doi: 10.14498/tech.2023.4.1

# Информационные технологии и коммуникации

УДК 681.5

## ДВУХКАНАЛЬНОЕ ПРОГРАММНОЕ УПРАВЛЕНИЕ С МИНИМАЛЬНЫМ ЭНЕРГОПОТРЕБЛЕНИЕМ В СИСТЕМАХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ*

***Н.А. Ильина***

Самарский государственный технический университет
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

E-mail: ilina.natalyaa@yandex.ru

***Аннотация***. *Предлагается постановка и метод решения задачи оптимального по расходу энергии двухканального программного управления объектом с распределенными параметрами в условиях заданной точности равномерного приближения результирующего пространственного распределения управляемой величины к требуемому состоянию. В качестве управляющих воздействий рассматриваются два сосредоточенных внутренних управления по мощности источников тепла, возбуждаемых в электромагнитном поле индуктора. Предлагаемый подход к решению данной задачи использует специальную процедуру предварительной параметризации управляющих воздействий на конечномерных подмножествах финишных значений сопряженных переменных в краевой задаче принципа максимума Понтрягина и последующую редукцию к задаче полубесконечной оптимизации, решение которой относительно искомого вектора параметров находится с помощью альтернансного метода на основании дополнительной информации о фундаментальных закономерностях предметной области. Приводится пример энергосберегающего управления процессом периодического индукционного нагрева металлической заготовки.*

***Ключевые слова***: *оптимальное по расходу энергии управление, двухканальное управление, альтернансный метод, задача полубесконечной оптимизации, индукционный нагрев.*

### Введение

Целый ряд актуальных для приложений и представляющих самостоятельный интерес задач оптимального управления (ЗОУ) системами с распределенными параметрами (СРП) формулируется в условиях одновременного воздействия на объект по различным каналам управления с целью снижения показателей энергопотребления в процессах технологической теплофизики. Сказанное относится, в частности, к распространенным в технических системах ситуациям с использованием векторных управляющих воздействий. Во многих случаях постановка подобных задач, в частности задач двухканального управления, диктуется сами-

---

* *Наталья Андреевна Ильина, кандидат технических наук, инженер кафедры «Автоматика и управление в технических системах».*

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-29-00180, https://rscf.ru/project/22-29-00180/*

ми используемыми способами конструктивного исполнения промышленного объекта и методами организации технологического процесса [1–3]. Известные методы [2, 4] отыскания алгоритмов оптимального управления бесконечномерными объектами разработаны применительно к моделям управляемых процессов с одним управляющим воздействием. В связи с этим возникает актуальная задача применения разработанной технологии [5] получения алгоритмически точного решения задачи минимизации энергопотребления в процессе управления СРП параболического типа с двумя каналами управления.

**Постановка задачи оптимального управления**

В данной работе в качестве объекта управления рассматривается процесс нагрева металлической пластины с двумя сосредоточенными управляющими воздействиями $u_1(t)$ и $u_2(t)$ по мощности внутреннего тепловыделения с заданными функциями $W_1(x)$ и $W_2(x)$ его пространственного распределения.

В этом случае управляемая величина $Q(x,t)$ описывается в зависимости от пространственной координаты $x \in [0,1]$ и времени $t \in [0,T]$ линейным одномерным неоднородным уравнением теплопроводности в относительных единицах следующего вида [4]:

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} + W_1(x)u_1(t) + W_2(x)u_2(t) \quad (1)$$

с начальными

$$Q(x,0) = Q_0 = \text{const}\,,\ Q_0 \ge 0 \quad (2)$$

и типовыми граничными условиями

$$\begin{aligned} -\frac{\partial Q(0,t)}{\partial x} &= Bi_1\left(Q_{\text{env}}(t) - Q(0,t)\right), \quad t > 0; \\ \frac{\partial Q(1,t)}{\partial x} &= Bi_2\left(Q_{\text{env}}(t) - Q(1,t)\right), \quad t > 0, \end{aligned} \quad (3)$$

соответствующими конвективному характеру теплообмена с окружающей средой по закону Ньютона на границах пластины $x = 0$ и $x = 1$ с заданными значениями $Bi_1$ и $Bi_2$ критерия Био [4].

Начальное температурное распределение $Q_0$ в (2) принимается равномерным по всему объему пластины.

Температура окружающей среды $Q_{\text{env}}(t)$ в (3) принимается равной $Q_0$.

В (1) управляющие воздействия $u_1(t)$, $u_2(t)$ не стесняются дополнительными ограничениями.

В конце процесса управления, продолжительность которого $T$ задана, требуется обеспечить необходимую точность $\varepsilon > 0$ равномерного приближения конечного пространственного распределения управляемой величины $Q(x,T)$ по толщине пластины к требуемому состоянию $Q^*(x) = Q^* = \text{const} > Q_0$, которая оценивается в равномерной метрике в виде следующего неравенства [2, 6]:

$$\max_{x \in [0,1]} \left| Q(x,T) - Q^* \right| \le \varepsilon_0\,. \quad (4)$$

В качестве критерия оптимальности выступает расход энергии на процесс нагрева, который оценивается в виде следующего интегрального функционала:

$$I = \int_0^T \left( u_1^2(t) + u_2^2(t) \right) dt \to \min_{u_1(t),\, u_2(t)} . \qquad (5)$$

В рассматриваемой задаче оптимального управления требуется определить управляющие воздействия $u_1^*(t)$, $u_2^*(t)$, которые переводят объект управления (1)–(3) в требуемое конечное состояние (4) при минимальном значении критерия оптимальности (5).

**Модальное описание объекта управления**

Применение к начально-краевой задаче (1)–(3) конечного интегрального преобразования (КИП) по пространственной переменной приводит к эквивалентному (1)–(3) описанию ОРП бесконечной системой линейных дифференциальных уравнений первого порядка для временных мод $\overline{Q}_n(\mu_n, t)$ разложения $Q(x,t)$ в сходящийся в среднем ряд по ортонормированной с весом $r(x) = 1$ системе собственных функций $\varphi_n(\mu_n, x)$, определяемых вместе с собственными числами $\mu_n^2$ известными способами [7, 8]:

$$Q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{Q}_n(\mu_n, t)\varphi_n(\mu_n, x); \qquad (6)$$

$$\begin{gathered} \frac{d\overline{Q}_n(\mu_n, t)}{dt} = -\mu_n^2 \overline{Q}_n(\mu_n, t) + \overline{W}_{1n} u_1(t) + \overline{W}_{2n} u_2(t), \\ \overline{Q}_n(\mu_n, 0) = \overline{Q}^{(0)}(\mu_n), \quad n = 1, 2, ..., \end{gathered} \qquad (7)$$

где $\overline{W}_{1n}$, $\overline{W}_{2n}$ – моды конечного интегрального преобразования функций $W_1(x)$ и $W_2(x)$, определяемые соотношениями:

$$\overline{W}_{1n} = \int_0^1 W_1(\xi, x)\varphi_n(\mu_n, x)dx; \ \overline{W}_{2n} = \int_0^1 W_2(\xi, x)\varphi_n(\mu_n, x)dx. \qquad (8)$$

Собственные функции $\varphi_n(\mu_n, x)$ и собственные числа в (6)–(8) определяются следующими соотношениями [7, 8]:

$$\varphi_n(\mu_n, x) = \frac{1}{E_n} \cdot \left[ \cos(\mu_n x) + \frac{Bi_1}{\mu_n} \sin(\mu_n x) \right]; \ \ \mathrm{tg}\mu_n = \frac{Bi_1 + Bi_2}{\mu_n - \dfrac{Bi_1 \cdot Bi_2}{\mu_n}};$$

$$E_n^2 = \frac{1}{2\mu_n} \left[ \left( 1 + \frac{Bi_1^2}{\mu_n^2} \right) \mu_n + \left( 1 - \frac{Bi_1^2}{\mu_n^2} \right) \sin\mu_n \cos\mu_n + 2\frac{Bi_1}{\mu_n} \sin^2 \mu_n \right], \ n = 1, 2, \ldots$$

Интегрирование каждого из уравнений системы (7) независимо от других с последующей подстановкой результатов в (6) позволяет получить решение краевой задачи (1)–(3) в форме явной аналитической зависимости от внутренних управляющих воздействий $U(t) = \left( u_1(t), u_2(t) \right)$.

**Параметризованная форма оптимального программного управления**

На сформулированную бесконечномерную задачу оптимизации распространяется принцип максимума Понтрягина [2, 9]. Базовые условия достижения максимума функции Понтрягина на оптимальном управлении $U^*(t) = \left( u_1^*(t), u_2^*(t) \right)$ вместе с информацией о закономерностях оптимизируемых процессов в конкретной предметной области в целом ряде прикладных задач вполне определяют характер программных управляющих воздействий на участках их непрерывного изменения в форме явных зависимостей от управляемых и сопряженных переменных.

Функция Понтрягина $H\left(\overline{Q},U\left(t\right),\psi\left(t\right)\right)$ для рассматриваемой задачи оптимизации принимает согласно (7) следующий вид [9]:

$$H\left(\overline{Q},U\left(t\right),\psi\left(t\right)\right)=-\left(u_1^2\left(t\right)+u_2^2\left(t\right)\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\left(t\right)\left[-\mu_n^2\overline{Q}_n+\overline{W}_{1n}u_1\left(t\right)+\overline{W}_{2n}u_2\left(t\right)\right]. \quad (9)$$

Здесь $\overline{Q}=\left(\overline{Q}_n\left(\mu_n,t\right)\right)$, $U(t)=\left(u_1\left(t\right),u_2\left(t\right)\right)$ и вектор сопряженных переменных $\psi\left(t\right)=\left(\psi_n\left(t\right)\right)$, $n=1,2,...$ описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\psi_j}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial Q_j}=\mu_j^2\psi_j,\ j=1,2,..., \quad (10)$$

откуда следует, что $\psi\left(t\right)$ непосредственно определяется, согласно (10), в экспоненциальной форме с точностью до априори неизвестных значений $\psi_n\left(T\right)$, $n=1,2,...$:

$$\psi_n(t)=\psi_n(T)\cdot e^{-\mu_n^2(T-t)}. \quad (11)$$

Согласно основному утверждению принципа максимума, функция Понтрягина (11) достигает на соответствующих оптимальному процессу величинах $\overline{Q}^*\left(t\right)$, $U^*\left(t\right)$, $\psi^*\left(t\right)$ своего максимума по этим переменным именно при оптимальном управлении $U^*\left(t\right)$ в любой момент времени [9]:

$$H\left(\overline{Q}^*,U^*(t),\psi^*\left(t\right)\right)=\max_{U(t)}H\left(\overline{Q}^*,U\left(t\right),\psi^*\left(t\right)\right),\ t\in\left[0,T\right]. \quad (12)$$

В [10] предложен метод последовательной параметризации управляющих воздействий в ЗОУ СРП на конечномерных подмножествах величин $\psi\left(t\right)$, формируемых в виде *N*-мерных векторов $\psi^{(N)}=\left(\tilde{\psi}_n\right)$, $n=\overline{1,N}$ финишных значений $\tilde{\psi}_n=\psi_n\left(T\right)$ $N$ первых сопряженных функций (11) при равных нулю остальных величинах $\psi_n\left(T\right)$ для всех $n>N$. При двухканальном управлении векторы $\psi^{(N)}$ определяем для каждого из управляющих воздействий в отдельности, полагая в соответствии с методом в [10]

$$\psi^{(N_1)}=\left(\psi_{1n}\left(T\right)\right)=\left(\tilde{\psi}_{1n}\right),\ n=\overline{1,N_1},\ N_1\geq 1;\ \psi_{1n}(T)=0,\ n>N_1,$$

$$\psi^{(N_2)}=\left(\psi_{2n}\left(T\right)\right)=\left(\tilde{\psi}_{2n}\right),\ n=\overline{1,N_2},\ N_2\geq 1;\ \psi_{2n}\left(T\right)=0,\ n>N_2,$$

соответственно для управлений $u_1^*\left(t\right)$ и $u_2^*\left(t\right)$. Параметризуемое подобным образом оптимальное управление согласно базовому условию (12) описывается следующей, теперь уже конечной суммой экспонент:

$$u_k^*(t)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N_k}\tilde{\psi}_{kn}\overline{W}_{kn}e^{-\mu_n^2(T-t)},\ k=1,2. \quad (13)$$

Решение исходной задачи позволяет оценить максимальный эффект, достигаемый по критерию (5) в условиях свободы выбора управляющих воздействий $u_1\left(t\right)$, $u_2\left(t\right)$, если при этом $u_1^*\left(t\right)\geq 0$, $u_2^*\left(t\right)\geq 0$ для всех $t\in\left[0,T\right]$.

**Редукция к задаче полубесконечной оптимизации и ее решение альтернансным методом**

Интегрирование системы уравнений (7) с управляющими воздействиями (13) приводит к линейной зависимости модальных переменных от $\psi^{(N_1)}=\left(\tilde{\psi}_{1n}\right)$, $n=\overline{1,N_1}$; $\psi^{(N_2)}=\left(\tilde{\psi}_{2n}\right)$, $n=\overline{1,N_2}$:

$$\begin{gathered}\overline{Q}_n\left(\psi_1^{(N_1)},\psi_2^{(N_2)},t\right)=\frac{\overline{W}_{1n}}{2}\sum_{i=1}^{N_1}\frac{\tilde{\psi}_{1i}\overline{W}_{1i}}{\mu_n^2+\mu_i^2}e^{-\mu_i^2T}\left(e^{\mu_i^2t}-e^{-\mu_n^2t}\right)+\\+\frac{\overline{W}_{2n}}{2}\sum_{i=1}^{N_2}\frac{\tilde{\psi}_{2i}\overline{W}_{2i}}{\mu_n^2+\mu_i^2}e^{-\mu_i^2T}\left(e^{\mu_i^2t}-e^{-\mu_n^2t}\right).\end{gathered}\tag{14}$$

Последующая подстановка этого результата в (6) для $t=T$ определяет в явной форме линейную по $\psi_1^{(N_1)}$, $\psi_2^{(N_2)}$-параметризованную зависимость $Q(x,T)$

$$Q\left(x,\psi_1^{(N_1)},\psi_2^{(N_2)}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{E_n}\left(\cos(\mu_nx)+\frac{Bi_1}{\mu_n}\sin(\mu_nx)\right)\cdot\overline{Q}_n\left(\psi_1^{(N_1)},\psi_2^{(N_2)},T\right)\tag{15}$$

и приводит к представлению требования к конечному состоянию управляемой величины (4) и критерия оптимальности (5) в форме явных зависимостей соответственно $Q\left(x,\psi_1^{(N_1)},\psi_2^{(N_2)}\right)$ и $I\left(\psi_1^{(N_1)},\psi_2^{(N_2)}\right)$ от своих аргументов:

$$\Phi\left(\psi_1^{(N_1)},\psi_2^{(N_2)}\right)=\max_{x\in[x_0,x_1]}\left|Q\left(x,\psi_1^{(N_1)},\psi_2^{(N_2)}\right)-Q^*(x)\right|\le\varepsilon,\tag{16}$$

$$I\left(\psi_1^{(N_1)},\psi_2^{(N_2)}\right)\to\min_{\psi_1^{(N_1)},\psi_2^{(N_2)}}.\tag{17}$$

В результате осуществляется точная редукция исходной задачи оптимального управления (1)–(7) к задаче полубесконечной оптимизации (ЗПО) (16), (17) на экстремум функции (17) конечного числа переменных $\psi_1^{(N_1)}=\left(\tilde{\psi}_{1n}\right)$, $n=\overline{1,N_1}$; $\psi_2^{(N_2)}=\left(\tilde{\psi}_{2n}\right)$, $n=\overline{1,N_2}$ в (13) с бесконечным числом диктуемых требованием (4) ограничений для всех $x\in[x_0,x_1]$, эквивалентных одному ограничению на функцию максимума в (16).

Задача (16), (17) разрешима не при всех величинах $\varepsilon$, а только для $\varepsilon\ge\varepsilon_{\min}^{(N_1,N_2)}$ в (16):

$$\varepsilon_{\min}^{(N_1,N_2)}=\min_{\psi_1^{(N_1)},\psi_2^{(N_2)}}\left\{\max_{x\in[x_0,x_1]}\left|Q\left(x,\psi_1^{(N_1)},\psi_2^{(N_2)}\right)-Q^*(x)\right|\right\},\tag{18}$$

где $\varepsilon_{\min}^{(N_1,N_2)}$ – минимально достижимая ошибка равномерного приближения $Q\left(x,\psi_1^{(N_1)},\psi_2^{(N_2)}\right)$ к $Q^*(x)$ в рассматриваемом классе управлений (13), и значения $\varepsilon_{\min}^{(N_1,N_2)}$ монотонно убывают с ростом размерности $N_1$ и $N_2$ [6]:

$$\begin{gathered}\varepsilon_{\min}^{(1,1)}>\varepsilon_{\min}^{(2,2)}>\ldots>\varepsilon_{\min}^{(\xi-1,\xi-1)}>\max\left(\varepsilon_{\min}^{(\xi-1,\xi)},\varepsilon_{\min}^{(\xi,\xi-1)}\right)\ge\min\left(\varepsilon_{\min}^{(\xi-1,\xi)},\varepsilon_{\min}^{(\xi,\xi-1)}\right)>\\>\varepsilon_{\min}^{(\xi,\xi)}>\ldots>\varepsilon_{\min}^{(\rho,\rho)}=\varepsilon_{\inf}\ge0.\end{gathered}$$

Согласно установленному в [10] принципу минимальной сложности параметризуемых в соответствии с (13) структур оптимальных программных управлений, размерность $N_1$ и $N_2$ векторов $\psi_1^{(N_1)}$, $\psi_2^{(N_2)}$, характеризующих управления $u_1^*(t)$, $u_2^*(t)$ в (13), определяется местом заданного достижимого значения $\varepsilon$ в (4) в этой цепочке неравенств в соответствии с одним из правил:

$$N_1 = N_2 = w, \text{ если } \varepsilon_{\min}^{(w,w)} \le \varepsilon < \min\left(\varepsilon_{\min}^{(w-1,w)}, \varepsilon_{\min}^{(w,w-1)}\right); \qquad (19)$$

$$N_1 = w,\ N_2 = w-1, \text{ если } \varepsilon_{\min}^{(w,w-1)} \le \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(w-1,w)} \text{ или } \varepsilon_{\min}^{(w-1,w)} < \varepsilon_{\min}^{(w,w-1)} \le \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(w-1,w-1)};$$

$$N_1 = w-1,\ N_2 = w, \text{ если } \varepsilon_{\min}^{(w-1,w)} \le \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(w,w-1)} \text{ или } \varepsilon_{\min}^{(w,w-1)} < \varepsilon_{\min}^{(w-1,w)} \le \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(w-1,w-1)}.$$

Решение ЗПО (16), (17) может быть получено по схеме альтернансного метода [2, 6, 11, 12], являющегося развитием теории нелинейных чебышевских приближений [13] применительно к задачам полубесконечной оптимизации и базирующегося на специальных альтернансных свойствах $\psi_1^{(N_1)}$, $\psi_2^{(N_2)}$, согласно которым в условиях малостеснительных допущений в некоторых точках $x_j^0 \in [0,1]$, $j = \overline{1,R}$ достигаются предельно допустимые значения $\Phi\left(\psi_1^{(N_1)}, \psi_2^{(N_2)}\right)$, равные $\varepsilon$:

$$\left| Q\left(x_j^0, \psi_1^{(2)}, \psi_2^{(2)}\right) - Q^*\left(x_j^0\right) \right| = \varepsilon,\ j = \overline{1,R}. \qquad (20)$$

Основное свойство заключается в том, что число $R$ этих точек оказывается равным числу всех неизвестных задач (16), (17), включая все компоненты векторов $\psi_1^{(N_1)} = \left(\tilde{\psi}_{1n}\right)$, $n = \overline{1,N_1}$; $\psi_2^{(N_2)} = \left(\tilde{\psi}_{2n}\right)$, $n = \overline{1,N_2}$ при заданной величине $\varepsilon$ в случае $\varepsilon > \varepsilon_{\min}^{(N_1,N_2)}$ в (19) и наряду с ними априори неизвестную величину минимакса $\varepsilon_{\min}^{(N_1,N_2)}$, определяемую согласно (18), если $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(N_1,N_2)}$ [11]. Применительно к типичному варианту (19) с одинаковым числом переключений $N_1 = N_2 = N = 2$ двухканального управления при $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2,2)}$ получаем, что число $R$ точек альтернанса определяется в виде

$$R = \begin{cases} N_1 + N_2, & \text{если } \varepsilon > \varepsilon_{\min}^{(N_1,N_2)}; \\ N_1 + N_2 + 1, & \text{если } \varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(N_1,N_2)}. \end{cases} \qquad (21)$$

Типичные технологические требования в рассматриваемой задаче сводятся к достижению удовлетворительной по величине $\varepsilon$ в (4) точности нагрева с помощью управляющих воздействий самой простой из возможных в этих условиях (и, следовательно, легче всего реализуемой) структуры с выбором векторов $\psi_1^{(N_1)}$, $\psi_2^{(N_2)}$ минимальной размерности.

Так, в большинстве случаев в прикладных задачах оптимального быстродействия ограничиваются вариантом двухинтервальных управляющих воздействий релейной формы (режим «включить-выключить») с выбором $N_1 = N_2 = N = 2$ в (21). В рассматриваемом случае каждое из программных управляющих воздействий $u_1^*(t)$, $u_2^*(t)$ определяется двумя искомыми параметрами $\psi_1^{(N_1)} = \left(\tilde{\psi}_{11}, \tilde{\psi}_{12}\right)$, $\psi_2^{(N_2)} = \left(\tilde{\psi}_{21}, \tilde{\psi}_{22}\right)$ и, полагая $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2,2)}$ в (20), получим в (21):

$$R = N_1 + N_2 + 1 = 5. \qquad (22)$$

Таким образом, соотношения (20) с учетом (21) оказываются замкнутыми относительно всех параметров процесса управления: $\psi^{(N)} = \left(\tilde{\psi}_{11}, \tilde{\psi}_{12}, \tilde{\psi}_{21}, \tilde{\psi}_{22}\right)$, $\varepsilon_{\min}^{(2,2)}$.

Основное затруднение теперь состоит в том, что равенствам (20) формально соответствует множество вариантов по форме кривой пространственного распределения. Для однозначного определения вида этой кривой нужно установить знаки разностей $Q\left(x_j^0, \psi^{(N)}\right) - Q^*\left(x_j^0\right)$ в каждом из уравнений и найти координаты точек $x_j^0$. Эта задача может быть решена только при известной конфигурации кривой температурного распределения $Q\left(x_j^0, \psi^{(N)}\right) - Q^*\left(x_j^0\right)$ на отрезке $x \in [x_0, x_1]$ при двухканальном оптимальном управлении по мощности источников тепла, устанавливаемой на основании физических закономерностей процессов нестационарной теплопроводности в зависимости от величины $\varepsilon$ [2, 11].

В качестве примера рассматривается процесс индукционного нагрева пластины из титановых сплавов при [4]:

$$W_1(\xi, x) = \frac{\mathrm{ch}\left(\sqrt{2}\xi x\right) - \cos\left(\sqrt{2}\xi x\right)}{\mathrm{sh}\left(\sqrt{2}\xi\right) - \sin\left(\sqrt{2}\xi\right)}\sqrt{2}\xi\,;\; W_2(\xi, x) = W_1(\xi, 1 - x),$$

где $\xi$ – характерный параметр, вычисляемый по формулам:

$$\xi = \frac{x_1\sqrt{2}}{\delta},\; \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma}}\,.$$

Здесь $x_1$ – толщина пластины; $\delta$ – глубина проникновения тока в металл; $\omega$ – частота питающего тока; $\sigma$ – электропроводность нагреваемого материала; $\mu$ – абсолютная магнитная проницаемость.

Физические закономерности процесса индукционного нагрева приводят в данном случае подобно [4, 14] к показанной на рис. 1 форме кривой пространственного распределения на отрезке $x \in [0,1]$, соответствующей системе в следующем однозначно устанавливаемом виде:

$$\begin{aligned}
&Q\left(0, \psi^{(N)}\right) - Q^* = -\varepsilon_{\min}^{(2,2)}; \quad &&Q\left(x_4^0, \psi^{(N)}\right) - Q^* = \varepsilon_{\min}^{(2,2)};\\
&Q\left(x_2^0, \psi^{(N)}\right) - Q^* = \varepsilon_{\min}^{(2,2)}; \quad &&Q\left(1, \psi^{(N)}\right) - Q^* = -\varepsilon_{\min}^{(2,2)};\\
&Q\left(x_3^0, \psi^{(N)}\right) - Q^* = -\varepsilon_{\min}^{(2,2)}; \quad &&\frac{\partial Q\left(x_j^0, \psi^{(N)}\right)}{\partial x} = 0,\; j = 2,3,4.
\end{aligned} \tag{23}$$

Решение этой линейной по $\psi^{(N)}$ системы восьми уравнений относительно восьми неизвестных (финишных значений сопряженных переменных программных управлений $\tilde{\psi}_{11}$, $\tilde{\psi}_{12}$, $\tilde{\psi}_{21}$, $\tilde{\psi}_{22}$; величины $\varepsilon_{\min}^{(2,2)}$ и координат $x_j^0$, $j = 2,3,4$ точек достижения предельно допустимых отклонений $Q\left(x_j^0, \psi^{(N)}\right)$ от $Q^*\left(x_j^0\right)$) известными численными методами [15] и при учете достаточно большого числа членов сходящегося ряда в (15) исчерпывает решение исходной задачи оптимального управления с требуемой точностью.

Некоторые расчетные результаты, полученные для значений $\xi = 4$, $Bi_1 = Bi_2 = 0.5$, $Q^* = 0.5$, представлены на рис. 1 и рис. 2.

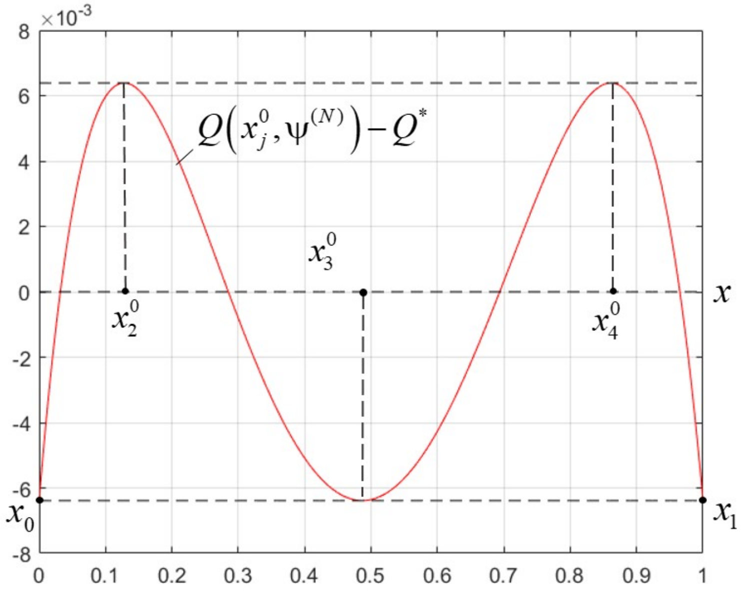


Рис. 1. Температурное распределение в конце оптимального процесса для случая $T = 0.95$ ($\varepsilon_{\min}^{(2,2)} = 0.0064$; $x_2^0 = 0.13$; $x_3^0 = 0.49$; $x_4^0 = 0.86$)

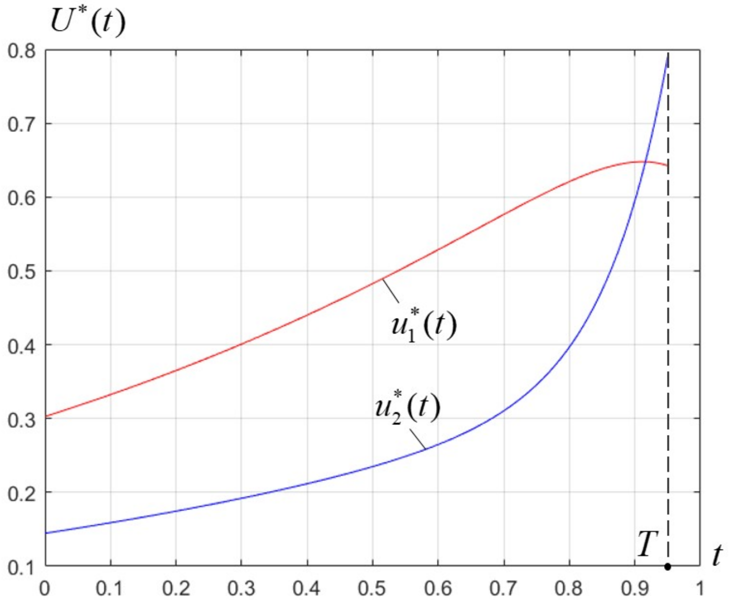


Рис. 2. Программные оптимальные управления, построенные по (17) с найденными значениями сопряженных переменных: $\tilde{\psi}_{11} = 1.51$, $\tilde{\psi}_{12} = 0.19$, $\tilde{\psi}_{21} = 0.72$, $\tilde{\psi}_{22} = 0.77$

**Заключение**

Разработанная в (5) конструктивная технология решения краевых задач оптимального по расходу энергии управления СРП параболического типа в условиях оценки в равномерной метрике ограничений на конечные состояния объекта распространена на двухканальный характер программного управления. Получаемые результаты могут быть использованы для решения достаточно широкого круга актуальных проблем разработки энергосберегающих алгоритмов управления, в том числе применительно к представляющим самостоятельный интерес задачам оптимизации по энергопотреблению объектов технологической теплофизики.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК


1. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 588 с.
2. *Рапопорт Э.Я.* Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. М.: Высшая школа, 2009.
3. *Рей У.* Методы управления технологическими процессами. М.: Мир, 1983. 368 с.
4. *Рапопорт Э.Я., Плешивцева Ю.Э.* Оптимальное управление температурными режимами индукционного нагрева. М.: Наука, 2012.
5. *Плешивцева Ю.Э., Рапопорт Э.Я.* Программное управление с минимальным энергопотреблением в системах с распределенными параметрами // Известия РАН. Теория и системы управления, 2020. № 4. С. 42–57.
6. *Рапопорт Э.Я., Плешивцева Ю.Э.* Методы полубесконечной оптимизации в прикладных задачах управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 2021. 286 с.
7. *Рапопорт Э. Я.* Структурное моделирование объектов и систем с распределенными параметрами. М.: Высшая школа, 2003. 299 с.
8. *Мартыненко Н.А., Пустыльников Л.М.* Конечные интегральные преобразования и их применение к исследованию систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1986, 303 с.
9. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
10. *Плешивцева Ю.Э., Рапопорт Э.Я.* Метод последовательной параметризации управляющих воздействий в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами // Известия РАН. Теория и системы управления, 2009. № 3. С. 22–33.
11. *Рапопорт Э.Я.* Альтернансный метод в прикладных задачах оптимизации. – М.: Наука, 2000.
12. *Плешивцева Ю.Э.* Последовательная параметризация управляющих воздействий и полубесконечная оптимизация алгоритмов управления технологическими объектами с распределенными параметрами: дис. д-ра техн. наук. Самара, 2009. 416 с.
13. *Коллатц Л., Крабс В.* Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения. М.: Наука, 1978. 272 с.
14. *Ilina N.* Parametric Optimization of Nonstationary Heat Conductivity Processes with Two Control Actions // XXI International Conference Complex Systems: Control and Modeling Problems (CSCMP), Samara, Russia, 2019. Pp. 271–276.
15. Численные методы: учеб. и практикум для академ. бакалавриата / под ред. У.Г. Пирумова. М.: Юрайт, 2017. 421 с.


*Статья поступила в редакцию 20 ноября 2023 г.*

# TWO-CHANNEL OPTIMAL ENERGY-EFFICIENT CONTROL OF DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS*

*N.A. Ilina*

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

E-mail: ilina.natalyaa@yandex.ru

***Abstract***. *A formulation and method for solving the problem of the energy-efficient two-channel programmed control of an object with distributed parameters with a given-precision uniform approximation of the resulting spatial distribution of the controlled quantity to the required state is proposed. Two internal controls on the power of heat sources in the electromagnetic field of the inductor are considered as control actions. Proposed solution approach involves a special-form preliminary parametrization procedure for control actions on finite-dimensional subsets of the terminal values of conjugate variables in the boundary-value problem of Pontryagin's maximum principle, in combination with the subsequent reduction to a semi-infinite optimization problem, which is solved with respect to the requisite parameter vector using the alternance method based on additional information about fundamental laws of the subject area. An example of optimal energy-efficient control of transient heat conduction, which is of independent interest, is given.*

***Keywords***: *optimal energy-efficient control, two-channel control, alternance method, semi-infinite optimization, induction heating.*

REFERENCES

1. *Butkovskii A.G.* Teoriya optimal'nogo upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami [Optimal Control Theory of Distributed Parameter Systems]. M.: Nauka, 1965. 474 p. (In Russian).
2. *Rapoport E.Ya.* Optimal'noe upravlenie sistemami s raspredelennymi parametrami [Optimal Control for Systems with Distributed Parameters]. M.: Vyssh. Shkola, 2009. 677 p. (In Russian).
3. *Ray W.H.* Advanced Process Control. New York, McGraw-Hill, 1981. 368 p.
4. *Rapoport E.Ya., Pleshivtseva Yu.E.* Optimal'noe upravlenie temperaturnumi regimami induktsionnogo nagreva [Optimal Control of Induction Heating Processes]. M.: Nauka, 2012. 309 p. (In Russian).
5. *Pleshivtseva Yu.E., Rapoport E.Ya.* Optimal Energy-Efficient Programmed Control of Distributed Parameter Systems // Izvestiya RAN. Teoriya i sistemami upravleniya, 2020. No. 4. Pp. 42–57. (In Russian).
6. *Rapoport E.Ya., Pleshivtseva Yu.E.* Metody polubeskonechnoy optimizatsii v prikladnyh zadachakh upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami [Methods of semi-infinite optimization in applied problems of control of systems with distributed parameters]. M.: Nauka. 2021. 286 p. (In Russian).
7. *Rapoport E.Ya.* Strukturnoe modelirovanie ob'ektov i sistem upravleniya s raspredelennimi parametrami [Structural modeling of objects and systems with distributed parameters]. M.: Visshaya shkola, 2003. 299 p. (In Russian).
8. *Martynenko N.A., Pustylnikov L.M.* Konechnye integralnye preobrazovaniya i ih primenenie k issledovaniju sistem s raspredelennymi parametrami [Final engineering transformations and its application to the study of systems with distributed parameters]. M.: Nauka, 1986. 303 p. (In Russian).

---

*Natalya A. Ilina (Ph.D. (Techn.)), engineer.*
*The study was supported by the Russian Science Foundation, grant no. 22-29-00180, https://rscf.ru/en/project/22-29-00180/*

9. *Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Gamkrelidze R.V., Mischenko E.F.* Matematicheskaya teoriya optimalnykh protsessov [Mathematical theory of optimal processes]. M.: Nauka, 1969. 384 p. (In Russian).
10. *Pleshivtseva Yu.E., Rapoport E.Ya.* Method of sequential parameterization of control actions in boundary value problems of optimal control of systems with distributed parameters // Izvestiya RAN. Teoriya i sistemami upravleniya, 2009. No. 3. Pp. 22–33. (In Russian).
11. *Rapoport E.Ya*. Al'ternansnyy metod v prikladnykh zadachakh optimizatsii [Alternance Method for Solving Applied Optimization Problems]. M.: Nauka, 2000. 336 p. (In Russian).
12. *Pleshivtseva Yu.E.* Posledovatel'naya parametrizaciya upravlyayushchih vozdejstvii i polubeskonechnaya optimizatsiya algoritmov upravleniya tekhnologicheskimi ob'ektami s raspredelennymi parametrami. Diss. … dokt. techn. nauk. Samara, 2009. Pp. 416. (In Russian).
13. *Collatz L., Krabs W.* Teoriya priblizhenii. Chebyshevskie priblizheniya i ih prilozheniya [The theory of approximations. Chebyshev approximations and its applications]. M.: Nauka, 1978. 271 p. (In Russian).
14. *Ilina N.* Parametric Optimization of Nonstationary Heat Conductivity Processes with Two Control Actions // XXI International Conference Complex Systems: Control and Modeling Problems (CSCMP). Samara. Russia, 2019. Pp. 271–276.
15. *Pirumov U.G.* Chislennye metody: uchebnik i praktikum dlya akademicheskogo bakalavriata [Numerical Methods: textbook and workshop for academic undergraduate studies]. M.: Urait, 2017. Pp. 421. (In Russian).