

# Информатика, вычислительная техника и управление

УДК 004.63

## ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА ВОССТАНОВЛЕНИЯ СИГНАЛОВ В БАЗИСЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ<sup>1</sup>

**В.И. Батищев, А.Г. Золин**

Самарский государственный технический университет  
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244  
E-мэйл: zolin.a.g@gmail.com

**Аннотация.** Предложен метод построения цифровых фильтров для решения обратных задач восстановления сигналов, временных рядов и изображений с использованием аппроксимационного подхода. Рассмотренные обратные задачи относятся к классу некорректно поставленных и требуют использования определенных регуляризующих процедур для синтеза оптимальных алгоритмов реконструкции и решения связанных с этим вычислительных проблем.

В связи с этим предложен метод построения аппроксимационной модели весовой функции обратного (восстанавливающего) фильтра на основе критерия минимума квадратической погрешности рассогласования модели искаженного сигнала, полученного после обработки прямым (искажающим) фильтром модели восстановленного (неизвестного) сигнала и имеющегося исходного искаженного сигнала. Весовая функция прямого фильтра предполагается известной.

Сформулирована постановка задачи восстановления сигналов, временных рядов и изображений в случае одномерной функции рассеяния точки. Представлен алгоритм, позволяющий снизить объем вычислений при нахождении значений весовой функции обратного фильтра.

Проведена апробация алгоритмов на модельных примерах при обработке реальных изображений, полученных при дистанционном зондировании Земли, а также на специально сформированных контрастных изображениях. Для количественной оценки качества восстановления использовалась относительная среднеквадратическая мера различия эталонного и восстановленного сигналов (изображений). Приведенные результаты апробации показывают, что использование данного подхода позволяет уменьшить погрешность восстановления, что дает преимущество при решении задачи аппроксимации и восстановления данных.

**Ключевые слова:** КИХ-фильтр, весовая функция, обратный фильтр, реконструкция смазанных изображений.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (проекты 18-08-253а, 19-08-00228а).

Батищев Виталий Иванович (д.т.н., проф.), профессор кафедры «Информационные технологии».

Золин Алексей Георгиевич (к.т.н., доц.), доцент кафедры «Информационные технологии».

## Введение

В технических приложениях, связанных с проведением экспериментальных исследований при решении задач обработки и интерпретации экспериментальных данных, часто возникает необходимость рассмотрения обратной задачи, заключающейся в восстановлении неизвестного входного воздействия по результатам регистрации откликов на выходе средств измерения.

В большинстве случаев это задача компенсации искажающего действия аппаратной функции, обеспечивающая улучшение разрешающей способности различного рода измерительных приборов и систем [1, 2]. В случае, когда для обработки доступна только часть искаженного сигнала, без начальных условий, задача становится недоопределенной и, соответственно, некорректно поставленной [3, 4].

Решение таких задач требует методов регуляризации, базирующихся на привлечении априорной информации о решении, которая может быть как качественной (неотрицательность и гладкость решения), так и количественной [5, 6, 7]. Общим фундаментальным свойством методов регуляризации является их ориентация на принципиально смещенные решения. Это же свойство является фундаментальным для аппроксимационных методов, имеющих явные перспективы в решении различного рода обратных задач [8, 9], в том числе и задач восстановления сигналов [10, 11, 12]. На основе обобщенных принципов получения информации об исследуемых объектах экспериментальным путем по результатам измерений аппроксимационный подход к восстановлению сигналов позволяет использовать аналитические модели функциональных характеристик этих объектов, выбранных на основе априорной информации с учетом целей получения того или иного результата.

## Постановка задачи

В общем случае искаженный сигнал  $x_{см}(m)$  может быть представлен как свертка значений исходного сигнала  $x_{исх}(m)$  с известной весовой функцией прямого (искажающего) фильтра  $h_0$ :

$$x_{см}(m) = \sum_{i=0}^{N_0-1} h_0(i)x_{исх}(m-i), \quad (1)$$

здесь  $N_0$  – величина весовой функции фильтра, представляет собой количество значений  $h_0$ .

Задача реконструкции полученного с помощью (1) сигнала сводится к нахождению функции  $x_{вст}(m)$ , в некотором роде близкой к  $x_{исх}(m)$ , по имеющимся значениям  $x_{см}(m)$ . Данная задача представляет собой обратную задачу. Отсутствие начальных значений  $x_{см}(m)$  переводит данную задачу в класс некорректно поставленных.

В данной статье рассматривается подход, основанный на построении весовой функции обратного (восстанавливающего) фильтра и применении этого фильтра к имеющемуся искаженному сигналу. Предлагаемое решение опирается на построение аппроксимационной модели восстановленного сигнала, который в точности нам неизвестен. Как известно, применение аппроксимационных подходов для конкретных практических задач связано с выбором вида базисных функций и определением критерия адекватности модели. В данной работе используется базис экспоненциальных функций:

$$y = \exp(-a \cdot x).$$

Применение других видов базисных функций в задачах восстановления сигналов (полиномиальных, тригонометрических) рассмотрено, например, в [13]. Построение аппроксимационных моделей на базисе стохастических функций при решении задач восстановления сигналов и изображений описано в [12].

В представляемом подходе в качестве критерия адекватности модели используется минимум квадратической погрешности рассогласования исходного искаженного сигнала и некоторого сигнала, полученного при использовании прямого (искажающего) фильтра к аппроксимационной модели восстановленного (неизвестного) сигнала. Весовая функция прямого фильтра предполагается известной.

Также на практике используются и другие критерии адекватности; так, например, синтез обратных фильтров на основе критерия моментов представлен в [13], а синтез нелинейных адаптивных фильтров для решения обратных задач восстановления сигналов – в [14].

Решением задачи восстановления сигнала будем считать нахождение функции  $h(i)$ , представляющей собой весовую функцию обратного фильтра, позволяющего получить с помощью операции свертки оценку восстановленного сигнала  $x_{всм}(m)$ :

$$x_{всм}(m) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i)x_{см}(m-i). \quad (2)$$

Представим оценку восстановленного сигнала в виде следующей модели:

$$x_{всм}^M = \sum_{v=0}^p C_v \exp(-a \cdot m(v+1)), \quad (3)$$

где  $p$  – порядок модели;  
 $C_v$  – параметры модели;  
 $a$  – коэффициент, связанный с шагом дискретизации.

Подставив  $x_{всм}^M(m)$  в (2), получим выходной сигнал прямого фильтра в виде

$$x_{см}^M = \sum_{v=0}^p C_v \mu(v) \exp(-am(v+1)), \quad (4)$$

где

$$\mu(v) = \sum_{k=0}^{N_0-1} h_0(k) \exp(ak(v+1)).$$

### **Связь погрешности восстановления сигнала с квадратичной погрешностью**

Значения  $C_v$  будем определять по выборке  $\{y_i\}$ ,  $i=0, \dots, N-1$  на основе обеспечения минимума квадратической погрешности:

$$E = \sum_{i=m-N+1}^m (x_{см}^M(i) - x_{см}(i))^2 = \sum_{i=0}^{N-1} (x_{см}^M(m-i) - x_{см}(m-i))^2. \quad (5)$$

Значение погрешности  $E$  зависит от величин  $C_0, \dots, C_p$ .

Для обеспечения минимума этого значения должно быть выполнено условие

$$\frac{dE}{dC_k} = 0, k = \overline{0, p}.$$

С учетом (3) это условие примет вид

$$\sum_{i=0}^{N-1} (x_{cm}^M(m-i) - x_{cm}(m-i)) \frac{dx_{cm}^M(m-i)}{dC_k} = 0, k = \overline{0, p}. \quad (6)$$

Подставив сюда  $x_{cm}^M(m-i)$  из (4), получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} & \sum_{v=0}^p C_v \mu(v) \sum_{i=0}^{N-1} \exp(-a(v+k+2)(m-i)) = \\ & = \sum_{i=0}^{N-1} x_{cm}(m-i) \exp(-a(k+i)(m-i)), \quad k = \overline{0, p}. \end{aligned} \quad (7)$$

Левую и правую части системы (7) умножим на  $\exp(am(k+1))$  и приведем ее к виду

$$\begin{aligned} & \sum_{v=0}^p C_v \mu(v) \exp(-am(v+1)) B(k+v) = \\ & = \sum_{i=0}^{N-1} x_{cm} \exp(ai(k+1)), \quad k = \overline{0, p}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$B(n) = \frac{1 - \exp(aN(n+2))}{1 - \exp(a(n+2))}, \quad n = \overline{0, 2p}. \quad (9)$$

Введем следующее обозначение:

$$A_v(m) = C_v \exp(-am(v+2)). \quad (10)$$

С учетом этого модель (3) будет выглядеть так:

$$x_{bcm}^M(m) = \sum_{v=0}^p A_v(m), \quad (11)$$

а система уравнений (8) примет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{v=0}^p \mu(v) A_v(m) B(k+v) = \\ & = \sum_{i=0}^{N-1} x_{cm}(m-i) \exp(ai(k+1)), \quad k = \overline{0, p}. \end{aligned} \quad (12)$$

### Синтез обратного фильтра по минимуму квадратичной погрешности

Обозначим элементы матрицы, обратной матрице коэффициентов  $B(k+v)$  системы (12), как  $\beta(n_1, n_2)$ . Тогда решение системы уравнений будет таким:

$$A_v(m) = \frac{1}{\mu(v)} \sum_{i=0}^{N-1} x_{cm}(m-i) \sum_{k=0}^p \beta(v,k) \exp(ai(k+1)), \quad v = \overline{0, p}. \quad (13)$$

Подставив  $A_v(m)$  из (13) в (10), получим формулу восстановления исходного сигнала:

$$x_{всм}^M(m) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i)x_{cm}(m-i), \quad (14)$$

где

$$h(i) = \sum_{v=0}^p \frac{1}{\mu(v)} \sum_{k=0}^p \beta(v,k) \exp(ai(k+1)). \quad (15)$$

Здесь  $h(i)$  – весовая функция обратного (восстанавливающего) фильтра.

Представленный способ построения весовой функции обратного фильтра требует определить элементы обратной матрицы коэффициентов  $\beta(n_1, n_2)$ . Для выполнения этой процедуры был разработан более простой, с точки зрения реализации и объемов вычислений, алгоритм. Найдем коэффициенты  $K(n_1, n_2)$ , которые вычислим по следующей формуле:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi(k, v) = B(k+v) - \sum_{q=0}^{v-1} K(v, q) \Psi(k, q) \\ K(k, v) = \frac{\Psi(k, v)}{\Psi(v, v)} \\ v = \overline{0, k} \\ k = \overline{0, p} \end{array} \right. \quad (16)$$

Используя полученные коэффициенты, получим выражение для нахождения весовой функции обратного фильтра:

$$\left\{ \begin{array}{l} g(m, m) = 1 \\ g(m, q) = - \sum_{k=q+1}^m g(m, k) K(k, q) \\ q = \overline{m-1, 0} \\ h(i) = \sum_{k=0}^p \exp(ai(k+1)) \sum_{q=k}^p \frac{g(q, k)}{\Psi(q, q)} \sum_{v=0}^q \frac{g(q, v)}{\mu(v)} \end{array} \right. \quad (17)$$

### Апробация результатов

Одним классом задач восстановления сигналов являются задачи восстановления смазанных и расфокусированных изображений [15, 16, 17]. Так, в системах дистанционного зондирования Земли, используемых в том числе в космических исследованиях, изображение формируется с помощью устройств с зарядовой связью, работающих в режиме временной задержки и накопления оптического сигнала. Эксплуатация таких приборов требует, чтобы скорость космического аппарата была точно согласована с периодом опроса светочувствительной матрицы. На практике такое равенство может нарушаться из-за погрешностей вычисления

скорости спутника [18]. В результате изображение подстилающей поверхности оказывается смазанным вдоль траектории движения летательного аппарата. Конструктивные особенности светочувствительных элементов позволяют получить параметры функции рассеяния точки, являющейся в нашем случае весовой функцией прямого фильтра. Способы определения параметров смаза представлены в [19, 20]. Полученные в результате несоответствия скоростей искажения имеют одну пространственную составляющую, что позволяет перейти от двумерной задачи к одномерной и существенно снизить объем вычисляемых данных. Решение двумерной задачи восстановления смазанного изображения представлено, например, в [21].

Апробация алгоритма проводилась на двух типах изображений: на изображениях, полученных в процессе дистанционного зондирования Земли, и на специально созданных контрастных изображениях для проверки поведения алгоритмов в условиях резкого перепада яркостей. В случае с первым типом изображений из-за конструктивных особенностей регистрирующего аппарата полученные данные имеют 1024 градации серого, что в 4 раза выше значений, принятых в распространенных форматах хранения графических файлов на персональных компьютерах. Для согласованности результатов измерений контрастные изображения были сформированы в том же формате. Пример тестового эталонного изображения, полученного в результате дистанционного зондирования Земли, показан на рис. 1, пример контрастного изображения приведен на рис. 2.



Рис. 1. Эталонное изображение участка Земли

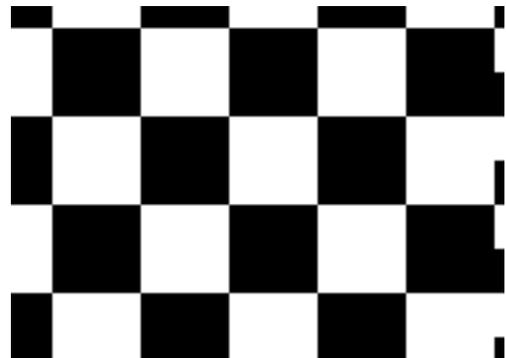


Рис. 2. Контрастное изображение

Каждая строка тестового изображения была обработана по формуле (1) фильтрами с весовыми функциями:

$$h_0(i) = \frac{1}{N_0}, \quad i = \overline{0, N_0 - 1}; \quad (18)$$

$$h_0(i) = \frac{ki + b}{N_0(b + 0,5k(N_0 + 1)) - k}, \quad i = \overline{0, N_0 - 1}; \quad (19)$$

$$h_0(i) = \frac{-ki + b}{N_0(b - 0,5k(N_0 + 1)) + k}, \quad i = \overline{0, N_0 - 1}. \quad (20)$$

Схематичное изображение весовых функций из формул (18), (19), (20) приведено на рис. 3.

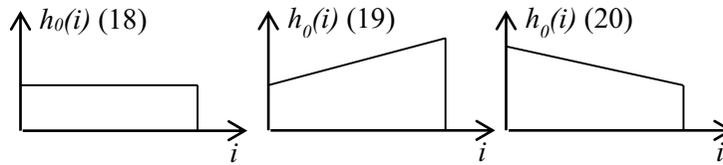


Рис. 3. Схематичное изображение весовых функций из формул (18), (19), (20)

Таким образом, было выполнено размытие изображения вдоль горизонтальной оси на различное количество пикселей  $N_0 = 3, 4, 5, \dots, 10$ . Для весовых функций (19) и (20) брались следующие значения:  $k=0.2, b = 1.0$ .

В ходе проведения экспериментов были предприняты попытки восстановления по алгоритмам (16), (17) и (14). Для количественной оценки качества восстановления использовалась относительная среднеквадратическая погрешность (ОСП), вычисляемая по формуле

$$ОСП = \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^{M-1} (x_{вст}^M(j) - x_{исх}(j))^2}{\sum_{j=0}^{M-1} x_{исх}(j)^2}}, \quad (21)$$

где  $x_{исх}(j)$  – значение пикселя строки эталонного изображения;  
 $x_{вст}^M(j)$  – значение пикселя строки восстановленного изображения;  
 $M$  – количество пикселей в строке.

Поскольку в процессе апробации одновременно есть доступ и к эталонному, и к восстановленному изображению, данный способ позволяет оценить качество исследуемых алгоритмов. Полученная величина показывает степень отклонения результата от исходного изображения. Другие способы оценки качества восстановления изображений приведены, например, в [22].

Значения ОСП смазанных изображений земной поверхности без восстановления приведены в табл. 1.

Таблица 1

### ОСП невосстановленных изображений

$N_0$ \ ОСП	3	4	5	6	7	8	9	10
$h_0(18)$	0,0328	0,0512	0,0694	0,0855	0,0983	0,1082	0,1155	0,121
$h_0(19)$	0,0334	0,0448	0,0584	0,0710	0,0813	0,0895	0,096	0,101
$h_0(20)$	0,0336	0,0587	0,0812	0,1007	0,1161	0,1276	0,1361	0,1421

Анализ представленного в работе алгоритма показывает, что результат восстановления зависит от значений весовых функций прямого и обратного фильтров  $N, N_0$  и порядка модели  $P$ . Некоторые значения погрешности восстановления изображений

ражений земной поверхности с разными видами весовых функций прямого фильтра приведены в табл. 2, 3, 4. Минимальные значения погрешности выделены жирным шрифтом.

Таблица 2

Значение ОСП восстановления в случае весовой функции (18)

$N_0=5$										
$N \backslash P$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
16	0.038	0.058	0.057	0.056	0.055	0.051	0.046	0.035	0.031	0.030
17	0.038	0.058	0.057	0.057	0.368	0.068	0.046	0.032	0.031	0.030
18	0.038	0.057	0.057	0.057	0.066	0.057	0.046	0.036	0.031	0.030
19	0.038	0.057	0.057	0.053	0.051	0.057	0.045	0.035	0.102	0.032
20	0.038	0.057	0.057	0.056	0.055	0.057	0.049	0.070	0.116	<b>0.029</b>
$N_0=6$										
$N \backslash P$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
16	0.064	0.063	0.060	0.057	0.054	0.060	0.049	0.040	0.041	0.039
17	0.063	0.063	0.068	0.178	0.058	0.060	0.050	0.040	0.040	0.039
18	0.063	0.063	0.061	0.053	0.055	0.060	0.050	0.040	0.041	0.103
19	0.063	0.063	0.062	0.051	0.055	0.060	0.052	0.115	0.051	0.038
20	0.063	0.063	0.06	0.052	0.055	0.058	0.070	0.129	0.045	<b>0.038</b>
$N_0=7$										
$N \backslash P$	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
10	0.052	0.048	0.047	0.045	0.061	0.046	0.046	0.050	0.079	0.068
11	0.051	0.048	0.047	0.052	0.053	0.047	0.046	0.053	0.065	0.273
12	0.052	0.057	0.056	0.065	0.053	0.046	<b>0.043</b>	0.047	0.043	0.067
13	0.051	0.050	0.050	0.053	0.055	0.046	0.044	0.046	0.046	0.054
14	0.052	0.053	0.050	0.054	0.052	0.046	0.043	0.043	0.044	0.077

Таблица 3

Значение ОСП восстановления в случае весовой функции (19)

$N_0=5$										
$N \backslash P$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
22	0.111	0.448	0.225	0.173	0.148	–	0.141	0.183	0.243	0.318
23	1.506	0.336	0.255	0.166	0.165	–	0.116	0.180	0.241	0.313

24	0.134	0.217	<b>0.066</b>	0.187	0.154	–	0.163	0.174	0.247	0.315
25	0.225	0.304	0.076	0.184	0.166	–	0.183	0.168	0.240	0.321
26	1.124	0.220	0.394	0.166	0.154	–	0.183	0.179	0.211	0.313
$N_0=6$										
$N \backslash P$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
15	0.497	1.274	0.260	0.291	0.252	–	0.313	0.276	0.327	0.406
16	2.200	<b>0.077</b>	0.288	0.289	0.249	–	0.207	0.249	0.320	0.407
17	3.913	0.384	0.313	0.268	0.302	–	0.188	0.245	0.349	0.406
18	0.307	0.408	0.428	0.251	0.268	–	0.248	0.251	0.349	0.404
19	0.750	0.472	0.339	0.444	0.233	–	0.247	0.244	0.349	0.408
$N_0=7$										
$N \backslash P$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
14	0.864	0.679	0.352	0.357	0.347	–	0.199	0.340	0.423	0.495
15	0.867	1.343	0.355	0.390	0.349	–	0.407	0.366	0.418	0.495
16	1.617	0.094	0.384	0.387	0.346	–	0.296	0.341	0.412	0.496
17	4.035	0.484	0.410	0.366	0.404	–	0.275	0.337	0.441	0.495
18	0.765	0.501	0.522	0.348	0.367	–	0.341	0.343	0.441	0.493

*Таблица 4*

**Значение ОСП восстановления в случае весовой функции (20)**

$N_0=5$										
$N \backslash P$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
27	0.252	0.244	0.183	0.118	0.066	–	0.120	0.083	0.132	0.223
28	0.885	0.130	0.161	0.122	0.080	–	0.171	0.101	0.139	0.258
29	0.132	0.359	0.165	0.132	<b>0.030</b>	–	0.043	0.084	0.132	0.214
30	0.128	0.436	0.185	0.093	0.078	–	0.043	0.076	0.071	0.268
31	0.083	0.263	0.134	0.093	0.050	–	0.088	0.082	0.143	0.261
$N_0=6$										
$N \backslash P$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

32	0.080	0.241	0.392	0.141	0.144	–	0.138	0.182	0.260	0.209
33	0.068	0.251	0.204	0.139	0.099	–	0.113	0.137	0.261	0.178
34	<b>0.067</b>	0.267	0.173	0.145	0.151	–	0.117	0.155	0.244	0.304
35	0.510	0.419	0.219	0.157	0.155	–	0.111	0.123	0.237	0.309
36	0.498	0.318	0.298	0.170	0.140	–	0.111	0.130	0.232	0.274
$N_0=7$										
$N \backslash P$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
14	0.160	0.198	0.276	0.354	0.430	0.397	0.578	0.633	0.722	0.765
15	0.261	0.225	0.271	0.355	0.463	0.079	0.588	0.724	0.704	0.763
16	0.165	0.200	0.264	0.356	0.432	<b>0.074</b>	0.484	0.653	0.708	0.765
17	0.154	0.197	0.294	0.354	0.147	0.518	0.451	0.628	0.705	0.765
18	0.198	0.202	0.294	0.352	0.399	0.491	0.527	0.628	0.712	0.810

Графики зависимости ОСП от  $N$  при различных  $N_0$  и  $P$  в случае минимальной погрешности показаны на рис. 4, а график зависимости от  $P$  – на рис. 5. Эти графики приведены для случая весовой функции прямого фильтра (18).

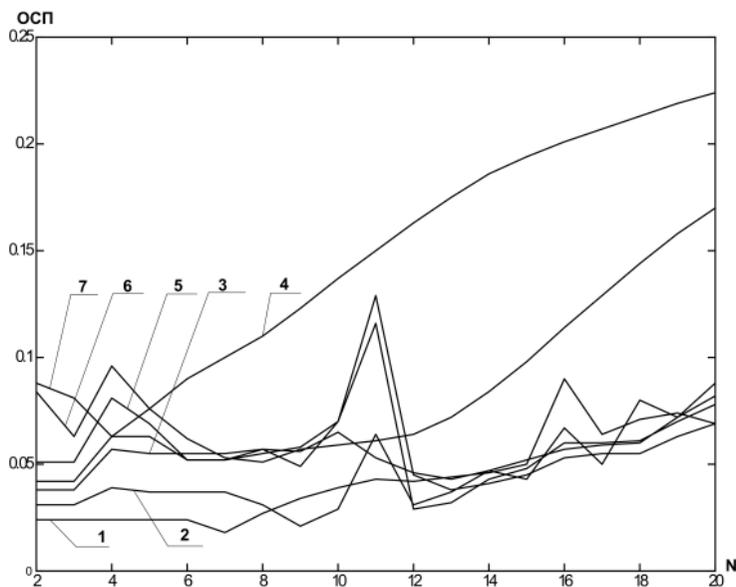


Рис. 4. Зависимость ОСП от  $N$  при заданных  $N_0$  и  $P$ :  
 1 –  $N_0=3, P=14$ ; 2 –  $N_0=4, P=19$ ; 3 –  $N_0=5, P=20$ ; 4 –  $N_0=6, P=20$ ;  
 5 –  $N_0=7, P=12$ ; 6 –  $N_0=8, P=4$ ; 7 –  $N_0=9, P=2$

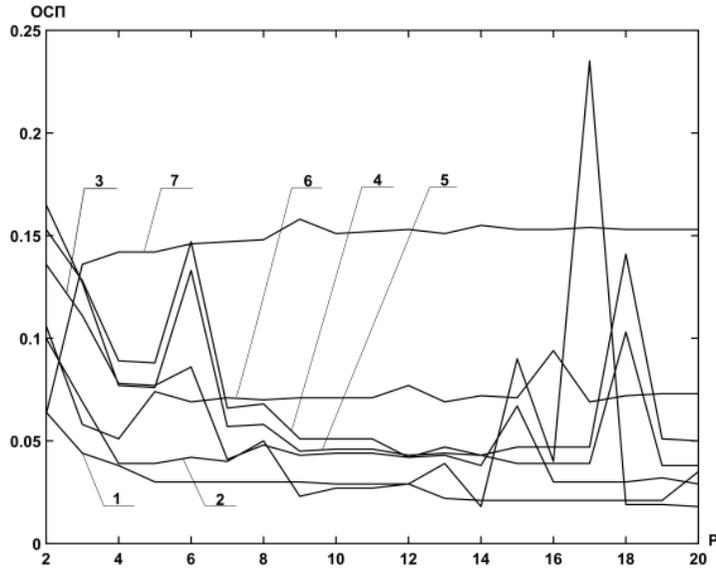


Рис. 5. Зависимость ОСП от  $P$  при заданных  $N_0$  и  $N$ :  
 1 -  $N_0=3, N=7$ ; 2 -  $N_0=4, N=9$ ; 3 -  $N_0=5, N=12$ ; 4 -  $N_0=6, N=13$ ;  
 5 -  $N_0=7, N=13$ ; 6 -  $N_0=8, N=8$ ; 7 -  $N_0=9, N=4$ .

На рис. 6 представлен график зависимости ОСП от  $N$  при различных  $N_0$  и  $P$  в случае минимальной погрешности для случая весовой функции прямого фильтра (18).

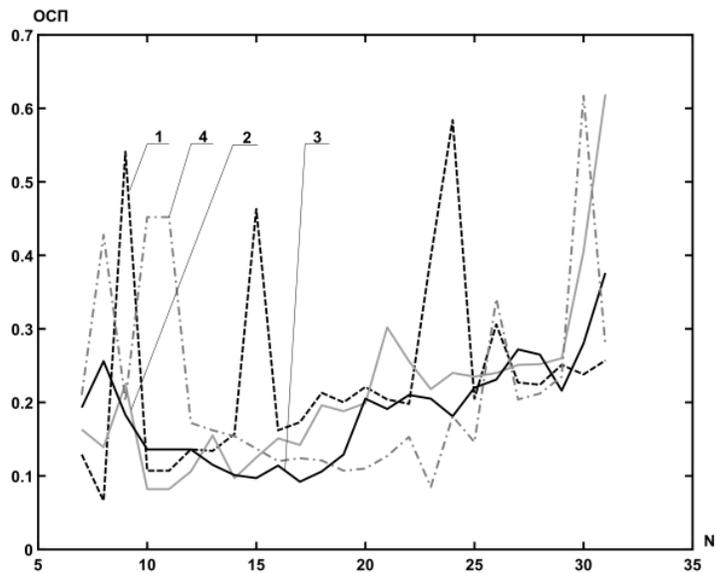


Рис. 6. Зависимость ОСП от  $N$ :  
 1 -  $N_0=3, P=27$ ; 2 -  $N_0=4, P=33$ ; 3 -  $N_0=5, P=40$ ; 4 -  $N_0=6, P=38$ ;

Результаты восстановления контрастного изображения (см. рис. 2) для случая весовой функции прямого фильтра (18) представлены в табл. 5. Однако для получения представления работы алгоритма на контрастном изображении рассмотрим

вид полученного восстановленного сигнала (рис. 7). Из рисунка видно, что большой вклад в погрешность вносят выбросы на границах перепада яркостей, но далее алгоритм формирует сигнал с низким значением ОСП. Погрешность восстановления в этом случае можно несколько уменьшить; учитывая, что максимальные и минимальные значения пикселя изображения не должны выходить из интервала  $[0; 1023]$ , явно заменим выходящие за диапазон величины на 0 и 1023.

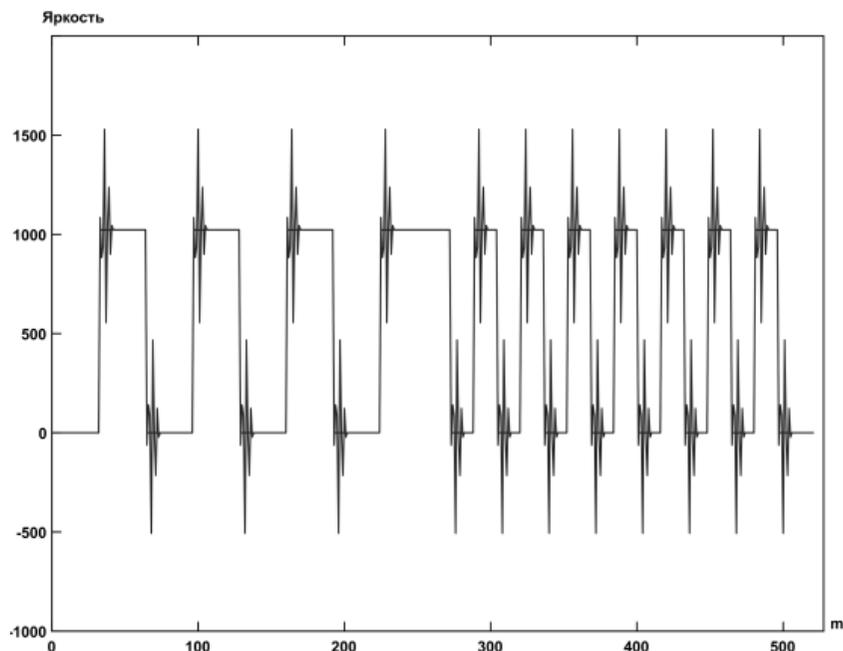


Рис. 7. Фрагмент восстановленной строки контрастного изображения

Таблица 5

**Значение ОСП восстановления контрастного изображения**

		$N_0=5$									
$N \backslash P$		5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
24		0.095	0.118	0.146	0.072	0.099	–	0.112	0.128	0.181	0.162
25		0.092	0.118	0.072	0.070	0.094	–	0.158	0.115	0.170	0.156
26		0.092	0.118	0.129	0.068	0.535	–	0.107	0.132	0.107	0.162
27		0.095	0.118	0.129	<b>0.066</b>	0.541	–	0.107	0.136	0.134	0.157
28		0.088	0.118	0.130	0.069	0.457	–	0.110	0.134	0.156	0.155
		$N_0=6$									
$N \backslash P$		4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
31		0.150	0.150	0.160	0.140	0.189	–	0.083	0.108	0.092	0.108

32	0.133	0.133	0.162	0.139	0.226	–	0.082	0.110	0.110	0.097
33	0.136	0.136	0.163	0.139	0.225	–	<b>0.082</b>	0.106	0.155	0.097
34	0.136	0.136	0.168	0.139	0.196	–	0.083	0.129	0.091	0.111
35	0.137	0.137	0.164	0.139	0.120	–	0.082	0.117	0.111	0.098
$N_0=7$										
$N \backslash P$	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
14	0.156	0.139	0.137	0.107	0.102	0.106	0.099	0.115	0.127	0.167
15	0.156	0.139	0.137	0.164	0.121	0.109	0.097	0.108	0.126	0.115
16	0.156	0.139	0.156	0.105	0.114	0.098	0.095	0.114	0.156	0.103
17	0.164	0.137	0.136	0.138	0.114	0.101	0.097	0.139	0.092	0.103
18	0.183	0.137	0.136	0.136	0.115	0.101	0.097	0.114	<b>0.092</b>	0.106

### Выводы

На основе анализа известных подходов к синтезу оптимальных алгоритмов реконструкции сигналов, основанных на использовании регуляризующих процедур при решении некорректных обратных задач и связанных с этим вычислительных проблем, предложен метод построения цифровых фильтров для решения обратных задач восстановления сигналов, временных рядов и изображений с использованием аппроксимационного подхода.

Сформулирована постановка задачи восстановления сигналов, временных рядов и изображений в случае одномерной функции рассеяния точки. Представлен алгоритм, позволяющий снизить объем вычислений при нахождении значений весовой функции обратного фильтра.

Проведена апробация алгоритмов на модельных примерах при обработке реальных изображений, полученных при дистанционном зондировании Земли, а также на специально сформированных контрастных изображениях. Для количественной оценки качества восстановления использовалась относительная среднеквадратическая мера различия эталонного и восстановленного сигналов (изображений). Приведенные результаты апробации показывают, что использование данного подхода позволяет уменьшить погрешность восстановления, что дает преимущество при решении задач аппроксимации и восстановления данных.

Приведенные результаты апробации (см. табл. 2, 3, 4, 5) показывают, что использование данного подхода позволяет уменьшить погрешность восстановления и аппроксимации. Наибольшее преимущество при решении задач аппроксимации и восстановления данных представленный подход демонстрирует в случае весовой функции прямого фильтра типа (18). В настоящее время ведутся исследования, направленные на снижение погрешности восстановления сигналов, имеющих точки разрыва.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Клебанов Я.М., Карсаков А.В., Хонина С.Н., Давыдов А.Н., Поляков К.А. Компенсация аберраций волнового фронта в телескопах космических аппаратов с регулировкой температурного поля телескопа // Компьютерная оптика, 2017, том 41. №1. С. 30-36.

2. *Tokovinin, A.* DONUT: measuring optical aberrations from a single extrafocal image / *A. Tokovinin, S. Heathcote* // Publications of the Astronomical Society of the Pacific. – 2006. – Vol. 118(846). Pp. 1165-1175.
3. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1979.
4. *Engl H.W., Hanke M., Neubauer A.* Regularization of Inverse Problems. – Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1996. 322 p.
5. *Сизиков В.С.* Математические методы обработки результатов измерений. СПб.: Политехника, 2001. 240 с.
6. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983. 200 с.
7. *Апарцина А.С., Солодуша С.В., Таиров Э.А.* Математические модели нелинейной динамики на базе рядов Вольтерра и их приложения // Изв. РАЕН. Сер. МММИУ. 1997. Т. 1. №2. С. 115-125.
8. *Ганеев Р.М.* Математические модели в задачах обработки сигналов. М.: Горячая линия - Телеком, 2002. 83 с.
9. *Батищев В.И.* Аппроксимационный подход к обработке и интерпретации результатов рентгенодифрактометрических экспериментов // Проблемы управления и моделирования в сложных системах: Тр. VII Междунар. конф. Самара: Самар. науч. центр РАН. 2005. С. 197-202.
10. *Батищев В.И., Волков И.И., Золин А.Г.* Синтез фильтров для восстановления смазанных изображений с использованием методов регуляризации // Проблемы управления и моделирования в сложных системах (ПУМСС-2013): Труды XV Международной конференции, ИПУСС РАН, Самара, 2013. С. 615-618.
11. *Батищев В.И., Золин А.Г., Косарев Д.Н., Романеев А.Е.* Аппроксимационный подход к решению обратных задач анализа и интерпретации экспериментальных данных // Вестник СамГТУ, сер. Технические науки. 2006, вып. №40. С. 57-65.
12. *В.И. Батищев, И.И. Волков, А.Г. Золин.* Использование стохастического базиса в задачах восстановления сигналов и изображений // Автометрия, 2017. №4. С. 127-134.
13. *Батищев В.И., Волков И.И., Золин А.Г.* Синтез цифровых КИХ-фильтров для решения задач восстановления сигналов с использованием критерия моментов // Вестник СамГТУ, сер. Технические науки. 2012. №36. С. 98-105.
14. *Батищев В.И., Волков И.И., Золин А.Г.* Синтез нелинейных адаптивных ких-фильтров для решения обратных задач восстановления сигналов // Вестник СамГТУ, сер. Технические науки. 2014. №43. С. 17-22.
15. *Василенко Г.И., Тараторин А.М.* Восстановление изображений. М.: Радио и связь. 1986. 304 с.
16. *Сизиков В.С., Римских М.В., Мирджамолов Р.К.* Реконструкция смазанных и зашумленных изображений без использования граничных условий // Оптический журнал. 2009. Т. 76. № 5. С. 38-46.
17. *Гонсалес Р., Вудс Р.* Цифровая обработка изображений 3-е издание, исправленное и дополненное. — М.: Техносфера, 2012. 1104 с.
18. *Кузнецов П.К., Семавин В.И., Солодуха А.А.* Алгоритм компенсации скорости смаза изображения подстилающей поверхности, получаемого при наблюдении Земли из космоса // Вестник Сам. ГТУ, 2005. №37. С. 150-157
19. *Егошкин Н.А., Еремеев В.В.* Коррекция смаза изображений в системах космического наблюдения земли // Цифровая обработка сигналов. 2010. №4. С. 28-32.
20. *Кузнецов П.К., Мартельянов Б.В., Мятлов Г.Н., Юдаков А.А.* Методика вычисления оценок параметров смаза изображений, получаемых целевой аппаратурой КАН типа "Ресурс" // 7-я международная научно-техническая конференция К.Э. Циолковский - 160 лет со дня рождения. Космонавтика. Радиоэлектроника. Геоинформатика" Год издания: 2017. Рязань С. 344-350.
21. *Волков И.И., Золин А.Г.* Решение двумерной обратной задачи восстановления смазанного изображения // Вестник СамГТУ, сер. Технические науки. 2013. №39. С. 223-226.
22. *Avcibas I., Sankur B., Sayood K.* Statistical evaluating of image quality measures // Journal of Electronic Imaging. April 2002. Vol.11. № 2. Pp. 206-223.

*Статья поступила в редакцию 10 марта 2020 г.*

# RESEARCH ALGORITHM RESTORING SIGNALS IN THE BASIS OF EXPONENTIAL FUNCTIONS

*V.I. Batishchev, A.G. Zolin*

Samara State Technical University  
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

**Abstract.** *The paper proposes a method for constructing digital filters for solving inverse problems of recovering signals, time series, and images using an approximation approach. The considered inverse problems belong to the class of incorrectly posed ones and require the use of certain regularizing procedures to synthesize optimal reconstruction algorithms and solve computational problems associated with this.*

*In this regard, a method is proposed for constructing an approximation model of the weight function of the inverse (reconstruction) filter, based on the criterion of the minimum quadratic error of the mismatch of the distorted signal model obtained after the direct (distorting) filter processes the reconstructed (unknown) signal and the existing distorted signal. The weight function of the direct filter is assumed to be known.*

*The statement of the problem of reconstructing signals, time series, and images in the case of a one-dimensional point scattering function is formulated. An algorithm is presented that allows one to reduce the amount of computation when finding the values of the weight function of the inverse filter.*

*The algorithms were tested on model examples when processing real images obtained by remote sensing of the Earth, as well as on specially formed contrast images. To quantify the quality of reconstruction, a relative mean-square measure of the difference between the reference and reconstructed signals (images) was used. The results of testing show that using this approach allows to reduce the error of recovery, which gives an advantage in solving problems of approximation and data recovery.*

**Keywords:** *FIR filter, weight function, reverse filter, reconstruction of blurred images*

## REFERENCES

1. *Klebanov Ya.M., Karsakov A.V., KHonina S.N., Davydov A.N., Polyakov K.A.* Kompensatsiya aberratsij volnovoogo fronta v teleskopakh kosmicheskikh apparatov s regulirovkoj tempe-raturnogo polya teleskopa // *Komp'yuternaya optika*. 2017. T. 41. № 1. P. 30–36.
2. *Tokovinin A., Heathcote S.* DONUT: measuring optical aberrations from a single extrafocal image // *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*. 2006. Vol. 118 (846). Pp. 1165–1175.
3. *Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya.* Metody resheniya nekorrektnykh zadach. M.: Nauka, 1979.
4. *Engl H.W., Hanke M., Neubauer A.* Regularization of Inverse Problems. Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1996. 322 p.
5. *Sizikov V.S.* Matematicheskie metody obrabotki rezul'tatov izmerenij. SPb.: Politehnika, 2001. 240 p.
6. *Tihonov A.N., Goncharskij A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G.* Regularizuyushchie algoritmy i apriornaya informatsiya. M.: Nauka, 1983. 200 p.
7. *Aparcin A.S., Solodusha S.V., Tairov E.A.* Matematicheskie modeli nelinejnoy dinamiki na baze ryadov Vol'terra i ih prilozheniya // *Izv. RAEN. Ser. MMMIU*. 1997. T. 1. № 2. P. 115–125.
8. *Ganeev P.M.* Matematicheskie modeli v zadachah obrabotki signalov. M.: Goryachaya liniya – Telekom, 2002. 83 p.
9. *Batishchev V.I.* Approksimacionnyj podhod k obrabotke i interpretacii rezul'tatov rentgenodiffrakto-metricheskikh eksperimentov // *Problemy upravleniya i modelirovaniya v slozhnyh sistemah: Tr. VII Mezhdunar. konf. Samara: Samar. nauch. centr RAN*. 2005. P. 197–202.
10. *Batishhev V.I., Volkov I.I., Zolin A.G.* Sintez fil'trov dlya vosstanovleniya smazannykh izobra-zhenij s ispol'zovaniem metodov regularizatsii // *Problemy upravleniya i mode-lirovaniya v*

---

*Vitaly I. Batishchev (Dr. Sci. (Techn.)), Professor.*  
*Aleksey G. Zolin (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor.*

- slozhnykh sistemakh (PUMSS–2013): Trudy XV Mezhdunarodnoj konferentsii, IPUSS RAN. Samara, 2013. P. 615–618.*
11. *Batishhev V.I., Zolin A.G., Kosarev D.N., Romaneev A.E.* Approksimatsionnyj podkhod k resheniyu obratnykh zadach analiza i interpretatsii ehksperimental'nykh dannykh // *Vestnik SamGTU, ser. Tekhnicheskie nauki.* 2006. № 40. P. 57–65.
  12. *Batishhev V.I., Volkov I.I., Zolin A.G.* Ispol'zovanie stokhasticheskogo bazisa v zadachakh vosstanovleniya signalov i izobrazhenij // *Avtometriya.* 2017. № 4. P. 127–134.
  13. *Batishhev V.I., Volkov I.I., Zolin A.G.* Sintez tsifrovyykh KIKH-fil'trov dlya resheniya zadach vosstanovleniya signalov s ispol'zovaniem kriteriya momentov // *Vestnik SamGTU, ser. Tekhnicheskie nauki.* 2012. № 36. P. 98–105.
  14. *Batishhev V.I., Volkov I.I., Zolin A.G.* Sintez fil'trov dlya vosstanovleniya smazannykh izobrazheniy s ispol'zovaniyem metodov regulyarizatsii // *Problemy upravleniya i modelirovaniya v slozhnykh sistemakh (PUMSS–2013): Trudy XV Mezhdunarodnoj konferentsii, IPUSS RAN. Samara, 2013. P. 615–618.*
  15. *Batishchev V.I., Volkov I.I., Zolin A.G.* Sintez nelinejnykh adaptivnykh kih-fil'trov dlya resheniya obratnykh zadach vosstanovleniya signalov // *Vestnik SamGTU, ser. Tekhnicheskie nauki.* 2014. №43. P. 17–22.
  16. *Vasilenko G.I., Taratorin A.M.* Vosstanovlenie izobrazhenij. M.: Radio i svyaz', 1986. 304 p.
  17. *Sizikov B.C., Rimskikh M.V., Mirdzhamolov R.K.* Rekonstruktsiya smazannykh i zashumlennykh izobrazhenij bez ispol'zovaniya granichnykh uslovij // *Opticheskij zhurnal.* 2009. T. 76. № 5. P. 38–46.
  18. *Gonsales R., Vuds R.* Tsifrovaya obrabotka izobrazhenij: 3-e izd., isp. i dop. – M.: Tekhnosfera, 2012. 1104 p.
  19. *Kuznetsov P.K., Semavin V.I., Solodukha A.A.* Algoritm kompensatsii skorosti smaza izobrazheniya podstilayushhej poverkhnosti, poluchaemogo pri nablyudenii Zemli iz kosmosa // *Vestnik Sam. GTU,* 2005. № 37. P. 150–157.
  20. *Egoshkin N.A., Ereemeev V.V.* Korrektsiya smaza izobrazhenij v sistemakh kosmicheskogo nablyudeniya zemli // *TSifrovaya obrabotka signalov.* 2010. № 4. p. 28–32.
  21. *Kuznetsov P.K., Martem'yanov B.V., Myatov G.N., Yudakov A.A.* Metodika vychisleniya otse-nok parametrov smaza izobrazhenij, poluchaemykh tselevoj apparaturoj KAN tipa "Resurs" // *7-ya mezhdunarodnaya nauchno-tekhnicheskaya konferentsiya K.EH. TSiolkovskij – 160 let so dnya rozhdeniya.* Kosmonavtika. Radioehlektronika. Geoinformatika. Ryazan', 2017. P. 344–350.
  22. *Volkov I.I., Zolin A.G.* Reshenie dvumernoj obratnoj zadachi vosstanovleniya smazannogo izobrazheniya // *Vestnik SamGTU, ser. Tekhnicheskie nauki.* 2013. № 39. P. 223–226.
  23. *Avcibas I., Sankur B., Sayood K.* Statistical evaluating of image quality measures // *Journal of Electronic Imaging.* April 2002. Vol. 11. № 2. Pp. 206–223.