

УДК 517.977.56, 519.6, 621.785

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ИНДУКЦИОННОГО НАГРЕВАТЕЛЯ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ ЗАКАЛКИ В УСЛОВИЯХ ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПАРАМЕТРОВ*

А.В. Попов

Самарский государственный технический университет
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Аннотация. Работа посвящена оптимальному проектированию индукционной нагревательной установки для поверхностной закалки стальных цилиндрических деталей. Стадия нагрева поверхностной индукционной закалки рассматривается в качестве объекта с распределенными параметрами, для которого неизвестными оптимизируемыми параметрами являются конструктивные характеристики индуктора. Поскольку в реальных промышленных условиях часто информация об объекте известна не полностью, основные параметры могут задаваться с точностью до диапазона значений их возможных изменений. В работе формулируется задача оптимального проектирования нагревателя в условиях интервальной неопределенности начальной температуры обрабатываемой детали и комплексного коэффициента теплоотдачи с поверхности (учитывающего лучистый и конвективный теплообмен). Сформулированная задача решается с помощью альтернативного метода параметрической оптимизации систем с распределенными параметрами на базе численной модели процесса нагрева, разработанной в конечно-элементном программном пакете Altair FLUX.

Ключевые слова: поверхностная закалка, индукционный нагрев, оптимальное проектирование, альтернативный метод, интервальная неопределенность, численная модель, взаимосвязанные электромагнитные и тепловые поля, Altair FLUX.

Введение

Индукционная закалка в настоящее время широко используется в технологических процессах термической обработки металлов. Конечной целью индукционной закалки является получение определенных изменений в микроструктуре обрабатываемого материала с целью его упрочнения, повышения сопротивления изнашиванию или усталостному разрушению. Часто такие изменения структуры металла требуется получить по всему объему обрабатываемой детали, для чего применяется сквозная индукционная закалка. В случаях, когда необходимо упрочнить только поверхностный слой изделия без изменения свойств сердцевины, применяется поверхностная индукционная закалка [1].

В работе рассматривается процесс поверхностной индукционной закалки стальных заготовок, который в самом общем случае состоит из трех стадий: нагрева поверхностного слоя детали выше критической температуры аустенитного превращения, выдерживания для получения однородной аустенитной

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов №20-08-00240 и №19-08-00232.

Попов Антон Валерьевич, аспирант, старший преподаватель кафедры «Управление и системный анализ теплоэнергетических и социотехнических комплексов».

структуры и резкого охлаждения нагретого слоя ниже температуры образования мартенсита [2]. Основной целью поверхностной закалки является получение в обрабатываемом слое однородной мартенситной структуры равномерной глубины, которая зависит от равномерности нагрева границы закаливаемого слоя на первой стадии. Поэтому главной задачей стадии нагрева процесса поверхностной индукционной закалки можно считать получение максимальной равномерности температурного поля в закаливаемом слое заготовки.

Во многих случаях для обеспечения требуемого температурного профиля в упрочняемом слое оказывается недостаточным использование типовых индукционных нагревательных установок, поэтому актуальной становится задача оптимизации конструктивных характеристик индуктора. Кроме того, в реальных промышленных условиях точные значения основных характеристик процесса индукционной закалки практически всегда неизвестны, однако возможно определить некоторые диапазоны изменения их допустимых значений. В связи с этим существенный интерес приобретает задача оптимального проектирования индукторов для стадии нагрева процесса поверхностного упрочнения стальных деталей в условиях интервальной неопределенности основных параметров, которая решается в данной работе.

Постановка задачи оптимального проектирования в условиях интервальной неопределенности

В работе рассматривается задача оптимального проектирования двухвиткового индукционного нагревателя для реализации стадии нагрева поверхностной индукционной закалки стальных заготовок цилиндрической формы, неизвестными оптимизируемыми параметрами которой могут являться конструктивные параметры индукционной нагревательной установки и характеристики источника питания, объединенные в вектор \bar{P} [3]. В данном случае компонентами этого вектора являются: размер витка индуктора квадратного сечения ($p_1 \times p_1$), расстояние между заготовкой и индуктором (p_2), расстояние между витками (p_3) и ток источника питания ($p_4 = I$) (рис. 1).

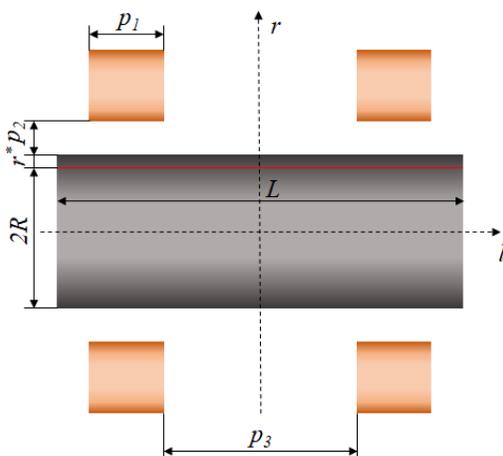


Рис. 1. Геометрия индукционной системы

На искомые параметры накладываются следующие ограничения:

$$p_{1min} \leq p_1 \leq p_{1max}, p_{2min} \leq p_2 \leq p_{2max}, p_{3min} \leq p_3 \leq p_{3max}, I_{min} \leq I \leq I_{max}. \quad (1)$$

Рассматриваемая стадия нагрева представляет собой объект с распределенными параметрами, функцией состояния которого является пространственно-временное распределение температуры по объему нагреваемой детали $T(r, l, t)$, описываемое двумерной системой нелинейных уравнений Максвелла и Фурье для электромагнитного и температурного полей [4–6]:

$$rot \bar{H} = \sigma(T) \bar{E}, \quad (2)$$

$$rot \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$div \bar{B} = 0, \quad (4)$$

$$div \bar{E} = 0, \quad (5)$$

$$c(T)\gamma(T)\frac{\partial T(r,l,t)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(T)r \frac{\partial T(r,l,t)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial l} \left(\lambda(T) \frac{\partial T(r,l,t)}{\partial l} \right) + \frac{1}{\sigma(T)} \left(\frac{\partial H(r,l,t)}{\partial r} \right)^2 \quad (6)$$

с начальными и граничными условиями:

$$T(r,l,t) = T(r,l,0) = T_0(r,l) = T_0 = const, l \in [0;L], r \in [0;R]; \quad (7)$$

$$\frac{\partial H(0,l,t)}{\partial r} = 0; H(R,l,t) = H_L; H(r,0,t) = H_{R1}; H(r,L,t) = H_{R2}; \quad (8)$$

$$\frac{\partial T(0,l,t)}{\partial r} = 0; \lambda(T) \frac{\partial T(R,l,t)}{\partial r} = \alpha(T)(T(R,l,t) - T_a); \quad (9)$$

$$\lambda(T) \frac{\partial T(r,0,t)}{\partial l} = \alpha(T)(T(r,0,t) - T_a);$$

$$\lambda(T) \frac{\partial T(r,L,t)}{\partial l} = \alpha(T)(T(r,L,t) - T_a). \quad (10)$$

Здесь \bar{H} – вектор напряженности магнитного поля;

\bar{B} – вектор магнитной индукции;

\bar{E} – вектор напряженности электрического поля;

$\sigma(T)$ – электрическая проводимость;

T – температура;

$c(T), \gamma(T), \lambda(T)$ – соответственно удельная теплоемкость, плотность и коэффициент теплопроводности нагреваемого металла;

– время;

$r \in [0;R], l \in [0;L]$ – соответственно радиальная и продольная пространственная координаты;

T_a – температура окружающей среды;

$\alpha(T)$ – коэффициент теплоотдачи в окружающую среду.

В качестве оценки точности достижения заданного равномерного распределения температуры по границе упрочняемого слоя глубиной r^* предлагается выбрать максимальную величину абсолютного отклонения температуры $T(R-r^*, l, t^0)$ вдоль этой границы в конце стадии нагрева длительностью t^0 от заданного значения T^* [7]. Обычно при закаливании сталей требуется нагреть поверхностный слой изделия до температур выше критических, необходимых для образования аустенита, которые в типовых случаях составляют 850–900 °C [1–2].

В соответствии с вышеизложенным в работе рассматривается следующий критерий оптимизации конструкции индукционной нагревательной установки:

$$I(\bar{P}) = \max_{l \in [0, L]} |T(R-r^*, l, t^0, \bar{P}) - T^*| \rightarrow \min_{\bar{P}} \quad (11)$$

при $T^* = 900^\circ\text{C}$.

Поскольку в данной задаче информация об объекте оказывается неполной и некоторые основные параметры задаются с точностью до возможного диапазона их изменения, минимизируемый критерий (11) принимает следующий вид:

$$I(\bar{P}) = \max_{\beta \in \Omega} \left| \max_{l \in [0, L]} |T(R-r^*, l, t^0, \bar{P}, \beta) - T^*| \right| \rightarrow \min_{\bar{P}} \quad (12)$$

где $\bar{\beta}$ – вектор неполностью определенных параметров [4–5].

В частном случае рассматриваемой в работе задачи с наличием интервальной неопределенности параметров стадии нагрева процесса поверхностной закалки к вектору $\bar{\beta}$ относятся: начальная температура закаливаемой детали T_0 и обобщенный коэффициент теплообмена с поверхности α (конвективного или лучистого), которые заданы с точностью до известных интервалов их изменения $[T_{0min}; T_{0max}]$ и $[\alpha_{min}; \alpha_{max}]$ соответственно, т. е.

$$\bar{\beta} = (T_0, \alpha); \Omega: T_{0min} \leq T_0 \leq T_{0max}, \alpha_{min} \leq \alpha \leq \alpha_{max}. \quad (13)$$

Таким образом, задача оптимального проектирования индуктора для стадии нагрева поверхностной индукционной закалки, описываемой уравнениями (2)–(6) с краевыми условиями (7)–(10), сводится к поиску таких значений вектора оптимизируемых параметров $\bar{P} = (p_1, p_2, p_3, I)$, стесненных ограничениями (1), которые обеспечивают нагрев границы закаливаемого поверхностного слоя заготовки толщиной r^* до требуемой температуры T^* за заданное время t^0 при минимальном значении критерия оптимальности (12) в условиях наличия интервальной неопределенности начальной температуры детали и коэффициента теплообмена (13).

Сформулированная задача оптимального проектирования может быть решена с помощью альтернативного метода параметрической оптимизации систем с распределенными параметрами.

Методика решения задачи оптимального проектирования с помощью альтернансного метода

Предлагаемая методика решения сформулированной задачи оптимального проектирования базируется на использовании альтернансного метода параметрической оптимизации систем с распределенными параметрами [4–5, 8–9]. Данный метод опирается на установленные универсальные свойства пространственных распределений температуры по объему заготовки в конце оптимальных процессов индукционного нагрева металла, подобные известным в математике свойствам наилучших приближений заданных функций к нулю. На этой основе производится процедура точной редукции исходной задачи оптимизации к решению трансцендентных систем уравнений, замкнутых относительно всех искомых параметров.

Оптимальным значениям параметров вектора $\bar{P}^0 = (p_1^0, p_2^0, p_3^0, \dots, p_N^0)$, являющихся решением рассматриваемой задачи оптимального проектирования при наличии полной информации об объекте, отвечает пространственное распределение температур $T(R-r^*, l, t^0, \bar{P}^0)$, которое должно соответствовать минимальному значению критерия оптимальности (11) [3]. Основное свойство результирующего температурного распределения $T(R-r^*, l, t^0, \bar{P}^0)$ состоит в том, что число K точек l_j^0 по объему нагреваемого тела (в данном случае вдоль рассматриваемого продольного сечения при $r=r^*$), в которых достигаются предельно допустимые абсолютные отклонения конечной температуры $T(R-r^*, l, t^0, \bar{P}^0)$ от требуемого значения T^* , равные ε_0 , всегда оказывается не меньше числа N искомых оптимизируемых параметров [4–5]. При этом максимально допустимые отклонения $T(R-r^*, l, t^0, \bar{P}^0) - T^*$ оказываются знакопередающимися в точках $l_j^0, j = \overline{1, K}$, где $0 \leq l_1^0 < l_2^0 < \dots < l_K^0 \leq L$, т. е. обладают альтернансным свойством. Причем для температурного отклонения в точках с неизвестными координатами $l_m^0, m = \overline{1, K_1} < K$ выполняются необходимые условия экстремума $\frac{\partial T(R-r^*, l, t^0, \bar{P}^0)}{\partial l} = 0$.

Вышеуказанные утверждения позволяют составить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} T(R-r^*, l_j^0, t^0, \bar{P}^0) - T^* = (-1)^j \psi \varepsilon_0, j = \overline{1, K}, \bar{P}^0 = (p_1^0, p_2^0, \dots, p_N^0), \psi = \pm 1; \\ 0 \leq l_1^0 < l_2^0 < \dots < l_K^0 \leq L; K = \begin{cases} N, & \text{если } \varepsilon_{\min}^{(N)} < \varepsilon_0 < \varepsilon_{\min}^{(N-1)} \\ N+1, & \text{если } \varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(N)} \end{cases}; \\ \frac{\partial T(R-r^*, l_m^0, t^0, \bar{P}^0)}{\partial l} = 0; m = \overline{1, K_1} < K. \end{cases} \quad (14)$$

Здесь $\varepsilon_{\min}^{(N)}$ – предельно достижимая точность нагрева в задачах с N оптимизируемыми параметрами.

Система уравнений (16) оказывается замкнутой относительно всех неизвестных, включая неизвестные параметры $p_1^0, p_2^0, \dots, p_N^0$, координаты $l_j^0, j = \overline{1, K}$ и значение $\varepsilon_{\min}^{(N)}$, поэтому ее решение и будет являться решением рассматриваемой задачи оптимального проектирования.

Поскольку в работе рассматривается вектор \bar{P} , содержащий четыре неизвестных конструктивных параметра индукционной нагревательной установки, оказывается, что конечное температурное распределение вдоль границы закаливаемого слоя толщиной r^* имеет пять точек с максимальным отклонением температуры от заданного значения (рис. 2).

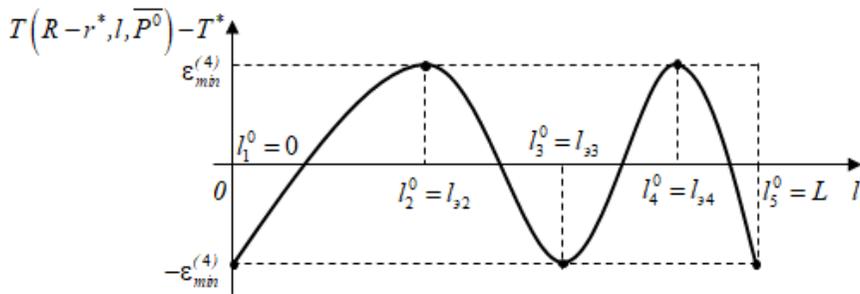


Рис. 2. Формы конечных температурных распределений для предельно достижимой точности нагрева $\bar{\varepsilon}_{\min}^{(4)}$

Очевидно, что данному температурному распределению соответствует максимально достижимая точность нагрева $\bar{\varepsilon}_{\min}^{(4)}$.

Система уравнений (14) в данном случае принимает следующий вид [3, 7]:

$$\left\{ \begin{array}{l} T(R - r^*, l_j^0, t^0, \bar{P}^0) - T^* = (-1)^j \varepsilon_{\min}^{(4)}, j = \overline{1, 5}, \bar{P}^0 = (p_1^0, p_2^0, p_3^0, p_4^0); \\ 0 \leq l_1^0 < l_2^0 < l_3^0 < l_4^0 < l_5^0 \leq L; \\ \frac{\partial T(R - r^*, l_m^0, t^0, \bar{P}^0)}{\partial l} = 0; m = \overline{2, 4}. \end{array} \right. \quad (15)$$

Рассмотрим теперь задачу оптимизации конструкции индукционного нагревателя в случае, когда информация об объекте неполная, т. е. основные параметры стадии нагрева заданы с точностью до возможных интервалов их допустимых значений.

Пусть согласно (13) имеется некоторый векторный параметр $\bar{\beta}$, который обозначает совокупность любых фиксированных значений не полностью определенных характеристик индукционной системы.

Сложность данной задачи по сравнению с задачей с полной информацией об объекте заключается в необходимости рассматривать максимум температурных

отклонений на множестве допустимых значений вектора $\bar{\beta}$ вместо пространственной координаты l . В [4] показано, что основные свойства конечного температурного поля, описанные в системе уравнений (16), распространяются и на рассматриваемую задачу с не полностью определенными характеристиками исследуемого объекта. Характерной особенностью данной задачи является то, что $T(\bar{\beta}, \bar{P})$ для каждого \bar{P} представляет собой не просто конечное температурное распределение, а совокупность таких распределений температуры по пространственной координате l для всех возможных реализаций неопределенных факторов T_0 и α .

Вышесказанное означает, что температурные максимумы и минимумы могут достигаться не только в конкретно заданной точке l_j^0 , а в разных точках заданного сечения нагреваемой заготовки для разных реализаций неопределенных факторов. Поскольку значения $T_{0,j}^0$ и α для каждой из точек l_j^0 заранее не определены, возникает проблема их поиска, а также установления формы температурных распределений $T(\bar{\beta}, \bar{P})$ на множестве значений $\bar{\beta}$ с целью записи расчетных систем уравнений альтернансного метода. Указанная проблема достаточно просто решается для типичных ситуаций, когда форма кривой в задаче с полным объемом информации $T(R-r^*, l, \bar{P})$ известна [4].

Пусть для данной задачи максимально достижимая точность нагрева обозначается через величину $\bar{\varepsilon}_{\min}^{(j)}, j = \overline{1, N^*}$. Тогда каждая из величин $\bar{\varepsilon}_{\min}^{(j)}$ будет определяться с помощью следующего выражения:

$$\bar{\varepsilon}_{\min}^{(j)} = \min_{\bar{P}} \left[\max_v \left| T(\bar{\beta}, \bar{P}) - T^* \right| \right]. \quad (16)$$

В данном случае $\bar{\varepsilon}_{\min}^{(j)}$ означает максимально достижимую точность нагрева заготовки в классе задач с j оптимизируемыми параметрами на всем множестве допустимых значений начальной температуры и коэффициента теплообмена.

Таким образом, методика решения рассматриваемой задачи с интервальной неопределенностью характеристик объекта может быть описана следующим образом.

На первом этапе решается задача в предположении, что максимально достижимая точность нагрева оказывается равной $\bar{\varepsilon}_{\min}^{(1)}$. Согласно [4] данное значение достигается при $N=1$, то есть при наличии одного неизвестного параметра вектора \bar{P} .

Форма кривой $T(R-r^*, l, \bar{P}^0)$ для всех возможных комбинаций значений T_0 и α для наиболее типового случая, когда тепловые потери с поверхности нагреваемого изделия довольно малы, показана на рис. 3.

Согласно (16) температурное распределение, соответствующее значению точности нагрева $\bar{\varepsilon}_{\min}^{(1)}$, имеет две точки $\beta_1 = (T_{01}^0, \alpha_1^0), l_1^0$ и $\beta_2 = (T_{02}^0, \alpha_2^0), l_2^0$ предельно допустимого отклонения температуры от заданной в конце оптимального процесса. Поскольку форма температурного распределения $T(R-r^*, l, \bar{P}^0)$ из-

вестна и имеет вид, показанный на рис. 3, то это означает, что известны и координаты точек с максимальным отклонением $l_1^0 = 0$ и $l_2^0 = l_{32}$ для любой фиксированной пары значений T_0 и α . Таким образом, остается только определить неизвестные значения T_{01}^0, α_1^0 и T_{02}^0, α_2^0 , а следовательно, и кривые, на которых достигаются температурные экстремумы в точках $l_1^0 = 0$ и $l_2^0 = l_{32}$ (рис. 4).

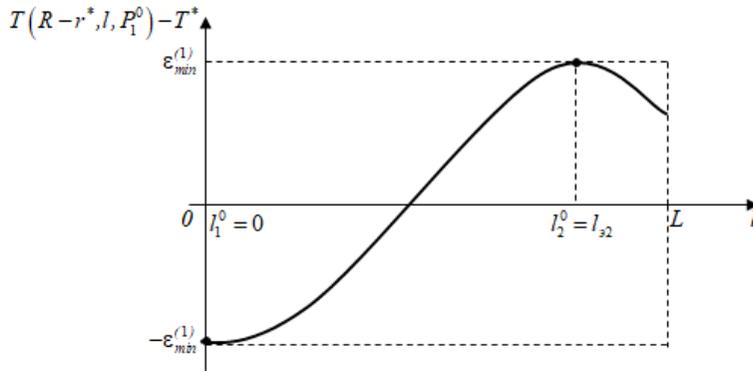


Рис. 3. Форма кривой $T(R-r^*, l, p_1^0)$ результирующего температурного распределения при точности нагрева $\bar{\varepsilon}_{\min}^{(1)}$

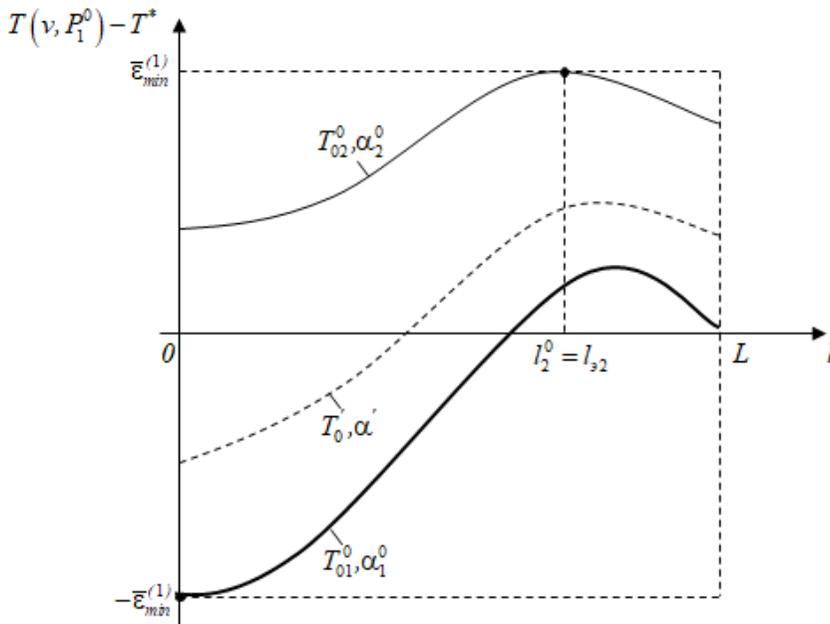


Рис. 4. Температурное распределение по пространственной координате l в конце оптимального по точности нагрева при наличии неполной информации о характеристиках объекта при $\varepsilon = \bar{\varepsilon}_{\min}^{(1)}$

Из показанного графика видно, что значения T_{01}^0, α_1^0 определяют верхнюю, а значения T_{02}^0, α_2^0 – нижнюю температурную кривую соответственно. Именно между этими условными границами и будут лежать остальные кривые температурных распределений, которые соответствуют всем другим, отличным от T_{01}^0, α_1^0 и T_{02}^0, α_2^0 , значениям, удовлетворяющим ограничениям (13).

Очевидно, что при одинаковой длительности оптимального процесса и значениях неизвестных параметров вектора \bar{P} для всей совокупности объектов максимум температуры в точке $l_2^0 = l_{22}$ достигается при максимально возможной начальной температуре заготовки и минимально возможном коэффициенте тепловых потерь. Минимуму температуры в точке $l_1^0 = 0$, напротив, соответствуют уже минимальная начальная температура и максимальный коэффициент тепловых потерь.

Таким образом, для точности нагрева $\varepsilon = \bar{\varepsilon}_{\min}^{(1)}$ получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} T(R - r^*, 0, T_{0\min}, \alpha_{\max}, p_1^0) - T^* = -\bar{\varepsilon}_{\min}^{(1)}; \\ T(R - r^*, l_2^0, T_{0\max}, \alpha_{\min}, p_1^0) - T^* = \bar{\varepsilon}_{\min}^{(1)}; \\ \frac{\partial T(R - r^*, l_2^0, T_{0\max}, \alpha_{\min}, p_1^0)}{\partial l} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Данная система оказывается замкнутой и может быть решена относительно всех неизвестных параметров процесса, к которым относятся p_1^0, l_2^0 и $\bar{\varepsilon}_{\min}^{(1)}$.

В случае, когда вектор конструктивных параметров \bar{P} имеет более одной компоненты, необходимо перейти к решению задачи для нового значения точности нагрева $\varepsilon < \bar{\varepsilon}_{\min}^{(1)}$. Для этого решают последовательность задач для ряда значений $\varepsilon = \varepsilon'$, уменьшающихся с малым шагом от $\bar{\varepsilon}_{\min}^{(1)}$. При этом для каждого значения точности нагрева необходимо задаваться формой температурного распределения, соответствующей данному значению. Подробно алгоритм решения данной задачи описан в [4].

Вновь принимая во внимание тот факт, что максимальная температура в конце оптимального процесса достигается при минимальном коэффициенте потерь и максимальной начальной температуре, а минимумы – при максимальном коэффициенте потерь и минимальной начальной температуре, для сформулированной задачи при $N=4$ можно составить расчетную систему уравнений альтернансного метода, подобно выражению (15).

Система (18), состоящая из восьми уравнений, вновь оказывается замкнутой относительно всех неизвестных параметров процесса, к которым относятся: четыре компонента вектора оптимизируемых конструктивных параметров \bar{P}^0 , три координаты точек с максимальным отклонением температуры от заданной l_2^0, l_3^0, l_4^0 и значение точности нагрева $\bar{\varepsilon}_{\min}^{(4)}$, и, следовательно, может быть решена относительно рассматриваемых неизвестных.

$$\left\{ \begin{array}{l} T\left(R-r^*, l_i^0, T_{0\min}, \alpha_{\max}, \overline{P^0}\right) - T^* = -\overline{\varepsilon}_{\min}^{(4)}, i=1,3,5; \\ T\left(R-r^*, l_j^0, T_{0\max}, \alpha_{\min}, \overline{P^0}\right) - T^* = \overline{\varepsilon}_{\min}^{(4)}, j=2,4; \\ \frac{\partial T\left(R-r^*, l_3^0, T_{0\min}, \alpha_{\max}, \overline{P^0}\right)}{\partial l} = 0, 0 = l_1^0 < l_2^0 < \dots < l_5^0 = L; \\ \frac{\partial T\left(R-r^*, l_k^0, T_{0\max}, \alpha_{\min}, \overline{P^0}\right)}{\partial l} = 0, k = \overline{2,4}. \end{array} \right. \quad (18)$$

Численное решение задачи и анализ полученных результатов

Для численного решения сформулированной задачи оптимального проектирования в программном пакете FLUX была разработана нелинейная двумерная модель индукционной нагревательной системы для закалки стальной цилиндрической заготовки [10–12]. Исходные данные для моделирования представлены в табл. 1.

Таблица 1

Исходные данные для построения модели

Параметр	Обозначение	Значение	Ед. изм.
Частота питающего тока	f	100000	Гц
Требуемая температура заготовки	T^*	900	°С
Температура окружающей среды	$T_{окр}$	20	°С
Начальная температура заготовки	T_0	20	°С
Количество витков индуктора	N	2	
Радиус заготовки	RB	14	мм
Длина заготовки	LB	32,9	мм
Время нагрева	t	8	с
Толщина закаливаемого слоя	r^*	4	мм
Материал заготовки		Сталь (С40) [13]	

Общий вид FLUX модели рассматриваемой индукционной нагревательной системы со сгенерированной конечно-элементной сеткой и результирующее температурное поле по длине заготовки показаны на рис. 5.

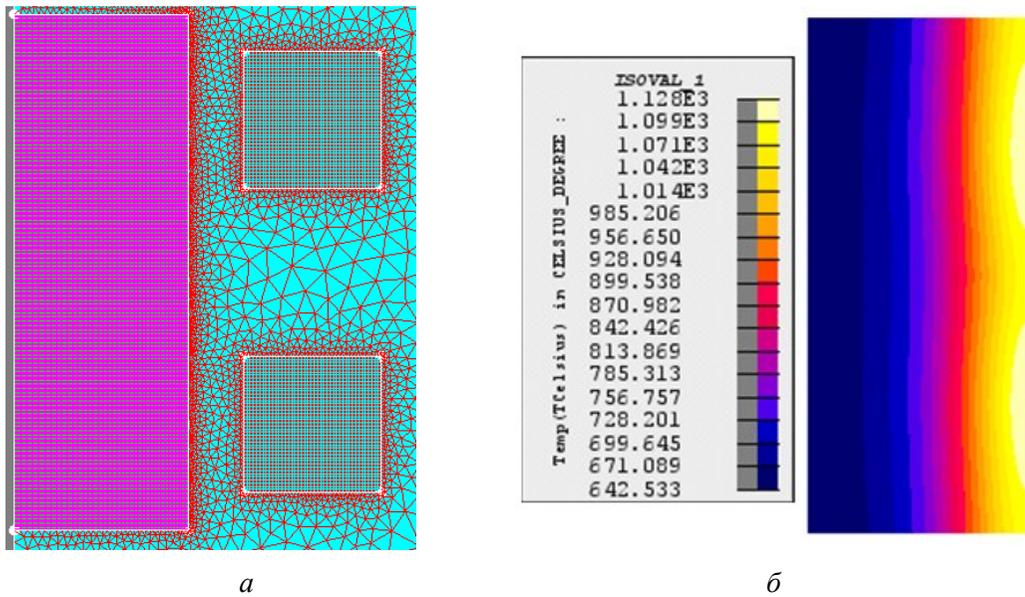


Рис. 5. Численная FLUX модель нагревательной системы
a – конечно-элементная сетка; *б* – температурное поле по длине заготовки
 в конце нагрева

Рассмотрим сначала решение задачи оптимального проектирования с полной информацией об объекте, когда начальная температура заготовки и коэффициент лучистого теплообмена принимают заранее известные фиксированные значения. В частном случае эти коэффициенты соответственно равны:

$$T_0 = 20^\circ\text{C}; \alpha_u = 0.85 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{C}^4}.$$

На неизвестные оптимизируемые параметры конструкции индукционной нагревательной установки накладываются следующие ограничения:

$$5 \leq p_1 \leq 15, 2 \leq p_2 \leq 10, 3 \leq p_3 \leq 15, 500 \leq I \leq 1500. \quad (19)$$

В табл. 2 приведены заданные начальные и оптимальные значения всех неизвестных параметров, найденные в результате решения системы уравнений (15).

Таблица 2

**Результаты решения задачи оптимального проектирования
 без учета интервальной неопределенности**

Параметр	p_1	p_2	p_3	I	$\varepsilon_{\min}^{(4)}$
Начальное значение	12 мм	3 мм	4,45 мм	1220 А	–
Оптимальное значение	11,9 мм	3 мм	4,4 мм	1382 А	11,5 °С

Температурное распределение вдоль границы закаливаемого слоя в конце стадии нагрева в индукционной нагревательной установке оптимальной конструкции показано на рис. 6.

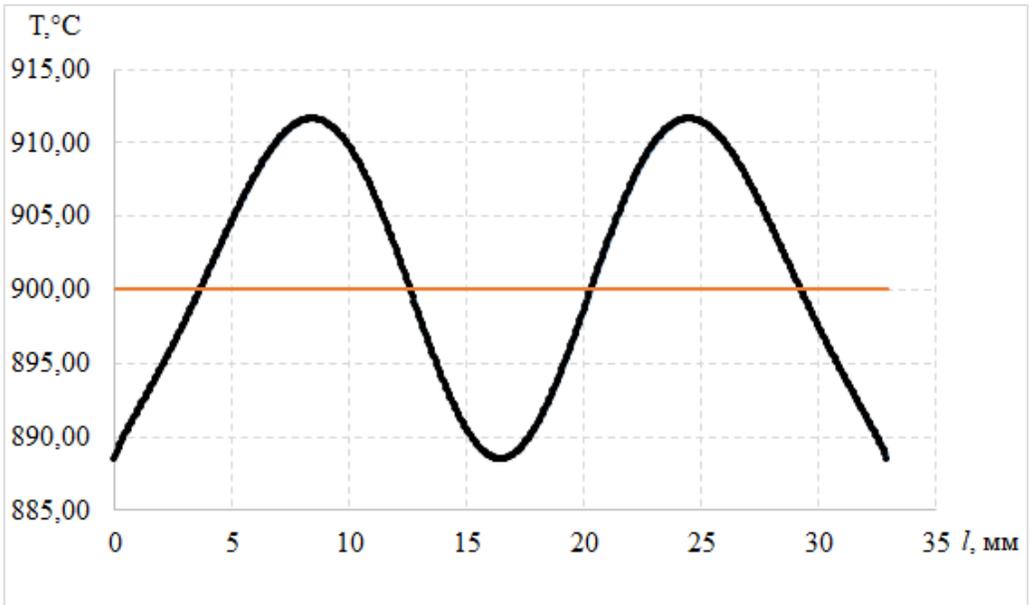


Рис. 6. Конечное температурное распределение вдоль границы закаливаемого слоя толщиной r^*

Отметим, что в [14] показано, что полученные при решении альтернативным методом результаты совпадают с результатами, найденными при использовании генетических алгоритмов оптимизации.

Рассмотрим теперь случай, когда начальная температура заготовки и коэффициент лучистого теплообмена задаются с точностью до следующих интервалов возможного изменения их значений:

$$0.5 \leq \alpha_u \leq 1.3; 15 \leq T_0 \leq 25. \quad (20)$$

Ограничения на оптимизируемые параметры дизайна индуктора, а также их начальные приближения совпадают со значениями, использованными при решении задачи с полным объемом информации об объекте.

Значения оптимизируемых параметров, найденные в результате решения системы уравнений (18), представлены в сравнении с решением задачи оптимального проектирования без учета интервальной неопределенности в табл. 3.

Таблица 3

Сравнение оптимальных значений конструктивных параметров индуктора в задаче с полной информацией об объекте и в условиях интервальной неопределенности

Параметр	p_1	p_2	p_3	I	$\varepsilon_{\min}^{(4)}$
Задача с полной информацией	11,9 мм	3 мм	4,4 мм	1382 А	11,5 $^\circ\text{C}$
Задача с интервальной неопределенностью	12,2 мм	3,6 мм	4,1 мм	1417 А	16,9 $^\circ\text{C}$

Как уже было отмечено, температурные максимумы и минимумы достигаются в точках $l_j^0, j = \overline{1,5}$, расположенных на границе закаливаемого слоя в разных сечениях нагреваемой заготовки, координаты которых зависят от конкретных

реализаций неопределенных факторов. При этом максимальные отклонения температуры от заданной достигаются при максимальном значении начальной температуры заготовки и минимальном значении коэффициента теплообмена, а минимальные температурные отклонения наблюдаются при минимальном значении температуры и максимальном значении коэффициента тепловых потерь.

Таким образом, в результате решения рассматриваемой задачи получены температурные распределения для сечений с точками максимума и минимума температуры (рис. 7).

На рис. 7 кривая 1 соответствует максимальной начальной температуре $T_{0max} = 25^{\circ}C$ и минимальному значению коэффициента потерь $\alpha_u = 0.5 \frac{Bm}{M^2 \cdot ^{\circ}C^4}$, кривая 2 – минимальной начальной температуре $T_{0max} = 15^{\circ}C$ и максимальному значению коэффициента потерь $\alpha_u = 1.3 \frac{Bm}{M^2 \cdot ^{\circ}C^4}$.

Сравнение полученных результатов с результатами, полученными при решении задачи оптимального проектирования с полным объемом информации (см. табл. 3), показало, что введение интервальной неопределенности привело к увеличению максимального отклонения температуры от требуемого на $5^{\circ}C$. Подобное снижение точности нагрева объясняется тем, что при решении задачи с не полностью определенными параметрами исследуемого объекта получены результаты, соответствующие наихудшей комбинации неопределенных факторов, к которым относятся начальная температура обрабатываемой заготовки и коэффициент тепловых потерь излучением.

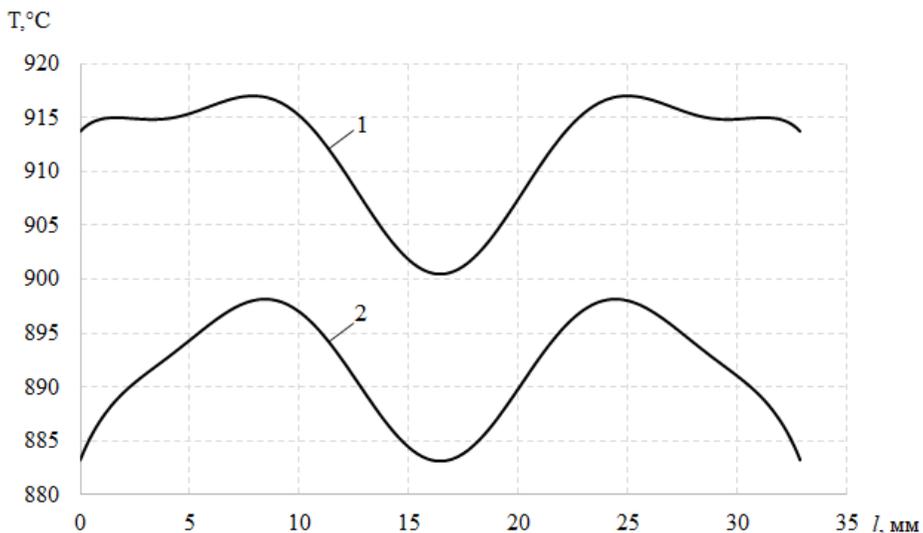


Рис. 7. Температурные распределения в задаче оптимального проектирования в условиях наличия интервальной неопределенности:

- 1 – в сечении с максимальными температурами;
- 2 – в сечении с минимальными температурами

Заключение

В работе рассмотрена задача оптимального проектирования нагревательной установки для реализации стадии нагрева процесса поверхностной индукционной закалки стальных заготовок в условиях интервальной неопределенности начальной температуры детали и коэффициента лучистого теплообмена. Предложена методика решения сформулированной задачи с помощью альтернативного метода параметрической оптимизации. Приведены результаты численных расчетов на базе двумерной численной модели, построенной в программном пакете Altair FLUX.

Представленные расчеты показали, что введение интервальной неопределенности приводит к увеличению максимального отклонения температуры вдоль границы закаливаемого слоя заготовки от требуемого значения на 5 °С, что составляет менее 1 % от заданной температуры 900 °С. Подобное снижение точности нагрева является допустимым для технологии индукционной закалки.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Rudnev V.I. et al.* Handbook of Induction Heating. New York, Basel: Marcel Dekker Inc., 2003. 797 p.
2. *Блантер М.Е.* Металловедение и термическая обработка. – М.: Машгиз, 1963. – 416 с.
3. *Плешивцева Ю.Э., Попов А.В., Попова М.А., Деревянов М.Ю.* Оптимальное проектирование индуктора для поверхностной закалки цилиндрических заготовок на основе численной двумерной модели // Вестн. Астрахан. гос. техн. ун-та. Серия «Управление, вычисл. техн. информ.» – 2019. – № 1. – С. 40–50.
4. *Рапопорт Э.Я., Плешивцева Ю.Э.* Оптимальное управление температурными режимами индукционного нагрева. – М.: Наука, 2012. – 309 с.
5. *Рапопорт Э.Я.* Оптимизация процессов индукционного нагрева металла. – М.: Металлургия, 1993. – 279 с.
6. *Плешивцева Ю.Э., Попов А.В., Дьяконов А.И.* Двумерная задача оптимального по типовым критериям качества управления процессом сквозного индукционного нагрева // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Технические науки. – 2014. – № 2 (42). – С. 148–163.
7. *Popov A.V.* Optimization of Heating Stage for Induction Hardening of Cylindrical Billets // 2019 XXI International Conference Complex Systems: Control and Modeling Problems (CSCMP). – Samara, Russia, 2019. – pp. 237–241.
8. *Рапопорт Э.Я.* Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. – М.: Высшая школа, 2009. – 678 с.
9. *Рапопорт Э.Я.* Альтернативный метод в прикладных задачах оптимизации. – М.: Наука, 2000. – 336 с.
10. Flux [Электронный ресурс]: сайт программного продукта FLUX. URL: www.altair.com/flux/ (дата обращения 01.09.2020).
11. *Шарипова О.Ю.* Численное моделирование процесса периодического индукционного нагрева на базе конечно-элементного программного пакета FLUX // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Технические науки. – 2011. – № 7 (28). – С. 180–185.
12. *Pleshivtseva Yu., Rogachev G., Popov A.* MATLAB-FLUX Coupling for numerical modeling in education // SHS Web of Conferences 29,02033 (2016).
13. Марочник сталей и сплавов. 2-е изд., доп. и испр. / А.С. Зубченко, М.М. Колосков, Ю.В. Каширский и др. Под общей ред. А.С. Зубченко. – М.: Машиностроение, 2003. – 784 с.

14. *Pleshivtseva Yu., Baldan M., Popov A., Nikanorov A., Rapoport E., Nacke B.* Effective methods for optimal design of induction coils on example of surface hardening // COMPEL – The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering, Vol. 39. No. 1, pp. 90–99. <https://doi.org/10.1108/COMPEL-05-2019-0216>.

Статья поступила в редакцию 1 июля 2020 г.

OPTIMAL INDUCTOR DESIGN FOR SURFACE HARDENING UNDER CONDITIONS OF INTERVAL UNCERTAINTY OF PROCESS PARAMETERS

A.V. Popov

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya str., Samara, Russian Federation

Abstract. *The paper is devoted to the optimal inductor design for surface hardening of steel cylindrical billets. The heating stage of surface induction hardening is considered as an object with distributed parameters, which unknowns are design characteristics of the induction installation. In real industrial conditions the main technological parameters are often defined by the intervals of their possible values. That is why, in the paper the optimal design problem under the conditions of interval uncertainty of initial billet's temperature and thermal exchange coefficient is formulated. Solution of the formulated problem is carried out by alternance method of parametric optimization based on numerical model developed in Altair FLUX software.*

Keywords: *surface hardening, induction heating, optimal design, alternance method, interval uncertainty, numerical model, electromagnetic and thermal fields, Altair FLUX.*

REFERENCES

1. *Rudnev V.I. et al.* Handbook of Induction Heating. – New York, Basel: Marcel Dekker Inc., 2003. – 797 p.
2. *Blanter M.E.* Metallovedenie i termicheskaya obrabotka [Metal science and heat treatment]. Moscow: Mashgiz, 1963. 416 s.
3. *Pleshivtseva Yu.E., Popov A.V., Popova M.A., Derevyanov M.Yu.* Optimalnoye proektirovaniye induktora dlya poverkhnostnoi zakalki tsilindricheskikh zagotovok na osnove chislennoi dvumernoi modeli [Optimal inductor design for surface hardening of cylindrical billets] // Bulletin of Astrakhan State Technical University. Series “Control, computer engineering, informatics”. – Astrakhan, 2019. – № 1. – pp. 40–50.
4. *Rapoport E.Ya., Pleshivtseva Yu.E.* Optimalnoye upravleniye temperaturami rezhimami induktsionnogo nagreva [Optimal control of induction heating processes]. Moscow: Nauka, 2012. 309 p.
5. *Rapoport E.Ya.* Optimizatsiya protsessov induktsionnogo nagreva metalla [Optimization of induction heating processes]. Moscow: Metallurgiya, 1993. 279 p.
6. *Pleshivtseva Yu.E., Popov A.V., Diakonov A.I.* Dvumernaya zadacha optimalnogo po tipovim kriteriyam kachestva upravleniya protsessom skvoznogo induktsionnogo nagreva [Two-dimensional problem of optimal with respect to typical quality criteria control of through induction heating processes] // Vestnik of Samara State Technical University. Technical Sciences Series. Samara, 2014. № 2(42). pp. 148–163.
7. *Popov A.V.* Optimization of Heating Stage for Induction Hardening of Cylindrical Billets // 2019 XXI International Conference Complex Systems: Control and Modeling Problems (CSCMP). – Samara, Russia, 2019. pp. 237–241.

Anton V. Popov, Senior Lecturer.

8. *Rapoport E.Ya.* Optimalnoe upravleniye sistemami s raspredelennimi parameterami [Optimal control of systems with distributed parameters]. – Moscow: Visshaya shkola, 2009. 678 p.
9. *Rapoport E.Ya.* Alternansniy metod v prikladnikh zadachakh optimizatsii [Alternance method in applied optimization problems]. Moscow: Nauka, 2000. 336 p.
10. Flux [electronic source]: www.altair.com/flux/ (accessed 01.09.2020).
11. *Sharapova O.Yu.* Chislennoye modelirovaniye protsessa periodicheskogo induktsionnogo nagreva na baze konechno-elementnogo programmnoy paketa FLUX [Numerical simulation of static induction heating process based on finite-element software FLUX] // Vestnik of Samara State Technical University. Technical Sciences Series. Samara, 2011. № 7 (28). pp. 180–185.
12. *Pleshivtseva Yu., Rogachev G., Popov A.* MATLAB-FLUX Coupling for numerical modeling in education // SHS Web of Conferences 29,02033 (2016).
13. *Marochnik staley i splavov 2-e izdaniye* [Grade guide of steels and alloys. Second edition] / A.S. Zubchenko, M.M. Koloskov, Yu. V. Kashirskiy et al. – Moscow: Mashinostroyeniye, 2003. 784 p.
14. *Pleshivtseva Yu., Baldan M., Popov A., Nikanorov A., Rapoport E., Nacke B.* Effective methods for optimal design of induction coils on example of surface hardening // COMPEL – The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering, Vol. 39 No. 1, pp. 90–99.