^{-7} p^7 + 1,7911 \cdot 10^{-5} p^6 + 3,0477 \cdot 10^{-4} p^5 + 3,7931 \cdot 10^{-3} p^4 + 0,033255 p^3 + 0,193028 p^2 + 0,661296 p + 1)} \quad (13)$$

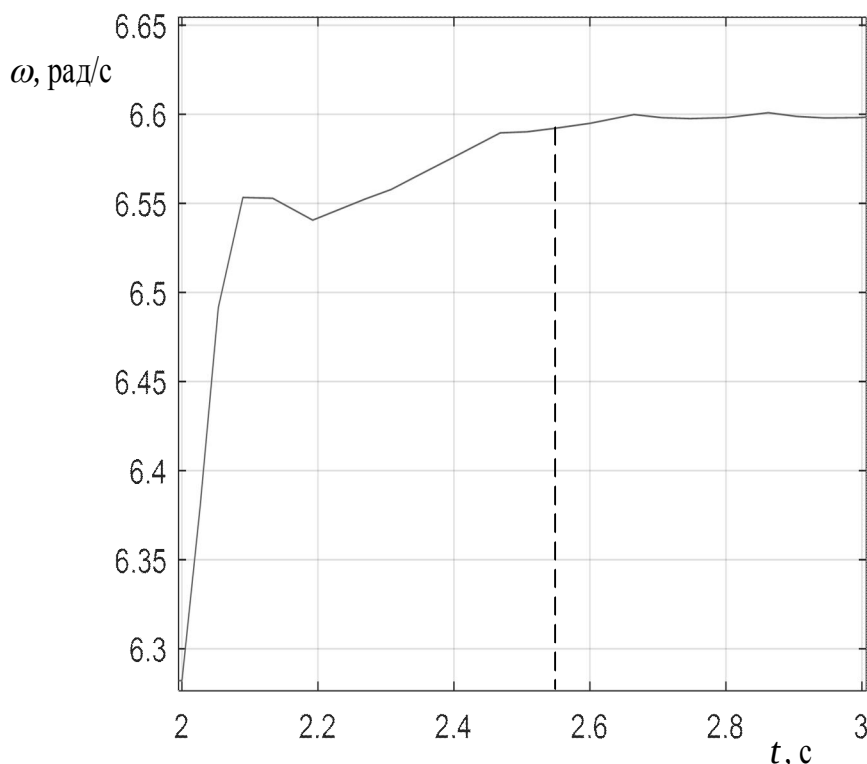


Рис. 3. Переходный процесс на начальной частоте 1 Гц, построенный по нелинейной системе уравнений

График переходного процесса, построенный по передаточной функции (13), показывает, что время переходного процесса равно $t_m = 0,547$ с, а перерегулирование отсутствует (рис. 4). Сравнивая эти значения с показателями, полученными при моделировании нелинейной системы уравнений, можно сделать вывод, что расхождение результатов не превышает 0,54 %.

Следовательно, передаточная функция (11), имеющая характеристический полином пятнадцатого порядка, с высокой степенью точности отражает процессы, протекающие в любом асинхронном двигателе, в том числе и погружном, при скалярном частотном управлении. Полученная линеаризованная модель может быть использована при синтезе регуляторов замкнутых систем управления с

асинхронными исполнительными двигателями, и в частности при выборе параметров регулятора, поддерживающего требуемый динамический уровень в нефтяной скважине.

Аналогичным образом может быть найдена передаточная функция погружного двигателя и при квадратичном законе регулирования напряжения в функции частоты.

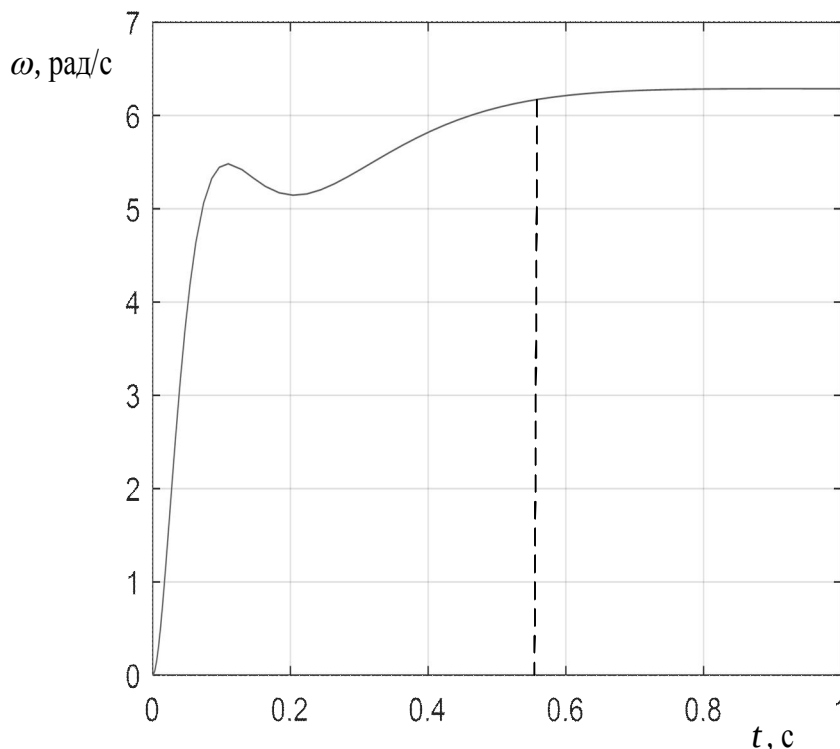


Рис. 4. Переходный процесс на начальной частоте 1 Гц, построенный по передаточной функции

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Масляницын А.П. Автоматизация технологического процесса добычи нефти погружными центробежными насосами: Дис.... канд. техн. наук. – Самара: СамГАСА, 1999. – 268 с.
2. Стариков В.А. Автоматизация технологического процесса вывода нефтяной скважины на стационарный режим работы после капитального ремонта: Дис.... канд. техн. наук. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2010. – 153 с.
3. Патент России № 2165037. Способ эксплуатации скважины с погружным центробежным насосом и устройство для его осуществления / В.М. Люстрицкий, С.Я. Галицков, А.П. Масляницын, С.А. Шишков (Россия) // Оpubл. 10.04.2001, Бюл. № 10.
4. Патент России № 2181829. Способ вывода скважины, оборудованной установкой электроцентробежного насоса с частотно-регулируемым приводом, на стационарный режим работы / В.М. Люстрицкий, С.А. Шишков (Россия) // Оpubл. 27.04.2002, Бюл. № 12.
5. Живаева В.В., Стариков А.В., Стариков В.А. Применение частотно-регулируемого электропривода для вывода скважины на стационарный режим // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Технические науки. – 2009. – № 1 (23). – С. 142–151.
6. Патент России № 2370673. Система управления погружным электроцентробежным насосом / В.В. Живаева, А.В. Стариков, В.А. Стариков (Россия) // Оpubл. 20.10.2009, Бюл. № 29.
7. Патент России № 2442024. Система управления погружным электроцентробежным насосом / А.В. Стариков, В.А. Стариков (Россия) // Оpubл. 10.02.2012, Бюл. № 4

8. *Стариков В.А.* Дискретная математическая модель цифровой системы управления погружным электроцентробежным насосом // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Технические науки. – 2009. – № 3 (25). – С. 193–198.
9. *Михайлов О.П.* Автоматизированный электропривод станков и промышленных роботов. – М.: Машиностроение, 1990. – 304 с.
10. *Соколовский Г.Г.* Электроприводы переменного тока с частотным регулированием. – М.: Академия, 2006. – 265 с.
11. *Анучин А.С.* Системы управления электроприводов. – М.: Изд. дом МЭИ, 2015. – 373 с.
12. *Калачев Ю.Н.* Векторное регулирование (заметки практика). – М.: ЭФО, 2013. – 63 с.
13. *Поздеев А.Д.* Электромагнитные и электромеханические процессы в частотно-регулируемых асинхронных электроприводах. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1998. – 172 с.
14. *Онищенко Г.Б.* Теория электропривода: учебник для студ. высш. учебн. заведений. – М.: ООО «Образование и исследование», 2013. – 352 с.
15. *Стариков А.В.* Линеаризованная математическая модель асинхронного электродвигателя как объекта системы частотного управления // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки. – 2002. – Вып. 16. – С. 175–180.
16. *Галицков С.Я., Галицков К.С., Масляницын А.П.* Динамика асинхронного двигателя: Учеб. пособие. – Самара: СамГАСА, 2004. – 104 с.
17. *Кузнецов В.А., Мигачев А.В., Стариков А.В., Титов А.Р.* Особенности математической модели асинхронного электродвигателя аппаратов воздушного охлаждения масла // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Технические науки. – 2011. – № 3 (31). – С. 171–179.
18. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1975. – 768 с.
19. Теория автоматического управления: Учеб. для вузов по спец. «Автоматика и телемеханика». В 2 ч. Ч. 1. Теория линейных систем автоматического управления / Н.А. Бабаков, А.А. Воронов, А.А. Воронова и др.; под ред. А.А. Воронова. – М.: Высш. шк., 1986. – 367 с.
20. *Попов Е.П.* Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. – М.: Наука, 1989. – 304 с.

Статья поступила в редакцию 20 октября 2019 г.

LINEARIZED MATHEMATICAL MODEL OF SUBMERSIBLE ASYNCHRONOUS MOTOR

A.V. Starikov², S.L. Lisin¹, T.V. Tabachnikova², I.A. Kosorlukov¹, O.S. Belyaeva¹

¹Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia

²Almetyevsk State Oil Institute
2, Lenin's street, Almetyevsk, Tatarstan, 423450, Russia

Abstract. Currently, submersible induction motors are widely used in electric centrifugal pump units, which provide the bulk of oil production in Russia. To maintain a given dynamic fluid level in the well, submersible pump control stations are equipped with closed systems with frequency converters. For the correct synthesis of the regulators of the dynamic level stabilization system, it is necessary to know the transfer function of the induc-

Alexander V. Starikov, (Dr. Sci. (Techn.)), Professor. Head of the Department.

Sergey L. Lisin (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.

Tatyana V. Tabachnikova (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor, Head of the Department.

Igor A. Kosorlukov (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.

Olga S. Belyaeva Postgraduate Student.

tion motor as a control object. It should be borne in mind that for matching a high-voltage submersible motor with a frequency converter, a step-up transformer and scalar frequency control of an asynchronous machine are used. Existing linearized mathematical models of an induction motor with this control method are approximate. Therefore, the purpose of this study is to obtain an updated model of a submersible induction motor. The article provides a well-known system of equations of an asynchronous machine with scalar frequency control. It is shown that this system is non-linear since a number of variables are multiplied in it. The linearization of the main nonlinearities was carried out by the method of their expansion into a Taylor series. In the linearized system, the frequency of the supply voltage of the stator is taken as the input coordinate, and the rotational speed of the rotor of the induction motor is taken as the output coordinate. Getting rid of the intermediate variables by the method of sequential substitution, we obtained the transfer function of a submersible induction motor with scalar frequency control. It is shown that the characteristic polynomial of the found transfer function is of the fifteenth order. Analytical expressions are found that connect the coefficients of the transfer function with the parameters of the induction motor and the coordinates of the starting point. The adequacy of the obtained mathematical model is estimated by comparing the modeling results of step response in a nonlinear system of equations and in a linearized one. It is shown that the discrepancy between the results does not exceed 0.54%.

Keywords: submersible induction motor, scalar control, mathematical model, transfer function, linearization.

REFERENCES

1. *Maslyanitsyn A.P.* Automation of the technological process of oil production by submersible centrifugal pumps: Dis cand. tech. sciences. Samara: SamGASA, 1999. 268 p.
2. *Starikov V.A.* Automation of the technological process of bringing an oil well to a stationary mode of operation after a major overhaul: Dis cand. tech. sciences. Samara: Samara State Technical University, 2010. 153 p.
3. Patent of Russia 2165037. Method for operating a well with a submersible centrifugal pump and a device for its implementation. V.M. Lyustritsky, S.Ya. Galitskov, A.P. Maslyanitsyn, S.A. Shishkov (Russia). Publ. 04.10.2001, Bull. 10.
4. Patent of Russia 2181829. Method for outputting a well equipped with an electric centrifugal pump with a variable frequency drive to a stationary operating mode / V.M. Lyustritsky, S.A. Shishkov (Russia). Publ. 04.27.2002, Bull. 12.
5. *Zhivaeva V.V., Starikov A.V., Starikov V.A.* The use of a frequency-controlled electric drive to bring a well to a stationary mode. Bulletin of Samara State Technical University. Series "Engineering sciences", 1 (23). 2009. Samara: SamSTU, 2009. Pp. 142–151.
6. Patent of Russia 2370673. Control system for submersible electric centrifugal pump. V.V. Zhivaev, A.V. Starikov, V.A. Starikov (Russia). Publ. 10.20.2009, Bull. 29.
7. Patent of Russia 2442024. Control system for a submersible electric centrifugal pump. A.V. Starikov, V.A. Starikov (Russia). Publ. 02.10.2012, Bull. 4.
8. *Starikov V.A.* Discrete mathematical model of a digital control system for a submersible electric centrifugal pump. Bulletin of Samara State Technical University. Series "Engineering sciences", 3 (25) – 2009. Samara: SamSTU, 2009. Pp. 193–198.
9. *Mikhailov O.P.* Automated electric drive of machines and industrial robots. Moscow: Mechanical Engineering, 1990. 304 p.
10. *Sokolovsky G.G.* Electric drives of alternating current with frequency regulation. Moscow: Academy, 2006. 265 p.
11. *Anuchin A.S.* Control systems of electric drives. Moscow: Publishing house MEI, 2015. 373 p.
12. *Kalachev Yu.N.* Vector regulation (practice notes). Moscow: EFO, 2013. 63 p.
13. *Pozdeev A.D.* Electromagnetic and electromechanical processes in frequency-controlled asynchronous electric drives. Cheboksary: Publishing house of Chuvash. University, 1998. 172 p.
14. *Onishchenko G.B.* Theory of electric drive: a textbook for students of higher education institutions. Moscow: Education and Research, 2013. 352 p.
15. *Starikov A.V.* Linearized mathematical model of an asynchronous electric motor as an object of a frequency control system. Bulletin of Samara State Technical University. Issue 16. A series of "Physics and Mathematics". Samara: Samara State Technical University, 2002. Pp. 175–180.

16. *Galitskov S.Ya., Galitskov K.S., Maslyanitsyn A.P.* Dynamics of the asynchronous motor: Textbook. Samara: SamGASA, 2004. 104 p.
17. *Kuznetsov V.A., Migachev A.V., Starikov A.V., Titov A.R.* Features of the mathematical model of an asynchronous electric motor of air-cooled oil coolers. Bulletin of Samara State Technical University. Series "Engineering sciences", 3 (31). – 2011. – Samara: SamSTU, 2011. – pp. 171–179.
18. *Besekersky V.A., Popov E.P.* Theory of automatic control systems. Moscow: Nauka, 1975. 768 p.
19. Theory of automatic control: Textbook. for universities for special. "Automation and telemechanics". In 2 hours. Part 1. Theory of linear automatic control systems. N.A. Babakov, A.A. Voronov, A.A. Voronova, etc. Ed. A.A. Voronov. Moscow: Higher school, 1986. 367 p.
20. *Popov E.P.* The theory of linear systems of automatic regulation and control. Moscow: Nauka, 1989. 304 p.