Приборостроение, метрология и информационно-измерительные приборы и системы

УДК 681.391:543/545

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИГНАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БАЗИСА ФУНКЦИЙ ЧЕБЫШЕВА – ЭРМИТА

Р.Т. Сайфуллин, А.В. Бочкарев

Самарский государственный технический университет
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Аннотация. Цель работы заключается в разработке базиса, позволяющего по коэффициентам разложения исходного сигнала в базисе функций Чебышева – Эрмита восстановить массив вейвлет-коэффициентов исходного сигнала. Для формирования базиса вейвлет-преобразования аналитически вычисляется вейвлет-преобразование функций Чебышева – Эрмита. В качестве вейвлетов в работе используются производные функции Гаусса. Рассматриваются вопросы формирования базисов перехода от коэффициентов разложения сигнала по функциям Чебышева – Эрмита к вейвлет-преобразованиям с использованием в качестве анализирующих вейвлетов производных функции Гаусса 1-го и m-го порядка. В качестве примера приводится базис перехода от коэффициентов разложения исходного сигнала по функциям Чебышева – Эрмита к вейвлет-преобразованию с использованием МНАТ-вейвлета. При этом вейвлет-преобразование сигнала осуществляется в два этапа. На первом этапе получают разложение исходного сигнала в виде взвешенной суммы базисных функций Чебышева – Эрмита. На втором этапе, зная весовые множители функций, полученных на первом этапе, а также аналитическое выражение непрерывного вейвлет-преобразования для конкретных базисных функций и вейвлета, восстанавливают вейвлет-преобразование исходного сигнала. Приведены примеры вейвлет-преобразований сформированных базисов. Благодаря использованию полученных формул расчета вейвлет-коэффициентов удается построить быстрые вычислительные алгоритмы обработки. Для вычислений и графического представления результатов моделирования использована система компьютерной алгебры Wolfram Mathematica 11.3.

Ключевые слова: функции Чебышева – Эрмита, вейвлет-преобразование, вейвлеты Гаусса, функция Гаусса, базис вейвлет-преобразования, преобразование сигналов, разложение сигнала, МНАТ-вейвлет.

Сайфуллин Раухат Талгатович (д.т.н., проф.), профессор кафедры «Информационно-измерительная техника».

Бочкарев Андрей Владимирович, аспирант.

Введение

Одним из подходов к созданию алгоритмов обработки сигналов является кодирование сигнала в базисе функций Чебышева – Эрмита с последующим декодированием по другим, предварительно рассчитанным базисам; причем в зависимости от выбора базиса возможно получить сам сигнал [1–3], его производную различных порядков [3, 4], вейвлет-преобразование [5] и т. п. Функции Чебышева – Эрмита находят широкое распространение в различных областях науки и техники [6–13], обладают сглаживающим свойством [13], а также используются для описания несимметричных пиков аналитических сигналов [14].

Вейвлет-анализ является одним из наиболее мощных и гибких средств исследования и цифровой обработки сигналов: помимо задач их фильтрации и сжатия анализ в базисе вейвлет-функций позволяет решить задачи идентификации, моделирования, аппроксимации стационарных и нестационарных процессов, исследовать наличие разрывов и т. д.

В рамках данной работы рассматривается возможность формирования в общем виде базиса перехода от коэффициентов разложения сигнала по функциям Чебышева – Эрмита к его непрерывному вейвлет-преобразованию. Ранее данный вопрос был рассмотрен на некоторых частных примерах [5].

1. Формирование базиса перехода от коэффициентов разложения сигнала по функциям Чебышева – Эрмита к вейвлет-преобразованию с использованием производной первого порядка функции Гаусса в качестве анализирующего вейвлета

При использовании производной m-го порядка функции Гаусса в качестве анализирующего вейвлета вейвлет-преобразование n-й базисной функции имеет вид

$$W_{m,\varphi_n}(a,b)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)\cdot g_m\left(\frac{x-b}{a}\right)dx, \tag{1}$$

причем

$$\varphi_n\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)=\frac{1}{\alpha_n}\cdot H_n\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)\cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\gamma^2}}, \tag{2}$$

где $\alpha_n=\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}$ – нормирующая константа;

x_0 – величина сдвига функции Чебышева – Эрмита;

γ – коэффициент масштаба функции Чебышева – Эрмита;

$$g_m(x)=(-1)^{m+1}\frac{d^m e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^m}, \tag{3}$$

или, с учетом сдвига (b) и масштаба (a):

$$g_m\left(\frac{x-b}{a}\right)=(-1)^{m+1}\frac{d^m e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{a}\right)^2}}{d\left(\frac{x-b}{a}\right)^m}.$$

В (2) $H_n\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)$ – полином Эрмита n порядка, определяемый в общем виде выражением [15–17]

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\cdot\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}.$$

Также полиномы Эрмита могут быть заданы в явном виде [16, 17]:

$$H_n(x)=n!\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{(-1)^k}{k!(n-2k)!}(2\cdot x)^{n-2k},$$

где $\lfloor\cdot\rfloor$ – целая часть,

или, с учетом переменных масштаба (γ) и сдвига (x_0):

$$H_n\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)=n!\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{(-1)^k}{k!(n-2k)!}\left(2\cdot\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^{n-2k}. \quad (4)$$

Рассмотрим нахождение вейвлет-преобразования n-й базисной функции первого порядка. Для этого в качестве вейвлета необходимо использовать

$$g_1\left(\frac{x-b}{a}\right)=-\frac{x-b}{a}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{a}\right)^2}. \quad (5)$$

Подстановка (2) и (5) в выражение для прямого вейвлет-преобразования (1) приводит к соотношению

$$\begin{aligned}W_{m,\varphi_n}(a,b)&=-\frac{1}{\alpha_n\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-b}{a}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{a}\right)^2}\cdot H_n\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)\cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\gamma^2}}dt=\\&=-\frac{1}{\alpha_n\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-b}{a}\cdot H_n\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)\cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\gamma^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{a}\right)^2}dt.\end{aligned} \quad (6)$$

Чтобы упростить нахождение интеграла (6), введем новые переменные t и d:

$$t=x-\frac{a^2x_0+\gamma^2 b}{a^2+\gamma^2}, \quad (7)$$

$$d=\sqrt{a^2+\gamma^2}. \quad (8)$$

С учетом этих переменных получим следующий вид степени экспоненты выражения (6):

$$-\frac{\left(x-x_0\right)^2}{2\gamma^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{a}\right)^2=-\frac{t^2d^2}{2\gamma^2a^2}-\frac{\left(x_0-b\right)^2}{2d^2}. \qquad (9)$$

Подставим (9) в (6):

$$W_{m,\varphi_n}\left(a,b\right)=-\frac{1}{\alpha_n\sqrt{a}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x-b}{a}\cdot H_n\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)\cdot e^{-\frac{t^2d^2}{2\gamma^2a^2}-\frac{\left(x_0-b\right)^2}{2d^2}}dt. \qquad (10)$$

Поскольку была выполнена замена (7), следует перейти от x к t во всех частях выражения (10), для чего выполним замены:

$$\frac{x-b}{a}=\frac{1}{a}\left(t+a^2p\right),$$

$$\frac{x-x_0}{\gamma}=\frac{1}{\gamma}\left(t-\gamma^2p\right),$$

где

$$p=\frac{x_0-b}{a^2+\gamma^2}=\frac{x_0-b}{d^2}.$$

Таким образом, (10) примет вид:

$$\begin{aligned}W_{m,\varphi_n}\left(a,b\right)&=-\frac{1}{\alpha_n\sqrt{a}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a}\left(t+a^2p\right)\cdot H_n\left(\frac{1}{\gamma}\left[t-\gamma^2p\right]\right)\cdot e^{-\frac{t^2d^2}{2\gamma^2a^2}-\frac{\left(x_0-b\right)^2}{2d^2}}dt=\\&=-\frac{1}{\alpha_n\sqrt{a^3}}\cdot e^{-\frac{\left(x_0-b\right)^2}{2d^2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(t+a^2p\right)\cdot H_n\left(\frac{1}{\gamma}\left[t-\gamma^2p\right]\right)\cdot e^{-\frac{t^2d^2}{2\gamma^2a^2}}dt.\end{aligned} \qquad (11)$$

Для нахождения данного интеграла следует привести

$$\left(t+a^2p\right)\cdot H_n\left(\frac{1}{\gamma}\left[t-\gamma^2p\right]\right)\cdot e^{-\frac{t^2d^2}{2\gamma^2a^2}}$$

к виду

$$e^{-t^2q}\sum_{i=0}^{n}\rho_it^i, \qquad (12)$$

где ρ_i – некоторый коэффициент при переменной t соответствующей степени;
q – некоторая константа.

Представление (12) выгодно потому, что интеграл такого выражения является табличным [18]. Следовательно, в следующем полиноме

$$H_{1,\varphi_n}\left(t\right)\overset{def}{=}\left(t+a^2p\right)\cdot H_n\left(\frac{1}{\gamma}\left[t-\gamma^2p\right]\right), \qquad (13)$$

который является частью подынтегрального выражения, необходимо привести все подобные члены таким образом, чтобы сформировать сумму вида (12).

Рассмотрим полином Эрмита, входящий в (13), и для удобства записи выполним замену $\lambda_k^n = \dfrac{(-1)^k}{k!(n-2k)!}$:

$$H_n\left(\frac{1}{\gamma}\left[t-\gamma^2 p\right]\right) = n!\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \lambda_k^n \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{n-2k} \left(t-\gamma^2 p\right)^{n-2k}. \tag{14}$$

Очевидно, что $\left(t-\gamma^2 p\right)^{n-2k}$ – бином Ньютона степени n-2k, который можно представить в виде

$$\left(t-\gamma^2 p\right)^{n-2k} = \sum_{i=0}^{n-2k} C_{n-2k}^i \left(-1\right)^i t^{n-2k-i} \cdot \gamma^{2i} p^i, \tag{15}$$

где $\left(-1\right)^i$ характеризует тот факт, что основание бинома представлено разностью;

$$C_{n-2k}^i = \frac{\left(n-2k\right)!}{i!\left(n-2k-i\right)!}.$$

Подставив (15) в (14), получим:

$$H_n\left(\frac{1}{\gamma}\left[t-\gamma^2 p\right]\right) = n!\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}\left\{\lambda_k^n \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{n-2k} \sum_{i=0}^{n-2k}\left[\left(-1\right)^i C_{n-2k}^i \cdot t^{n-2k-i} \cdot \gamma^{2i} p^i\right]\right\}. \tag{16}$$

Подставляя (16) в (13), с учетом выполненных замен имеем:

$$H_{1,\varphi_n}\left(t\right) = n!\left(t+a^2 p\right)\cdot \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}\left\{\lambda_k^n \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{n-2k} \sum_{i=0}^{n-2k}\left[\left(-1\right)^i C_{n-2k}^i \cdot t^{n-2k-i} \cdot \gamma^{2i} p^i\right]\right\},$$

где за счет дистрибутивности операции суммирования множитель $\left(t+a^2 p\right)$ можно внести под знак суммы:

$$\begin{gathered} H_{1,\varphi_n}\left(t\right) = n!\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}\left\{\lambda_k^n \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{n-2k} \times \right. \\ \left. \sum_{m=0}^{n-2k}\left[\left(-1\right)^m C_{n-2k}^m \left(t^{n-2k-m+1} \cdot \gamma^{2m} p^m + t^{n-2k-m} \cdot \gamma^{2m} p^{m+1} a^2\right)\right]\right\}. \end{gathered} \tag{17}$$

Выражение (17) соответствует виду суммы, приведенному в (12). Такое представление выгодно потому, что известен интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n \cdot e^{-t^2 q} dt = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{\sqrt{2^n q^n}} \cdot \sqrt{\dfrac{\pi}{q}} & ,n \mod 2 = 0, \\ 0, n \mod 2 = 1, \end{cases}$$

который позволяет проинтегрировать каждый член суммы вида (12).

При известном $q=\left(\frac{d}{\sqrt{2}a\gamma}\right)^2$ данное выражение примет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n \cdot e^{-t^2\left(\frac{d}{\sqrt{2}a\gamma}\right)^2} dt = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2\pi}\left(a\gamma\right)^{n+1}\cdot\left(n-1\right)!!}{d^{n+1}}, n \mod 2 = 0. \\ 0, n \mod 2 = 1. \end{cases} \qquad (18)$$

Для формирования базиса перехода от коэффициентов Чебышева – Эрмита к вейвлет-преобразованию с анализирующим вейвлетом в виде первой производной функции Гаусса необходимо подставить в качестве $\left(t+a^2\frac{x_0-b}{a^2+\gamma^2}\right)\cdot H_n\left(\frac{1}{\gamma}\left[t-\gamma^2 p\right]\right)$ выражение (17) в (11):

$$W_{m,\varphi_n}\left(a,b\right)=\frac{-e^{-\frac{\left(x_0-b\right)^2}{2d^2}}}{\alpha_n\sqrt{a^3}}\int_{-\infty}^{\infty} H_{1,\varphi_n}\left(t\right)\cdot e^{-t^2\left(\frac{d}{\sqrt{2}a\gamma}\right)^2} dt, \qquad (19)$$

при этом получим сумму интегралов вида (18).

Введем следующее обозначение:

$$I_n=\int_{-\infty}^{\infty} t^n \cdot e^{-t^2\left(\frac{d}{\sqrt{2}a\gamma}\right)^2} dt,$$

а также соответствующее ему

$$H_{1,\varphi_n}\left(I\right)\overset{def}{=}H_{1,\varphi_n}\left(t\right),\ t^n \to I_n,$$

с учетом которых (19) можно представить в виде

$$W_{1,\varphi_n}\left(a,b\right)=\frac{-e^{-\frac{\left(x_0-b\right)^2}{2d^2}}}{\alpha_n\sqrt{a^3}}H_{1,\varphi_n}\left(I\right). \qquad (20)$$

Таким образом, полином (18) при замене $t^n=I_n$ является результатом интегрирования выражения

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_{1,\varphi_n}\left(t\right)\cdot e^{-t^2\left(\frac{d}{\sqrt{2}a\gamma}\right)^2} dt\,.$$

Выражение (20) задает базис перехода от коэффициентов Чебышева – Эрмита к вейвлет-преобразованию с первой производной функции Гаусса в качестве вейвлета.

2. Формирование базиса перехода от коэффициентов разложения сигнала по функциям Чебышева – Эрмита к вейвлет-преобразованию с использованием производной *m*-го порядка функции Гаусса в качестве анализирующего вейвлета

Чтобы распространить результат на произвольный порядок m производной функции Гаусса, рассмотрим выражение (3), в общем виде описывающее m-й вейвлет. Представим его в следующем виде:

$$g_m(x) = (-1)(-1)^m \frac{d^m e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^m}. \qquad (21)$$

Обратимся к определению полиномов Эрмита. Помимо полиномов Эрмита $H_n(x)$ существуют также $He_m(x)$, определяемые выражением [17]:

$$He_m(x) = (-1)^m e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n}.$$

Следовательно:

$$(-1)^m \frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n} = e^{-\frac{x^2}{2}} He_m(x). \qquad (22)$$

Выполнив замену (22) в (21), а также $\frac{x-b}{a} \overset{def}{=} x$, получим следующий вид выражения для гауссовских вейвлетов:

$$g_m\left(\frac{x-b}{a}\right) = (-1) \cdot e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}} He_m\left(\frac{x-b}{a}\right), \qquad (23)$$

которое выгодно тем, что $He_m(x)$ полиномы Эрмита, равно как и $H_n(x)$, также имеют явное представление:

$$He_m\left(\frac{x-b}{a}\right) = m! \sum_{j=0}^{m/2} \lambda_j^m \frac{(x-b)^{m-2j}}{2^j a^{m-2j}}, \qquad (24)$$

где $\lambda_j^m = \frac{(-1)^j}{j!(m-2j)!}$.

Замена дифференцирования экспоненты на полином дает преимущества при интегрировании.

Таким образом, при использовании (23) в качестве выражения, задающего вейвлет m-го порядка, после приведения всех подобных членов и выделения полного квадрата вейвлет-преобразование (1) примет вид

$$W_{m,\varphi_n}(a,b) = \frac{-e^{-\frac{(x_0-b)^2}{2d^2}}}{\alpha_n \sqrt{a}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} He_m\left(\frac{x-b}{a}\right) \cdot H_n\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right) \cdot e^{-t^2\left(\frac{d}{\sqrt{2}a\gamma}\right)^2} dt. \qquad (25)$$

Очевидно, что нахождение интеграла в (25), так же как и в случае с вейвлетом первого порядка, сводится к приведению $He_m\left(\frac{x-b}{a}\right)\cdot H_n\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)\cdot e^{-t^2\left(\frac{d}{\sqrt{2}a\gamma}\right)^2}$ к виду (12). Для этого выполним следующие замены, аналогичные тем, что были использованы в (11):

$$\frac{x-b}{a}=\frac{1}{a}\left(t+a^2p\right),$$

$$\frac{x-x_0}{\gamma}=\frac{1}{\gamma}\left(t-\gamma^2p\right),$$

где

$$p=\frac{x_0-b}{a^2+\gamma^2}=\frac{x_0-b}{d^2}.$$

В результате (25) примет вид

$$W_{m,\varphi_n}(a,b)=\frac{-e^{-\frac{(x_0-b)^2}{2d^2}}}{\alpha_n\sqrt{a}}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}He_m\left(\frac{1}{a}\left[t+a^2p\right]\right)\cdot H_n\left(\frac{1}{\gamma}\left[t-\gamma^2p\right]\right)\cdot e^{-t^2\left(\frac{d}{\sqrt{2}a\gamma}\right)^2}dt. \quad (26)$$

Для нахождения интеграла (26) вначале рассмотрим $He_m(x)$ полином Эрмита из (26):

$$\begin{aligned}He_m\left(\frac{1}{a}\left[t+a^2p\right]\right)&=m!\sum_{j=0}^{m/2}\lambda_j^m\left(\frac{1}{a}\right)^{m-2j}\left(\frac{1}{2}\right)^j\left(t+a^2p\right)^{m-2j}=\\&=m!\sum_{j=0}^{m/2}\left\{\lambda_j^m\left(\frac{1}{a}\right)^{m-2j}\left(\frac{1}{2}\right)^j\sum_{l=0}^{m-2j}\left[C_{m-2j}^l\cdot t^{m-2j-l}\cdot a^{2l}p^l\right]\right\}.\end{aligned}\quad (27)$$

Здесь представляется возможным раскрыть скобки в соответствии с выражением для бинома Ньютона (аналогичного (15), но без $(-1)^i$, поскольку основание бинома представлено суммой, а не разностью).

Введем следующее обозначение аналогично рассмотренному ранее случаю (при $m = 1$):

$$H_{m,\varphi_n}(t)\overset{def}{=}\frac{H_n\left(\frac{1}{\gamma}\left[t-\gamma^2p\right]\right)}{n!}\cdot\frac{He_m\left(\frac{1}{a}\left[t+a^2p\right]\right)}{m!}, \quad (28)$$

где $m!$ и $n!$ вынесены для удобства вычислений.

Подставляя в (28) выражение (16), получим:

$$H_{m,\varphi_n}(t)=\frac{He_m(t)}{m!}\cdot\sum_{k=0}^{n/2}\left\{\lambda_k^n\cdot\left(\frac{2}{\gamma}\right)^{n-2k}\cdot\sum_{i=0}^{n-2k}\left[(-1)^i\cdot C_{n-2k}^i\cdot t^{n-2k-i}\cdot\gamma^{2i}\cdot p^i\right]\right\}.$$

С учетом дистрибутивности суммирования вносим $\frac{He_m(t)}{m!}$ под знак внутренней суммы:

$$H_{m,\varphi_n}(t)=\sum_{k=0}^{n/2}\left\{\lambda_k^n\cdot\left(\frac{2}{\gamma}\right)^{n-2k}\cdot\sum_{i=0}^{n-2k}\left[(-1)^i\cdot C_{n-2k}^i\cdot\gamma^{2i}\cdot p^i\cdot t^{n-2k-i}\cdot\frac{He_m(t)}{m!}\right]\right\}. \quad (29)$$

Выполняя подстановку (27) в (29), получим:

$$H_{m,\varphi_n}(t)=\sum_{k=0}^{n/2}\left\langle\lambda_k^n\cdot\left(\frac{2}{\gamma}\right)^{n-2k}\cdot\sum_{i=0}^{n-2k}\left\{(-1)^i\cdot C_{n-2k}^i\cdot\gamma^{2i}\cdot p^i\cdot t^{n-2k-i}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\sum_{j=0}^{m/2}\left[\lambda_j^m\left(\frac{1}{a}\right)^{m-2j}\left(\frac{1}{2}\right)^j\sum_{l=0}^{m-2j}\left(C_{m-2j}^l\cdot t^{m-2j-l}\cdot a^{2l}\cdot p^l\right)\right]\right\}\right\rangle.$$

За счет дистрибутивности операции суммирования вносим t^{n-2k-i} под знак внутренней суммы (по индексу l):

$$H_{m,\varphi_n}(t)=\sum_{k=0}^{n/2}\left\langle\lambda_k^n\cdot\left(\frac{2}{\gamma}\right)^{n-2k}\cdot\sum_{i=0}^{n-2k}\left\{(-1)^i\cdot C_{n-2k}^i\cdot\gamma^{2i}\cdot p^i\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\sum_{j=0}^{m/2}\left[\lambda_j^m\left(\frac{1}{a}\right)^{m-2j}\left(\frac{1}{2}\right)^j\sum_{l=0}^{m-2j}\left(C_{m-2j}^l\cdot t^h\cdot a^{2l}\cdot p^l\right)\right]\right\}\right\rangle, \quad (30)$$

где $h=n-2k-i+m-2j-l$.

Таким образом, (30) представляет собой общий вид произведения полиномов, являющихся частями функций Чебышева – Эрмита и Гаусса соответственно (причем произвольных порядков m и n). Аналогично рассмотренному ранее случаю (m=1), выражение (30) имеет вид (12), а значит, может быть использован интеграл (18). Следовательно, справедлива и замена $t^n\to I_n$ для перехода от полинома (30) к сумме интегралов вида (18). А значит, (26) можно записать в виде

$$W_{m,\varphi_n}(a,b)=\frac{-e^{-\frac{(x_0-b)^2}{2d^2}}\,m!n!}{\alpha_n\sqrt{a}}\cdot H_{m,\varphi_n}(I). \quad (31)$$

Выражение (31) задает базис перехода от коэффициента разложения сигнала по n-й функции Чебышева – Эрмита к вейвлет-коэффициентам, полученным при использовании в качестве анализирующего вейвлета производной функции Гаусса m-го порядка. Вейвлет-коэффициенты m-го порядка представляет собой сумму полученных по (31) выражений при различных n (n = 0, 1, …, N, где N – номер максимальной используемой базисной функции Чебышева – Эрмита).

3. Формирование базиса перехода от коэффициентов разложения сигнала по функциям Чебышева – Эрмита к вейвлет-преобразованию с использованием МНАТ в качестве анализирующего вейвлета (частный случай базиса перехода к вейвлет-преобразованию с использованием производной Гаусса *m*-го порядка)

Очевидно, что при m=2 вейвлет (3) будет совпадать с МНАТ-вейвлетом. Следовательно, базис (31) будет служить для перехода от коэффициентов разложения Чебышева – Эрмита к вейвлет-преобразованию с использованием МНАТ-вейвлета. При подстановке m=2 в (31) получим:

$$W_{2,\varphi_n}(a,b) = \frac{-2e^{-\frac{(x_0-b)^2}{2d^2}} n!}{\alpha_n \sqrt{a}} H_{2,\varphi_n}(I), \tag{32}$$

$$H_{2,\varphi_n}(t) = \sum_{k=0}^{n/2} \left\{ \lambda_k^n \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{n-2k} \sum_{i=0}^{n-2k} \left[(-1)^i C_{n-2k}^i \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left(t^{n-2k-m+1} \cdot \gamma^{2m} p^m + t^{n-2k-i+1} \cdot 2 \cdot \gamma^{2i} p^{i+1} a^2 + t^{n-2k-i} \cdot \gamma^{2i} p^{i+2} a^4 \right) \right] \right\}.$$

Выражение (32) задает базис перехода от коэффициентов разложения по функциям Чебышева – Эрмита к вейвлет-преобразованию с использованием МНАТ-вейвлета.

4. Вычисление вейвлет-преобразования в сформированных базисах

Чтобы оценить работоспособность полученных базисов, вначале зададим тестовый сигнал. В качестве него используем массив из 33 значений s (рис. 1), поскольку на практике сигналы, снятые с выхода какого-либо устройства, представлены в виде набора дискретных отсчетов.

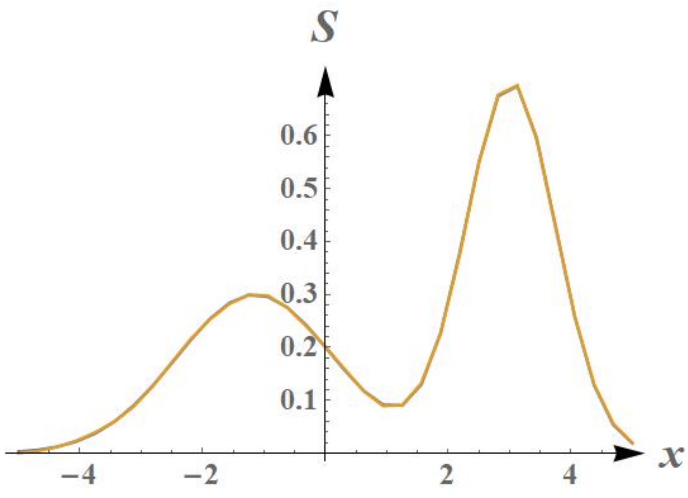

Рис. 1. Тестовый сигнал

Подвергнем этот сигнал непрерывному вейвлет-преобразованию с производной 1-го, 2-го, 4-го и 6-го порядка функции Гаусса в качестве анализирующего вейвлета, используя как общепринятое выражение для вычисления вейвлет-преобразования с данным вейвлетом, так и сформированные базисы.

Алгоритм вычисления вейвлет-преобразования в каждом из сформированных выше базисов состоит из следующих этапов [5]:

1) представление исходного сигнала в виде разложения в базисе функций Чебышева – Эрмита и нахождение коэффициентов разложения [1–3];

2) нахождение базисных функций для восстановления непрерывного вейвлет-преобразования различных порядков;

3) восстановление непрерывного вейвлет-преобразования сигнала на основе рассчитанных на первом этапе коэффициентов и синтезированного на втором этапе базиса.

Очевидно, что при большей точности кодирования/декодирования точность восстановления вейвлет-преобразования также должна быть больше, и наоборот. Кодирование тестового сигнала по 12 базисным функциям Чебышева – Эрмита дает коэффициенты, при декодировании которых формируется сигнал, визуально неотличимый от исходного. Приведенная погрешность декодированного сигнала относительно исходного, заданная выражением

$$\gamma_S = \frac{S - \hat{S}}{|S|_{\max}} \cdot 100\%,$$

где $|\cdot|_{\max}$ – максимальное значение массива по модулю, отражена на рис. 2.

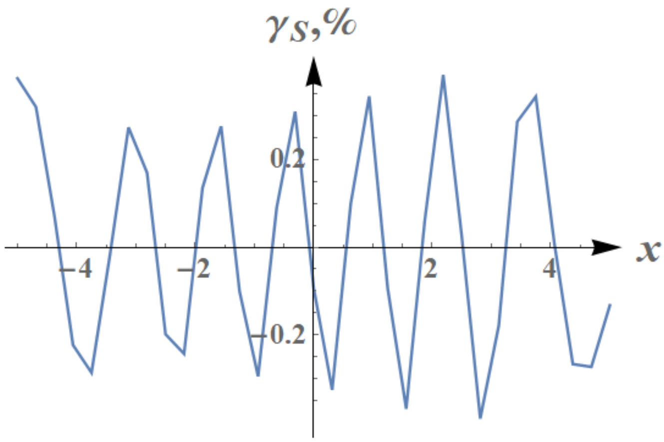

Рис. 2. Приведенная погрешность декодированного сигнала относительно исходного

Рассмотрим теперь непосредственно результаты вейвлет-преобразования тестового сигнала (вейвлет-коэффициенты), полученные с использованием сформированных базисов ($\hat{W}_m(a,b)$) и рассчитанные по общепринятым выражениям ($W_m(a,b)$) на рис. 3. Результаты максимально схожи и визуально неразличимы.

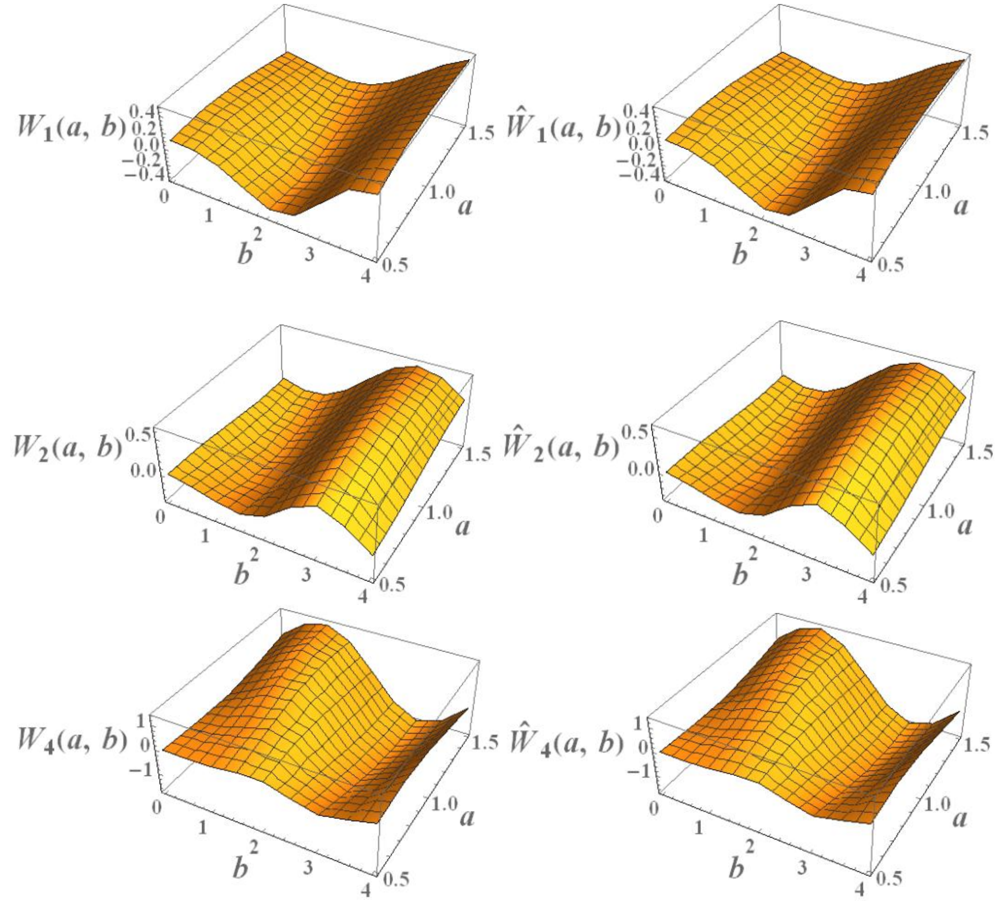

Рис. 3. Сравнение вейвлет-коэффициентов

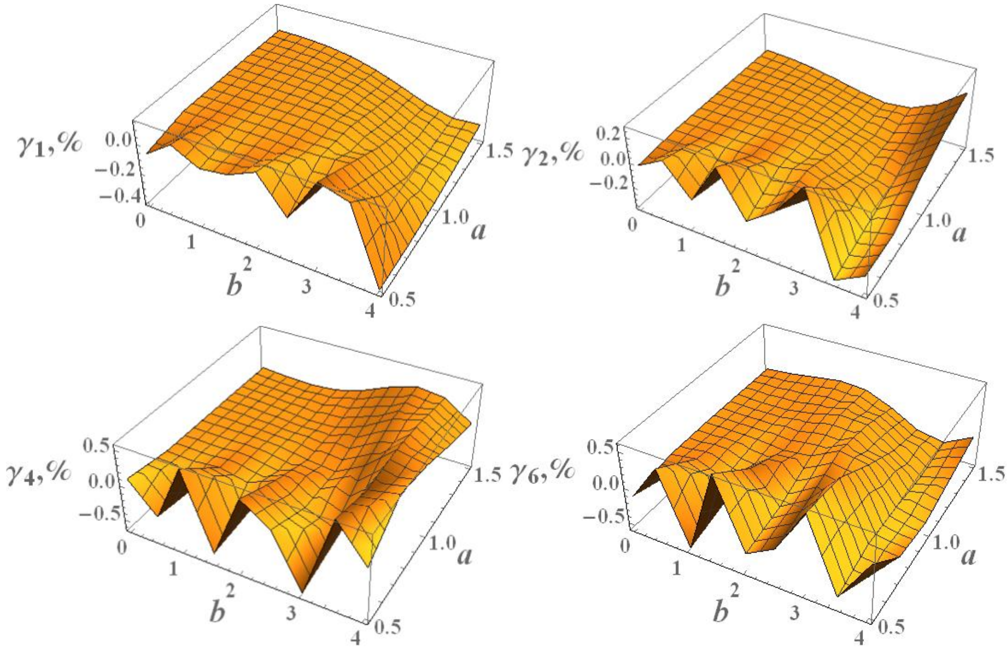

Рис. 4. Приведенная погрешность вейвлет-коэффициентов

Для возможности сравнения рассчитаем приведенную погрешность вейвлет-преобразования по сформированным базисам относительно вейвлет-преобразования по общепринятым выражениям:

$$\gamma_m = \frac{W_m(a,b) - \hat{W}_m(a,b)}{\left|W_m(a,b)\right|_{\max}} \cdot 100\%.$$

Приведенная погрешность для каждого из порядков вейвлета представлена на рис. 4.

Заключение

Анализируя полученные графики на рис. 4, можно видеть, что приведенная погрешность вейвлет-коэффициентов сопоставима с приведенной погрешностью декодирования самого сигнала и не превышает ~0,5 %. Благодаря использованию полученных формул расчета вейвлет-коэффициентов в базисе функций Чебышева – Эрмита удается построить быстрые вычислительные алгоритмы обработки, что в сочетании с высокой их эффективностью является значительным достоинством метода, особенно при вычислении коэффициентов различных высоких порядков.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Сайфуллин Р.Т., Бочкарев А.В.* Выбор необходимого числа базисных функций в алгоритмах кодирования-декодирования сигналов аналитических приборов // Информационно-измерительные и управляющие системы: межвуз. сб. науч. статей. – 2019. – Вып. 1(17). – С. 35–42.
2. *Сайфуллин Р.Т., Бочкарев А.В.* Иерархическое кодирование при обработке сигналов аналитических приборов // Проблемы управления и моделирования в сложных системах: Тр. XXI Междунар. конф. Самарский научный центр РАН, ИПУ СС РАН. Т. 1. – Самара, 2019. – С. 467–470.
3. *Сайфуллин Р.Т., Бочкарев А.В.* Использование функций Чебышева – Эрмита в обработке сигналов аналитических приборов // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер.: Технические науки. – 2019. – № 1(61). – С. 68–81.
4. *Сайфуллин Р.Т., Бочкарев А.В.* Вычисление производных аналитического сигнала в базисе функций Чебышева – Эрмита // Математическое моделирование и краевые задачи: Матер. XI Всеросс. науч. конф. с междунар. участием. 27–30 мая 2019 г., Самара. – 2019. – Т. 2. – С. 137–139.
5. *Сайфуллин Р.Т., Бочкарев А.В.* Вычисление непрерывного вейвлет-преобразования сигналов в базисе функций Чебышева – Эрмита // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер.: Технические науки. – 2019. – № 2(62). – С. 113–124.
6. *Martens J.B.* The Hermite transform – theory. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1990. Vol. 38. No. 9. Pp. 1595–1606.
7. *Martens J.B.* The Hermite transform – applications. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1990. Vol. 38. No. 9. Pp. 1607–1618.
8. *Павельева Е.А., Крылов А.С.* Поиск и анализ ключевых точек радужной оболочки глаза методом преобразования Эрмита // Информатика и ее применения. – 2010. – № 1, т. 4. – С. 79–82.
9. *Estudillo-Romero A., Escalante-Ramirez B.* The Hermite transform: An alternative image representation model for iris recognition. LNCS, 2008. No. 5197. Pp. 86–93.
10. *Мамаев Н.В. [и др.].* Алгоритм нелокального среднего на основе разложения по функциям Эрмита в задачах компьютерной томографии // ГРАФИКОН'2013: Тр. конф. 2013. – С. 254–258.
11. *Горлов В.А., Паршин Д.С.,* Разложение функции с экспоненциальным ростом в ряд Фурье по ортогональным полиномам Чебышева – Эрмита // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2015. – Т. 3. № 8–3 (19–3). – С. 245–248.
12. *Бayковский Ю.М. [и др.].* Нейросетевой анализ и сопоставление частотно-временных векторов на основе краткосрочного спектрального представления и адаптивного преобразования Эрмита / Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2001, 087.

13. *Балакин Д.А., Штыков В.В.* Построение ортогонального банка фильтров на основе преобразований Эрмита для обработки сигналов // Журнал радиоэлектроники. – 2014. – № 9. – С. 1–15.
14. *Беленький Б.Г., Виленчик Л.З.* Хроматография полимеров. – М.: Химия, 1978. – 334 с.
15. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.
16. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. – М.: Физматлит, 2005. – 480 с.
17. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
18. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.

Статья поступила в редакцию 1 сентября 2019 года

ALGORITHM FOR CALCULATING THE WAVELET-TRANSFORM OF THE SIGNALS USING THE CHEBYSHEV-HERMIT FUNCTIONS

R.T. Sayfullin, A.V. Bochkarev

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

Abstract. The paper deals with the development of basis for computation wavelet-transform from the coefficients given by decomposition original signal with Chebyshev-Hermite functions. Decomposition with Chebyshev-Hermite functions allow to transform original signal into coefficients, that can be used for reconstructing different transforms of original signal like Fourier transform, derivatives of different orders, wavelet transform and others. These transforms can be obtained by using corresponding bases that need to be created. In this paper considered basis for wavelet-transform with derivative of arbitrary order of the Gauss functions as analyzing wavelet. This basis is computed by applying continuous wavelet transform with derivative of Gauss functions as analyzing wavelet into the Chebyshev-Hermite functions. Arrays of the wavelet coefficients are presented as 3D plots. The Mathematica 11.3 computer algebra system was used to calculations and graph the results.

Keywords: Chebyshev – Hermite functions, wavelet-transform, Gauss wavelets, Gauss function, wavelet-transform basis, signal transform, signal decomposition, MHAT wavelet.

REFERENCES

1. *Saifullin R.T., Bochkarev A.V.* Selection of the required number of basis functions in the coding-decoding algorithms of signals of analytical instruments. Information and measuring and control systems: mezhvuz. Sat scientific articles. Issue 1 (17). – 2019. Pp. 35–42.
2. *Sayfullin R.T., Bochkarev A.V.* Hierarchical coding for signal processing of analytical instruments. Problems of control and modeling in complex systems. Proceedings of the XXI International Conference. Samara Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, IPU SS RAS. Vol. 1. 2019. Pp. 467–470.
3. *Saifullin R.T., Bochkarev A.V.* The use of Chebyshev-Hermite functions in signal processing of analytical instruments. Bulletin of the Samara State Technical University. Series: technical sciences, No. 1 (61). 2019. Pp. 68–81.
4. *Sayfullin R.T., Bochkarev A.V.* Calculation of derivatives of the analytical signal in the basis of Chebyshev – Hermite functions. Materials of the XI All-Russian scientific conference with international participation "Mathematical modeling and boundary value problems" (May 27–30, 2019, Samara, Russia). Vol. 2. 2019. Pp. 137–139.

Rauhat T. Sayfullin (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.
Andrey V. Bochkarev, Postgraduate Student.

5. *Sayfullin R.T., Bochkarev A.V.* Calculation of the continuous wavelet transform of signals in the basis of Chebyshev – Hermit functions. Bulletin of the Samara State Technical University. Series: Engineering, No. 2 (62). 2019. Pp. 113–124.
6. *Martens J.B.* The Hermite transform – theory. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1990. Vol. 38. No. 9. Pp. 1595–1606.
7. *Martens J.B.* The Hermite transform – applications. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1990. Vol. 38. No. 9. Pp. 1607–1618.
8. *Paveleva E.A., Krylov A.S.* Search and analysis of key points of the iris by the Hermite transformation method. Informatics and its applications. 2010. № 1 v. 4. Pp. 79–82.
9. *Estudillo-Romero A., Escalante-Ramirez B.* The Hermite transform: An alternative image representation model for iris recognition. LNCS, 2008. No. 5197. Pp. 86–93.
10. *Mamaev N.V.* The non-local average algorithm based on the expansion of Ermit functions in computed tomography problems. Mamaev N.V., Lukin A.S., Yurin D.V., Glazkova M.A., Sinitsin V.E. GRAPHICON'2013. Conference proceedings, 2013. Pp. 254–258.
11. *Gorlov V.A, Parshin D.S.,* Expansion of a function with exponential growth in a Fourier series in orthogonal Chebyshev-Hermite polynomials. Actual directions of scientific research of the XXI century: theory and practice. 2015. Vol. 3. No. 8–3 (19–3). Pp. 245–248.
12. Neural network analysis and comparison of time-frequency vectors based on the short-term spectral representation and adaptive Hermite transform. Yu.M. Bayakovsky, A.O. Zhirkov, D.N. Korchagin, A.S. Krylov, A.S. Lukin. Preprints IPM them. M.V. Keldysh, 2001, 087.
13. *Balakin D.A, Shtykov V.V.* Construction of an orthogonal filter bank based on Hermite transformations for signal processing. Journal of Radio Electronics, 2014, № 9. Pp. 1–15.
14. *Belenky B.G., Vilenchik L.Z.* Chromatography of polymers. M.: Chemistry, 1978. 334 p.
15. *Szego G.* Orthogonal polynomials. M.: Fizmatgiz, 1962. 500 p.
16. *Suetin P.K.* Classical orthogonal polynomials. M.: Fizmatlit, 2005. 480 s.
17. *Abramowitz M., Stigan I.* Reference for special functions. M.: Nauka, 1979. 832 p.
18. *Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M.* Tables of integrals, sums, series and products. M.: Fizmatgiz, 1963. 1100 p.