

УДК 517.958

**ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕМПЕРАТУРЫ  
МЕТАЛЛА БАРАБАНА ПАРОВОГО КОТЛА*****И.А. Данилушкин, С.А. Колпащиков, И.С. Левин\****Самарский государственный технический университет  
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

E-mail: idanilushkin@mail.ru, skolpaschikov@mail.ru, Levin.is@samgtu.ru

**Аннотация.** Решена задача разработки и идентификации модели температурного распределения стенки барабана парового котла. Численная модель базируется на аналитическом решении одномерного уравнения теплопроводности с теплообменом на границах при постоянных коэффициентах теплопередачи. Модель реализована в пакете моделирования динамических систем. С помощью ограниченного ряда собственных функций аналитического решения получено представление объекта в пространстве состояний. Предложен универсальный алгоритм расчёта собственных чисел аналитического решения. Исследованы зависимости собственных чисел аналитического решения от значений коэффициентов теплопередачи и теплопроводности. По результатам исследования получены таблицы данных для аппроксимации зависимостей собственных чисел от коэффициентов теплопередачи в ограниченном диапазоне изменений. Опробована методика реализации динамической модели температурного распределения, учитывающей изменения коэффициентов теплопередачи в процессе моделирования. Момент изменения коэффициентов воспринимается как начало нового переходного процесса из текущего состояния модели. Представлены структурные схемы реализации модели в пакетах моделирования динамических систем. Предложенные структуры позволяют реализовать внесение параметрических возмущений в момент их возникновения при моделировании. По экспериментальным данным растопки парового котла проведена идентификация зависимости коэффициента теплопередачи от температуры металла стенки барабана котла. Полученные результаты показали, что на коэффициенты теплопередачи влияет не только температура металла, но и дополнительные параметры эксплуатации парового котла. В результате экспериментов обнаружено, что точность модели может быть повышена, если учесть зависимость коэффициента теплопередачи на внутренней поверхности барабана от расхода питательной воды в барабан котла. Приведены результаты численного эксперимента.

---

\* Иван Александрович Данилушкин, кандидат технических наук, доцент кафедры автоматизации и управления в технических системах.

Сергей Александрович Колпащиков, кандидат технических наук, заведующий кафедрой автоматизации и управления в технических системах.

Илья Сергеевич Левин, кандидат технических наук, доцент кафедры автоматизации и управления в технических системах.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-29-00521, <https://rscf.ru/project/23-29-00521/>, ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет».

***Ключевые слова:** уравнение теплопроводности, переменные коэффициенты, коэффициент теплопередачи, температурное распределение, объект с распределенными параметрами, численно-аналитическое решение, пространство состояний.*

## **Введение**

Барабаны паровых котлов высокого давления с рабочим давлением более 10 МПа представляют собой горизонтально расположенный цилиндр диаметром до 1800 мм, изготовленный из листовой легированной стали толщиной 90 мм и более. Регламент растопки котлов ограничивает перепад температур верхней образующей и нижней образующей барабана, перепад температур насыщения пара и стенки барабана, а также максимальную скорость роста температуры стенки [1]. Перепад и скорость роста температур в контрольных точках стенок барабана входят в список параметров, определяющих действия машиниста котла при растопке. Поэтому при разработке компьютерного тренажера машиниста парового котла возникла задача получения модели, с достаточной точностью описывающей поведение температурного распределения стенки барабана.

В процессе функционирования парового котла в нижней части барабана располагается пароводяная смесь, в верхней – насыщенный пар. Нагрев стенки барабана осуществляется с внутренней стороны от конвективного теплообмена с паром/пароводяной смесью. С наружной стороны барабан теплоизолирован. В процессе растопки котла характеристики теплоносителя существенно изменяются: температура повышается от 30 до 340 °С, давление возрастает от 0,1 до 14,5 МПа. Это приводит к изменению параметров теплообмена с внутренней стороны стенки барабана и должно быть учтено при моделировании процесса.

Большое отношение диаметра барабана к толщине стенки позволяет ограничиться моделью температурного распределения в бесконечной пластине с граничными условиями третьего рода [2]. Решение краевой задачи в такой постановке может быть выполнено как аналитическими, так и численными методами [3]. Классические методы математической физики не позволяют получить решение для случая, когда коэффициенты теплообмена изменяются с течением времени [4]. В работе [4] предложен подход, который позволяет найти аналитическое решение для небольшого числа частных зависимостей коэффициента теплообмена от времени. В большинстве практических случаев применяются численные методы решения, разнообразие которых позволяет решить задачу с необходимой точностью.

Известные программные пакеты компьютерного моделирования, такие как COMSOL Multiphysics<sup>®</sup>, ANSYS, Altair Flux<sup>™</sup>, реализуют решение задач математической физики методом конечных элементов. Все они обладают высокой вычислительной ресурсоемкостью; кроме того, зачастую требуются дополнительные решения по интеграции полученной модели с программными продуктами сторонних производителей [5].

Если численные модели разрабатываются для решения задач идентификации процессов технологической теплофизики, синтеза систем автоматического управления, систем имитационного моделирования, то необходимо снизить вычислительную ресурсоемкость алгоритмов моделирования, а также иметь возможность простой реализации моделей в пакетах моделирования динамических систем, таких как MATLAB<sup>®</sup> SIMULINK<sup>®</sup>, SimInTech, VisSim. В этом случае авторы чаще всего прибегают к методу конечных разностей. Например, в работах [6, 7], посвященных моделированию температурного распределения стенки барабана

котла, авторы используют сетку по пространственной координате, на базе которой переходят к системе линейных дифференциальных уравнений для температур в узловых точках. Такой же подход применен в [8], при решении подобной задачи с переменным коэффициентом теплопередачи.

В современной литературе встречаются и другие подходы к реализации численных моделей процессов теплообмена. В работах [9–12] исследуется эффективность применения искусственных нейронных сетей для решения уравнений математической физики. В статье [13] автор использует метод неопределенных функций для решения задачи уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами. В работах [14, 15] используются методы спектральной теории, позволяющие получить представление распределенного объекта в форме пространства состояний за счет разложения дифференциального уравнения в частных производных в ряд по ортонормированному базису функций.

В настоящей работе решается задача построения и идентификации модели температурного распределения стенки барабана котла. Предлагаемый подход ориентирован на реализацию решения в пакетах моделирования динамических систем.

### Постановка задачи

Температурное распределение по толщине бесконечной пластины с конвективным теплообменом на поверхностях описывается одномерным параболическим уравнением с граничными условиями третьего рода [2]:

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = a(t) \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0; \quad (1)$$

$$Q(x,0) = Q_0(x); \quad (2)$$

$$\begin{cases} \lambda(t) \frac{\partial Q(0,t)}{\partial x} = \alpha_1(t)(Q_1(t) - Q(0,t)), \\ -\lambda(t) \frac{\partial Q(L,t)}{\partial x} = \alpha_2(t)(Q_2(t) - Q(L,t)), \end{cases} \quad (3)$$

где  $Q(x,t)$  – температурное поле пластины;  $Q_1(t)$ ,  $Q_2(t)$  – температуры сред на границах пластины при  $x=0$  и  $x=L$ ;  $a(t) = \lambda(t)/(c(t)\gamma(t))$  – коэффициент температуропроводности;  $\lambda(t)$  – коэффициент теплопроводности;  $c(t)$  – удельная теплоемкость;  $\gamma(t)$  – плотность материала пластины;  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$  – коэффициенты теплопередачи на границах пластины;  $L$  – толщина.

При постоянных значениях всех коэффициентов задачи  $\alpha_1(t) = \alpha_{1C}$ ,  $\alpha_2(t) = \alpha_{2C}$ ,  $\lambda(t) = \lambda_C$ ,  $c(t) = c_C$ ,  $\gamma(t) = \gamma_C$  решение краевой задачи (1)–(3) может быть найдено в терминах структурной теории распределенных систем [16, 17] с помощью передаточной функции объекта с распределенными параметрами [18]. Стандартизирующая функция для (1)–(3) имеет вид [18]

$$\omega(x,t) = Q_0(x)\delta(t) + a_C g_2(t)\delta(x-L) - a_C g_1(t)\delta(x), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} g_1(t) &= b_1(Q_1(t) - Q(0,t)), \\ g_2(t) &= b_2(Q_2(t) - Q(L,t)), \\ b_1 &= \alpha_{1C}/\lambda_C, \end{aligned}$$

$$b_2 = \alpha_{2C} / \lambda_C .$$

Передаточная функция определяется выражением

$$W(x, \xi, p) = \sum_k \frac{\phi^*(\mu_k, x)\phi^*(\mu_k, \xi)}{\|\phi^*(\mu_k, x)\|^2 (p + a\mu_k^2)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

где  $p$  – оператор преобразования Лапласа,

$$\phi^*(\mu_k, x) = \cos \mu_k x + b_1 \frac{\sin \mu_k x}{\mu_k},$$

$$\|\phi^*(\mu_k)\|^2 = \frac{b_2 \mu_k^2 + b_1^2}{2\mu_k^2 \mu_k^2 + b_2^2} + \frac{b_1}{2\mu_k^2} + \frac{L}{2} \left( 1 + \frac{b_1^2}{\mu_k^2} \right),$$

$\mu_k$  – положительные корни трансцендентного уравнения

$$\frac{tg \mu L}{\mu} = \frac{b_1 + b_2}{\mu^2 - b_1 b_2}. \quad (6)$$

Тепловое поле пластины в изображении по Лапласу по временной координате определяется следующим образом:

$$Q(x, p) = \int_0^L W(x, \xi, p) \omega(\xi, p) d\xi =$$

$$= a_C [b_2 Q_2(p) W(x, L, p) - b_1 Q_1(p) W(x, 0, p)] + \int_0^L W(x, \xi, p) Q_0(\xi) d\xi. \quad (7)$$

Выражение (7) позволяет осуществить расчет температуры в произвольной точке  $x$  пластины в зависимости от поведения температур сред на границах. В случае переменных коэффициентов аналитического решения задачи (1)–(3) не существует. Далее предлагается подход к использованию аналитического решения (7) для реализации численного расчета температуры пластины при изменяющихся во времени коэффициентах теплопередачи.

### Решение задачи при переменных коэффициентах

Выражение (5) может быть представлено в виде

$$W(x, \xi, p) = \sum_k \frac{K_k(x, \xi)}{p + a_C \mu_k^2}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

где

$$K_k(x, \xi) = \frac{\phi^*(\mu_k, x)\phi^*(\mu_k, \xi)}{\|\phi^*(\mu_k, x)\|^2}.$$

С учетом (8) решение (7) при  $Q_0(x) = 0$  может быть представлено в виде бесконечной суммы параллельных аperiодических звеньев первого порядка:

$$Q(x, p) = \sum_k Q_k(x, p) = \sum_k [b_2 K_k(x, L) Q_2(p) - b_1 K_k(x, 0) Q_1(p)] \frac{1}{p + a_C \mu_k^2}. \quad (9)$$

Каждое слагаемое  $Q_k(x, p)$  может быть представлено в виде структурной схемы (рис. 1).

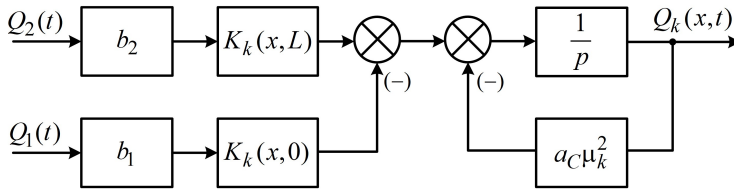


Рис. 1. Структурная схема  $k$ -го слагаемого решения с постоянными коэффициентами

Изменение параметров задачи (1)–(3) в произвольный момент времени  $t$  может рассматриваться как начало нового динамического процесса, с новыми параметрами и начальным температурным распределением, существовавшим в момент изменения [19]. Структура, представленная на рис. 1, иллюстрирует, что температура в точке  $x$  в произвольный момент времени будет определяться суммой температур на выходах интеграторов. Таким образом, при реализации расчета в пакетах моделирования динамических систем текущее состояние будет использоваться как начальное при новых значениях коэффициентов. Необходимо только реализовать вычисление коэффициентов модели в зависимости от изменившихся параметров краевой задачи.

Изменение коэффициентов теплопередачи влияет на значения корней трансцендентного уравнения (6). После ввода обозначений

$$f_{1K}(\mu, x) = \frac{\phi^*(\mu, x)\phi^*(\mu, 0)}{\|\phi^*(\mu)\|^2},$$

$$f_{2K}(\mu, x) = \frac{\phi^*(\mu, x)\phi^*(\mu, L)}{\|\phi^*(\mu)\|^2}$$

структурная схема для слагаемого  $Q_k(x, t)$  преобразована следующим образом (рис. 2). Сигналы  $b_1(t)$ ,  $b_2(t)$  определяются так:

$$b_1(t) = \alpha_1(t)/\lambda(t),$$

$$b_2(t) = \alpha_2(t)/\lambda(t).$$

Семейство функций  $\mu_k(b_1, b_2)$ ,  $k=1, 2, \dots$  реализует вычисление корней трансцендентного уравнения (6).

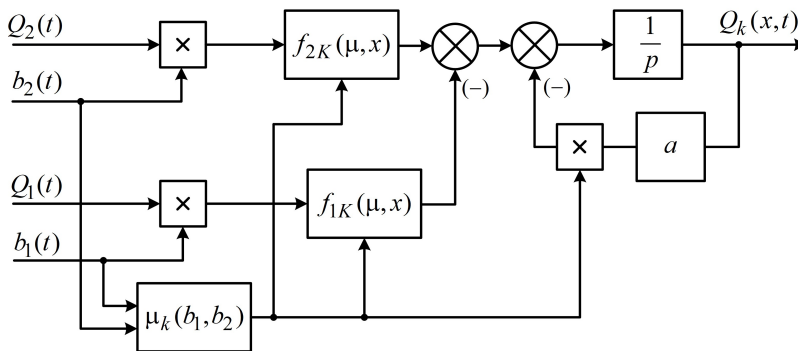


Рис. 2. Структурная схема  $k$ -го слагаемого решения с переменными коэффициентами

Для реализации в компьютерных пакетах моделирования динамических систем более удобным может быть представление модели в пространстве состояний вектора  $\theta = [\theta_i]_{N \times 1}$ :

$$\begin{cases} \frac{d\theta(t)}{dt} = \mathbf{A}(b_1(t), b_2(t), t)\theta(t) + \mathbf{B}(b_1(t), b_2(t), x)\mathbf{u}(t); \\ Q(x, t) = \mathbf{C}\theta(t). \end{cases} \quad (10)$$

Здесь

$$\mathbf{A}(b_1, b_2, t) = -\text{diag}\left(\left[ a(t)\mu_1^2(b_1, b_2) \quad a(t)\mu_2^2(b_1, b_2) \quad \dots \quad a(t)\mu_N^2(b_1, b_2) \right]\right),$$

$$\mathbf{B}(b_1, b_2, x) = \begin{bmatrix} \frac{f_{1K}(\mu_1(b_1, b_2), x)}{f_T(\mu_1(b_1, b_2))} & -\frac{f_{2K}(\mu_1(b_1, b_2), x)}{f_T(\mu_1(b_1, b_2))} \\ \frac{f_{1K}(\mu_2(b_1, b_2), x)}{f_T(\mu_2(b_1, b_2))} & -\frac{f_{2K}(\mu_2(b_1, b_2), x)}{f_T(\mu_2(b_1, b_2))} \\ \dots & \dots \\ \frac{f_{1K}(\mu_N(b_1, b_2), x)}{f_T(\mu_N(b_1, b_2))} & -\frac{f_{2K}(\mu_N(b_1, b_2), x)}{f_T(\mu_N(b_1, b_2))} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]_{1 \times N},$$

$$\mathbf{u}(t) = [Q_1(t) \quad Q_2(t)]^T,$$

$N$  – количество слагаемых бесконечного ряда (9), учитываемых в численной реализации модели.

### Реализация модели в MATLAB® SIMULINK®

Описанный подход применен при реализации модели температуры стенки барабана парового котла ТГМ-84 (Е420/140ГМ ТКЗ). Ранее [20] была проведена идентификация коэффициентов теплообмена, принятых постоянными в течение всего времени нагрева. При этом получены удовлетворительные результаты поведения модели на этапе растопки, однако при выходе на рабочий режим наблюдается существенное отклонение модельной температуры от реальной.

Поиск корней трансцендентного уравнения (6) реализован в пакете MATLAB® с помощью функции `fminbnd`, которая осуществляет поиск минимума функции одной переменной на заданном интервале. Исходя из результатов идентификации [20] предположено, что коэффициент  $\alpha_1 \in [0.01; 100]$  Вт/(м<sup>2</sup>К),  $\alpha_2 \in [10; 200]$  Вт/(м<sup>2</sup>К),  $\lambda = 48$  Вт/(м·К),  $L = 0.09$  м. На каждом отрезке взято по 20 опорных точек, для  $\alpha_1$  – равноотстоящих логарифмически, для  $\alpha_2$  – линейно.

Уравнение (6) имеет особое решение в случае, когда  $\mu^2 = b_1 b_2$ , что должно быть учтено в алгоритме формирования интервала отыскания корня. Условия для определения интервалов могут быть сформулированы следующим образом:

1) если  $b_1 b_2 \leq \pi/(2L)$ , то первый корень  $\mu_1$  располагается на отрезке  $[b_1 b_2; \pi/(2L)]$ , последующие корни располагаются на интервалах  $(\pi(2i-1)/(2L); \pi(2i+1)/(2L))$ ,  $i = 2, 3, \dots$ ;

2) если  $b_1 b_2 > \pi/(2L)$ , то на интервале  $(0; \pi/(2L)]$  корня нет, расположение корней подчиняется следующему закону: на интервалах, для которых выполняется условие

$$C_1 = b_1 b_2 \notin (\pi(2i-1)/(2L); \pi(2i+1)/(2L)], \quad i = 2, 3, \dots,$$

располагается один корень; на интервале  $j$ , для которого условие  $C_1$  не выполняется, располагаются два корня, первый из которых лежит в интервале  $(\pi(2j-1)/(2L); b_1 b_2)$ , а второй – на отрезке  $[b_1 b_2; \pi(2j+1)/(2L)]$ .

На рис. 3 представлены поверхности, отражающие зависимость  $\mu_k(b_1, b_2)$  для первых трех корней уравнения.

По результатам анализа вида зависимостей  $\mu_k(b_1, b_2)$  было принято решение при реализации модели для первого корня применить линейную интерполяцию по рассчитанным данным, для остальных – использовать билинейную аппроксимацию.

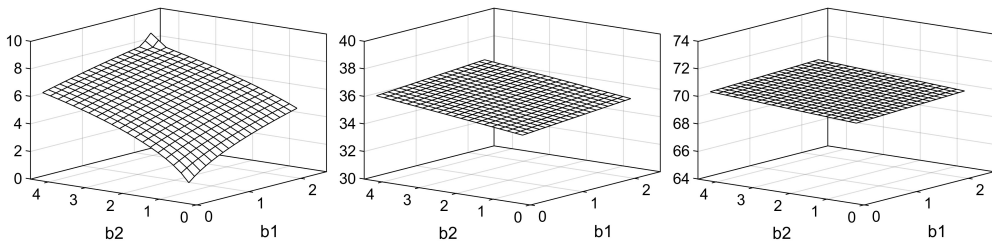


Рис. 3. Зависимости первых трех корней уравнения (6) от  $b_1, b_2$

Модель (10) была реализована в пакете MATLAB<sup>®</sup> SIMULINK<sup>®</sup> с помощью S-функции (S-Function) – специального механизма пакета, позволяющего описать произвольный алгоритм расчета модели объекта, представленного в пространстве состояний. В алгоритме S-функции реализован расчет зависимостей  $\alpha_1(T_{wall}^M)$ ,  $\alpha_2(T_{wall}^M)$ ,  $\lambda(T_{wall}^M)$ ,  $c(T_{wall}^M)$ , где  $T_{wall}^M$  – рассчитанная (модельная) температура стенки в точке контроля  $x=0$ ,  $T_{wall}^M = Q(0, t)$ . Зависимости теплоемкости и теплопроводности аппроксимировались кусочно-линейной зависимостью по табличным данным для низколегированной стали 22К [21]. Зависимости коэффициентов теплопередачи определены в процессе идентификации модели. Координаты точки  $x=0$  соответствуют внешней теплоизолированной границе стенки барабана котла,  $x=L$  – внутренней границе стенки, контактирующей с пароводяной смесью.

### Идентификация модели

Идентификация модели проводилась по реальным данным, полученным в процессе растопки котла ТГМ-84. В качестве исходных данных использовались: температура воды в барабане котла  $T_B(t)$ , температура стенки барабана котла  $T_{wall}(t)$ . На первом этапе коэффициенты теплопередачи были определены в виде линейной зависимости от температуры стенки:

$$\alpha_1(T_{wall}^M) = \alpha_{11}T_{wall}^M + \alpha_{10},$$

$$\alpha_2(T_{wall}^M) = \alpha_{21}T_{wall}^M + \alpha_{20}.$$

Подбор коэффициентов осуществлялся путем минимизации функционала

$$J(\Delta) = \int_0^{t_1} |T_{wall}^M(\Delta, t) - T_{wall}(t)| dt \rightarrow \min_{\Delta},$$

где  $\Delta = [\alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{20}, \alpha_{21}]$  – вектор варьируемых параметров. Область определения для каждого параметра определялась таким образом, чтобы значения  $\alpha_1(T_{wall}^M)/\lambda(T_{wall}^M)$ ,  $\alpha_2(T_{wall}^M)/\lambda(T_{wall}^M)$  не выходили за пределы областей определения для  $b_1$  и  $b_2$ , диапазон изменения температуры стенки взят из экспериментальных данных,  $T_{wall}^M \in [20, 320]$  °С.

В результате решения задачи получены следующие результаты:

1) коэффициент теплопередачи на внешней стороне стенки может быть принят постоянным  $\alpha_1(T_{wall}^M) = 10.5$  Вт/(м<sup>2</sup>К);

2) линейная зависимость для коэффициента теплопередачи на внутренней стороне стенки не обеспечивает требуемого качества поведения модели: на первом временном интервале процесса растопки, до достижения температуры металла 150 °С, модельная температура превышает фактическую, на втором интервале – отстает;

3) при выходе на установившийся режим модельная температура становится существенно выше фактической.

На втором этапе идентификации было принято решение аппроксимировать  $\alpha_2(T_{wall}^M)$  кусочно-линейной зависимостью, заданной опорными точками. Для повышения скорости расчета идентификация проводилась в два этапа: на первом и на втором временных интервалах. В результате идентификации были найдены оптимальные по критерию минимума интеграла модуля ошибки значения коэффициентов теплопередачи в узловых точках (рис. 4). Сшивка интервалов производилась по значению вектора состояний в конце первого интервала.

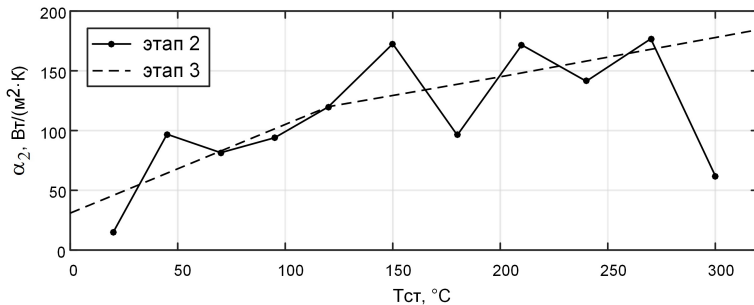


Рис. 4. Зависимость коэффициента теплопередачи от температуры стенки барабана

Полученная зависимость коэффициента теплопередачи от температуры обеспечивает высокую точность модели, но совершенно нефизична: модель пе-



реобучена. Этому есть несколько объяснений: 1) нелинейное поведение датчиков температуры воды в барабане котла, а также температуры стенки барабана; 2) влияние на коэффициент теплопередачи дополнительных факторов. Действительно, в процессе растопки машинист имеет возможность воздействовать на температуру стенки барабана с помощью продувки котла, подачи пара в линию обогрева. Кроме того, очевидно, что коэффициент теплопередачи существенно уменьшается при выходе котла на рабочий режим. Было сделано предположение, что коэффициент  $\alpha_2$  зависит не только от температуры пароводяной смеси в барабане, но и от  $F_{SW}$  – расхода питательной воды в барабан котла. Поэтому на третьем этапе идентификации было принято решение уменьшить число опорных точек (см. рис. 4) для зависимости коэффициента теплопередачи от температуры  $\alpha_2(T_{wall}^M)$  и добавить влияние расхода питательной воды в виде:

$$\alpha_2(T_{wall}^M, F_{SW}) = \alpha_2(T_{wall}^M) - K_F \max(0, F_{SW} - F_0).$$

Это позволило учесть пропорциональное уменьшение коэффициента теплообмена при увеличении расхода питательной воды выше  $F_0 = 100$  т/час,  $K_F = 0.58$ . Результаты моделирования приведены на рис. 5–7. Точность модели по интегральному критерию модуля ошибки возросла в 2,8 раза по сравнению с моделью с постоянным коэффициентом [20].

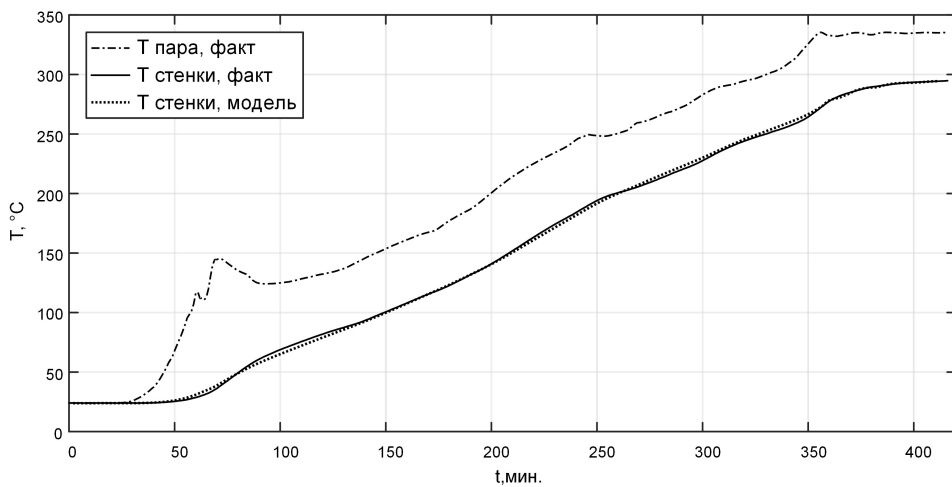


Рис. 5. Результаты моделирования температуры стенки барабана

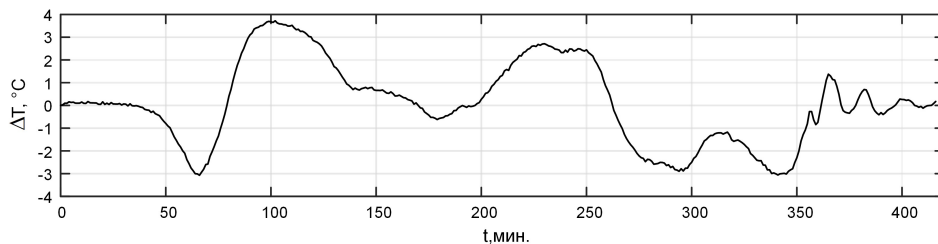


Рис. 6. Рассогласование фактической и модельной температур

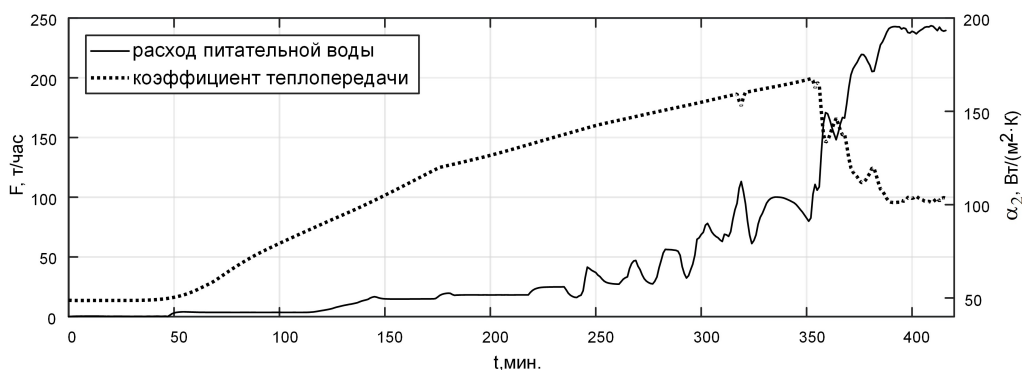


Рис. 7. Изменение расхода питательной воды и коэффициента теплопередачи в процессе моделирования

### Заключение

Предложенный подход может быть распространен на другие модели, описываемые уравнениями теплопроводности, которые имеют аналитическое решение, представимое в виде разложения по ортонормированному базису функций, в том числе и на двух- и трёхмерные задачи.

Главным достоинством подхода является простота его реализации в современных пакетах компьютерного моделирования динамических систем, что позволяет исследовать в них системы управления объектами с распределенными параметрами. Недостатком подхода выступает невозможность определения коэффициентов уравнения как функций пространственной координаты, однако для большинства задач синтеза систем автоматического управления вполне достаточно точности моделирования, достигаемой при коэффициентах, зависящих только от времени.

Подход имеет существенное преимущество по сравнению с сеточными методами: точность модели не зависит от шага сетки по пространственной координате, расчет может быть выполнен для любой точки области определения задачи. Возможно распространение подхода на представление объектов с распределенными параметрами с помощью спектральной теории распределенных систем.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сборник директивных материалов по эксплуатации энергосистем (Теплотехническая часть). Минэнерго СССР. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Энергоиздат, 1981. 320 с.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 599 с.
3. Коналов В.И., Пахомов А.Н., Гатапова Н.Ц., Колух А.Н. Методы решения задач теплопереноса. Теплопроводность и диффузия в неподвижной среде: Учеб. пособие. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2005, 80 с.
4. Карташов Э.М. Теплопроводность при переменном коэффициенте теплообмена // Теплофизика высоких температур. Т. 57, № 5. С. 694–701.
5. Pleshivtseva Yu., Rogachev G., Popov A. MATLAB-FLUX Coupling for numerical modeling in education // SHS Web of Conferences 29, 02033 (2016).
6. Bracco S. Simulation models of steam drums based on the heat transfer equations // Applied Mathematical Sciences, 2010. V. 4, № 74. Pp. 3687–3712.
7. Said W.K., Oleiwi B.K. Simulation of Boiler Drum Wall Temperature Differential and its Estimation // IJCCCE, 2011. V. 11, № 1. Pp. 62–73.
8. Тонкошкур А.Г. Моделирование процесса кондуктивного теплопереноса в грунтовом воздухоохладителе // Математическое моделирование. 2018. Т. 30, № 1. С. 103–116.
9. Васильев А.Н. Математическое моделирование распределенных систем с помощью нейронных сетей // Математическое моделирование, 2007. Т. 19, № 12. С. 32–42.

10. *Васильев А.Н., Тархов Д.А.* Построение приближенных нейросетевых моделей по разнородным данным // Математическое моделирование. 2007. Т. 19, № 12. С. 43–51.
11. *Васильев А.Н., Тархов Д.А., Шемякина Т.А.* Нейросетевой подход к задачам математической физики. СПб.: Нестор-История, 2015. 260 с.
12. *Корсунов Н.И., Ломакин А.В.* Моделирование процессов, описываемых волновым дифференциальным уравнением, с использованием ячеистых нейронных сетей // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Экономика, информатика. 2014. Вып. 31/1, № 15(186). С. 103–107.
13. *Рожкова А.С.* Решение одномерного нестационарного уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами // Приложение математики в экономических и технических исследованиях. 2018. № 1(8). С. 144–148.
14. *Коваль В.А.* Спектральный метод анализа и синтеза распределенных систем. Саратов: Изд-во Сарат. гос. техн. ун-та, 2010. 148 с.
15. *Коваль В.А., Торгашова О.Ю.* Решение задач анализа и синтеза для пространственно-двумерного распределенного объекта, представленного бесконечной системой дифференциальных уравнений // Автоматика и телемеханика. 2014. № 2. С. 54–71.
16. *Бутковский А.Г.* Структурная теория распределенных систем. М.: Наука, 1977. 320 с.
17. *Рапопорт Э.Я.* Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. М.: Высшая школа, 2003. 299 с.
18. *Бутковский А.Г.* Характеристики систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1979. 224 с.
19. *Данилушкин И.А.* Численно-аналитическая модель объекта с распределенными параметрами с переменной структурой // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки. 2013. № 4(40). С. 197–201.
20. *Данилушкин И.А., Сыров И.М.* Моделирование температурного распределения стенки барабана котла // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки. 2018. № 2(58). С. 16–20.
21. *Марочник сталей и сплавов.* 4-е изд., переработ. и доп. / Под общ. ред. Ю.Г. Драгунова, А.С. Зубченко. М.: Машиностроение, 2014. 1216 с.

*Статья поступила в редакцию 03 октября 2022 г.*

# NUMERICAL ANALYTICAL MODEL OF METAL TEMPERATURE OF STEAM BOILER DRUM<sup>1</sup>

*I.A. Danilushkin, S.A. Kolpashchikov, I.S. Levin*

Samara State Technical University  
244, Molodogvardeyskaya str., Samara, 443100, Russian Federation

E-mail: idanilushkin@mail.ru, skolpaschikov@mail.ru, Levin.is@samgtu.ru

**Abstract.** *The problem of developing and identifying a temperature distribution model in the wall of the boiler drum was solved. The numerical model is based on the analytical solution of the one-dimensional heat conduction equation with heat exchange at the boundaries at constant heat transfer coefficients. The model is implemented in a dynamic systems simulation package. Using the bounded series of eigenfunctions of the analytic solution, a representation of the plant in the state space was obtained. A universal algorithm for calculating the eigennumbers of the analytic solution was proposed. The eigenvalues dependences of the analytical solution on the values of heat transfer coefficients and thermal conductivity was investigated. Based on the results of the study, data tables were obtained to approximate the dependences of eigennumbers on heat transfer coefficients in a limited range of variation. The methodology for implementing a dynamic temperature distribution model, which takes into account changes in heat transfer coefficients during simulation, was tested. The time of change of coefficients is perceived as the beginning of a new transient from the current state of the model. Presented structural diagrams of the implementation of the model in dynamic systems simulation packages. The proposed structures allow the introduction of parametric disturbances at the time of their occurrence in the simulation. According to the experimental data of steam boiler firing, identification of the dependence of the heat transfer coefficient on the temperature of the metal wall of the boiler drum was carried out. The results showed that the heat transfer coefficients are influenced not only by the metal temperature, but also by additional parameters of the steam boiler operation. As a result of experiments, it was found that the accuracy of the model can be improved by taking into account the dependence of the heat transfer coefficient on the internal surface of the drum on the flow rate of feed water into the boiler drum. The results of the numerical experiment are presented.*

**Keywords:** *heat transfer equation, variable coefficients, heat transfer coefficient, temperature distribution, object with distributed parameters, numerical-analytic solution, state space.*

## REFERENCES

1. Sbornik direktivnykh materialov po ekspluatatsii energosistem (Teplotekhnicheskaya chast) [Collection of directive materials for the operation of power systems: (Heat engineering part)]. Minenergo SSSR. 2-e izd., pererab. i dop. M.: Energoizdat, 1981. 320 p. (In Russian).
2. Lykov A.V. Teoriya teploprovodnosti [Theory of thermal conductivity]. M.: Vysshaya shkola, 1967. 599 p. (In Russian).
3. Kononov V.I., Pakhomov A.N., Gatapova N.Ts., Koliukh A.N. Metody resheniya zadach teplomassoperenosa. Teploprovodnost i diffuziya v nepodvizhnoi srede: Ucheb. posobie [Methods for solving problems of heat and mass transfer. Thermal conduction and diffusion in a stationary environment: Study guide]. Tambov: Izd-vo Tamb. gos. tekhn. un-ta, 2005. 80 p. (In Russian).

---

<sup>1</sup> *Ivan A. Danilushkin (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.  
Sergey A. Kolpashchikov (Ph.D. (Techn.)), Head of Department.  
Ilya S. Levin (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.*

4. *Kartashov E.M.* Heat Conduction at a Variable Heat-Transfer Coefficient // High Temperature, 2019. Vol. 57, no. 5. P. 663–670.
5. *Pleshivtseva Yu., Rogachev G., Popov A.* MATLAB-FLUX Coupling for numerical modeling in education // SHS Web of Conferences 29, 02033 (2016).
6. *Bracco S.* Simulation models of steam drums based on the heat transfer equations // Applied Mathematical Sciences, 2010. Vol. 4, no. 74. Pp. 3687–3712.
7. *Said W.K., Oleiwi B.K.* Simulation of Boiler Drum Wall Temperature Differential and its Estimation // IJCCCE, 2011. Vol. 11, no. 1. Pp. 62–73.
8. *Tonkoshkur A.G.* Modeling Conductive Heat Transfer in Ground Air Coolers // Mathematical Models and Computer Simulations, 2018. Vol. 10, no. 4. Pp. 519–528.
9. *Vasil'yev A.N.* Matematicheskoe modelirovanie raspredelennykh sistem s pomoshchiu neironnykh setei [Mathematical modeling of distributed systems using neural networks] // Matematicheskoe modelirovanie, 2007. Vol. 19, no. 12. Pp. 32–42. (In Russian).
10. *Vasil'yev A.N., Tarkhov D.A.* Postroenie priblizhennykh neirosetevykh modelei po raznorodnym dannym [Building approximate neural network models based on heterogeneous data] // Matematicheskoe modelirovanie, 2007. Vol. 19, no. 12. Pp. 43–51. (In Russian).
11. *Vasil'yev A.N., Tarkhov D.A., Shemiakina T.A.* Neurosetevoy podkhod k zadacham matematicheskoy fiziki [Neural network approach to problems of mathematical physics]. SPb.: Nestor-Istoriya, 2015. 260 p. (In Russian).
12. *Korsunov N.I., Lomakin A.V.* Modelirovanie protsessov, opisyvaemykh volnovym differentsialnym uravneniem, s ispolzovaniem iacheistykh neironnykh setei [Modeling of processes described by a wave differential equation using cellular neural networks] // Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Ekonomika, informatika. 2014. Vol. 31/1, no. 15 (186). Pp. 103–107. (In Russian).
13. *Rozhkova A.S.* Reshenie odnomernogo nestatsionarnogo uravneniya teploprovodnosti s peremennymi koeffitsientami [Solution of a one-dimensional non-stationary heat equation with variable coefficients] // Prilozhenie matematiki v ekonomicheskikh i tekhnicheskikh issledovaniyakh, 2018. no. 1 (8). Pp. 144–148. (In Russian).
14. *Koval V.A.* Spektralnyi metod analiza i sinteza raspredelennykh sistem [Spectral method for analysis and synthesis of distributed systems]. Saratov: Izd-vo Sarat. gos. tekhn. un-ta, 2010. 148 p. (In Russian).
15. *Koval V.A., Torgashova O.Yu.* Solving analysis and synthesis problems for a spatially two-dimensional distributed object represented with an infinite system of differential equations // Automation and Remote Control, 2014. Vol. 75, no. 2. Pp. 219–233.
16. *Butkovskiy A.G.* Strukturnaya teoriya raspredelennykh sistem [Structural theory of distributed systems]. M.: Nauka, 1977. 320 p. (In Russian).
17. *Rapoport E.Ya.* Strukturnoe modelirovanie obiektov i sistem upravleniya s raspredelennymi parametrami [Structural modeling of objects and control systems with distributed parameters]. M.: Vysshaya shkola, 2003. 299 p. (In Russian).
18. *Butkovskiy A.G.* Kharakteristiki sistem s raspredelennymi parametrami [Characteristics of systems with distributed parameters]. M.: Nauka, 1979. 224 p. (In Russian).
19. *Danilushkin I.A.* Chislenno-analiticheskaya model obieкта s raspredelennymi parametrami s peremennoy strukturoy [Numerical-analytical model of an object with distributed parameters with a variable structure] // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Tekhnicheskije nauki. 2013. no. 4 (40). Pp. 197–201. (In Russian).
20. *Danilushkin I.A., Syrov I.M.* Modelirovanie temperaturnogo raspredeleniya stenki barabana kotla [Modeling the temperature distribution of the boiler drum wall] // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Tekhnicheskije nauki. 2018. no. 2 (58). Pp. 16–20.
21. *Marochnik staley i splavov. 4-e izd., pererabot. i dop.* [Marker of steels and alloys. th ed., revised] / Pod obshchei red. Yu.G. Dragunova, A.S. Zubchenko. M.: Mashinostroenie, 2014. 1216 p. (In Russian).