

УДК 681.5

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОЙ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ СИСТЕМЫ ДВУХКАНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ ИНДУКЦИОННОГО НАГРЕВА НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАСТИНЫ*

Н.А. Ильина

Самарский государственный технический университет
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

E-mail: ilina.natalyaa@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается задача построения замкнутой оптимальной по быстродействию системы управления линейным объектом с распределенными параметрами параболического типа с двумя сосредоточенными внутренними управлениями по мощности источников тепла, возбуждаемых в электромагнитном поле индуктора. Предлагаемый способ синтеза оптимальных регуляторов использует альтернансный метод расчета оптимальных программных управлений для каждого из управляющих воздействий. Приводится пример построения квазиоптимальной по быстродействию системы управления процессом периодического индукционного нагрева металлической заготовки с постоянными значениями коэффициентов обратной связи, рассчитанными для наиболее характерного начального пространственного температурного распределения.

Ключевые слова: оптимальное управление, синтез оптимального регулятора, двухканальное управление, альтернансный метод, задача полубесконечной оптимизации, индукционный нагрев.

Введение

Проблема синтеза замкнутых систем оптимального управления с обратными связями является значительно более сложной, нежели решение задач оптимального программного управления. Классические методы [1–3] построения алгоритмов и систем управления динамическими объектами разработаны применительно к моделям управляемых процессов с одним управляющим воздействием. В связи с этим возникает актуальная задача синтеза управляющих алгоритмов в условиях многоканального управления. Большинство известных результатов относится к синтезу объектов с сосредоточенными параметрами, в то время как задача синтеза применительно к объектам с распределенными параметрами оказывается качественно более сложной главным образом из-за бесконечного порядка объекта управления.

Постановка задачи оптимального управления

В данной работе в качестве объекта управления рассматривается процесс индукционного нагрева металлической заготовки с двумя сосредоточенными управляющими воздействиями $u_1(t)$ и $u_2(t)$ по мощности внутреннего тепловыделения на обеих поверхностях нагреваемой неограниченной пластины.

Подобная постановка задачи была предложена и рассмотрена в работе [4], где объект описывается в зависимости от пространственной координаты $x \in [0, R]$ и времени $t \in [0, t_{\text{кон}}]$ решением линейного одномерного неоднородного уравнения теплопроводности следующего вида:

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2} + W_1(x)u_1(t) + W_2(x)u_2(t), \quad (1)$$

$$Q(x, 0) = Q_0 = \text{const}, \quad Q_0 \geq 0 \quad (2)$$

с типовыми граничными условиями для модели объекта (1)–(2) вида

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{\partial Q(0, t)}{\partial x} &= Q_{cp}(t) - \alpha_1 Q(0, t), \quad t > 0; \\ \lambda \frac{\partial Q(R, t)}{\partial x} &= Q_{cp}(t) - \alpha_2 Q(R, t), \quad t > 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где a – коэффициент температуропроводности нагреваемого материала;
 λ – коэффициент теплопроводности;
 α_1, α_2 – заданные теплофизические постоянные;
 $Q_{cp}(t)$ – температура окружающей среды, принимается равной Q_0 .

Функции пространственного распределения внутренних электромагнитных источников тепла $W_1(x), W_2(x)$ определяются соотношениями:

$$W_1(\xi, x) = \frac{\text{ch}\left(\sqrt{2}\xi \frac{x}{R}\right) - \cos\left(\sqrt{2}\xi \frac{x}{R}\right)}{\text{sh}(\sqrt{2}\xi) - \sin(\sqrt{2}\xi)} \sqrt{2}\xi; \quad W_2(\xi, x) = W_1(\xi, R - x), \quad (4)$$

где ξ – характерный параметр, вычисляемый по формулам:

$$\xi = \frac{R\sqrt{2}}{\delta}, \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma}}.$$

Здесь δ – глубина проникновения тока в металл;
 ω – частота питающего тока;
 σ – электропроводность нагреваемого материала;
 μ – абсолютная магнитная проницаемость [5].

Начальное температурное распределение Q_0 согласно (2) принимается равномерным по всему объему пластины.

На предельные значения сосредоточенных управляющих воздействий $u_1(t), u_2(t)$ накладываются следующие ограничения:

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_1(t) \leq u_{1\text{max}}; \\ 0 &\leq u_2(t) \leq u_{2\text{max}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для дальнейшей постановки задачи управления необходимо определить критерий оптимальности и указать требования к конечному температурному состоянию объекта.

В качестве критерия оптимальности выступает общее время процесса нагрева в виде следующего интегрального функционала качества:

$$I = \int_0^{t_{\text{кон}}} dt = t_{\text{кон}} \rightarrow \min_{u_1(t), u_2(t)}, \quad (6)$$

где $t_{\text{кон}}$ – длительность процесса нагрева.

Требование к конечному температурному состоянию в момент $t_{\text{кон}}$ окончания процесса управления, как правило, связано с соблюдением допуска на отклонение ε_0 конечной температуры $Q(x, t_{\text{кон}})$ от требуемого температурного распределения $Q^*(x)$ по толщине пластины $Q^*(x) = Q^* = \text{const} > Q_0$ и может быть записано в виде следующего неравенства [10, 11]:

$$\max_{x \in [0, R]} |Q(x, t_{\text{кон}}) - Q^*| \leq \varepsilon_0 \quad (7)$$

для всех $x \in [0, R]$.

В рассматриваемой задаче оптимального по быстродействию управления требуется определить такие управляющие воздействия $u_1^*(t), u_2^*(t)$, которые подчиняются заданным ограничениям (5) и переводят объект управления (1)–(4) в требуемое конечное состояние (7) за минимально возможное время согласно критерию оптимальности (6).

Алгоритмы оптимального по быстродействию программного управления с двумя сосредоточенными управляющими воздействиями

Применительно к базовому критерию быстродействия оптимальные программные управления $u_1^*(t)$ и $u_2^*(t)$ объектом (1)–(4) следует искать в классе релейных функций, попеременно принимающих на промежутке $t \in [0, t_{\text{кон}}]$ только свои предельно допустимые значения в (5) [6–10]. Тем самым $u_1^*(t), u_2^*(t)$ определяются априори с точностью до числа N_{01}, N_{02} и длительностей $\Delta_{1i}^{(N_{01})}, i = \overline{1, N_{01}}, \Delta_{2i}^{(N_{02})}, i = \overline{1, N_{02}}$ интервалов постоянства $u_1^*(t), u_2^*(t)$ соответственно.

В работе [4] было найдено пространственное распределение температурного состояния $Q(x, \bar{\Delta})$ в конце процесса управления, задаваемое в виде явной зависимости от $\Delta_{1i}^{(N_{01})}, \Delta_{2i}^{(N_{02})}, i = 1, 2$ соответствующими решениями уравнений объекта с фиксированным начальным состоянием Q_0 для воздействий $u_1^*(t), u_2^*(t)$ в типичном двухинтервальном режиме нагрева при $N_{01} = N_{02} = N_0 = 2$ (рис. 1):

$$Q(x, \bar{\Delta}) = Q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda R^2}{a E_n \eta_n^2} \left(\cos \left(\eta_n \frac{x}{R} \right) + \frac{Bi_1}{\eta_n} \sin \left(\eta_n \frac{x}{R} \right) \right) \times \\ \times \left[\bar{W}_{1n} u_{1\text{max}} \left(e^{-\eta_n^2 \frac{a}{R^2} \Delta_{12}^{(2)}} - e^{-\eta_n^2 \frac{a}{R^2} (\Delta_{11}^{(2)} + \Delta_{12}^{(2)})} \right) + \bar{W}_{2n} u_{2\text{max}} \left(e^{-\eta_n^2 \frac{a}{R^2} \Delta_{22}^{(2)}} - e^{-\eta_n^2 \frac{a}{R^2} (\Delta_{21}^{(2)} + \Delta_{22}^{(2)})} \right) \right], \quad (8)$$

где $\bar{\Delta} = (\Delta_{11}^{(2)}, \Delta_{12}^{(2)}, \Delta_{21}^{(2)}, \Delta_{22}^{(2)})$; $\mu_n^2 = \frac{a}{R^2} \eta_n^2$ – собственные числа;

$\eta_n, n = 1, 2, \dots$ – бесконечно возрастающая последовательность корней уравнения:

$$\operatorname{tg} \eta_n = \frac{Bi_1 + Bi_2}{\eta_n - \frac{Bi_1 \cdot Bi_2}{\eta_n}}, \quad Bi_1 = \frac{\alpha_1 R}{\lambda}, \quad Bi_2 = \frac{\alpha_2 R}{\lambda};$$

Bi_1, Bi_2 – безразмерный критерий Био, характеризующий уровень тепловых потерь с поверхностями пластины в окружающую среду с температурой $Q_{cp} = Q_0$ согласно (2);

R – толщина пластины; нормирующие множители E_n вычисляются по формуле:

$$E_n^2 = \frac{\lambda^2}{a} R \left[\left(1 - \left(\frac{Bi_1}{\eta_n} \right)^2 \right) \frac{\eta_n + \sin \eta_n \cos \eta_n}{2\eta_n} + \left(\frac{Bi_1}{\eta_n} \right)^2 + \frac{Bi_1}{2\eta_n^2} (1 - \cos 2\eta_n) \right].$$

Моды функций (4) $\bar{W}_{1n}, \bar{W}_{2n}$ определяются следующим образом :

$$\bar{W}_{1n} = \int_0^R W_1(\xi, x) \cos\left(\mu_n \frac{x}{R}\right) dx; \quad \bar{W}_{2n} = \int_0^R W_2(\xi, x) \cos\left(\mu_n \frac{x}{R}\right) dx.$$

В условиях $N_0 = 2$ требуемая величина ε_0 в (7) должна удовлетворять требованию [11] $\varepsilon_0 : \varepsilon_{\min}^{(2)} \leq \varepsilon_0 < \varepsilon_{\min}^{(1)}$, где $\varepsilon_{\min}^{(i)}, i = 1, 2$ – предельно достижимая точность нагрева в классе i -интервальных управляющих воздействий релейной формы.

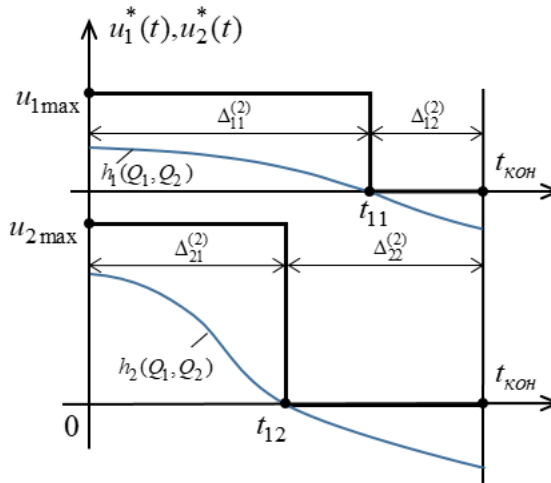


Рис. 1. Оптимальное по быстродействию двухканальное двухинтервальное управление по мощности внутренних источников тепла

В таком случае рассматриваемая задача быстродействия сводится при требованиях (7) к задаче полубесконечной оптимизации следующего вида [10, 11]:

$$I(\bar{\Delta}) = \Delta_{11}^{(2)} + \Delta_{12}^{(2)} = \Delta_{21}^{(2)} + \Delta_{22}^{(2)} \rightarrow \min_{\Delta_{si}^{(N_0)} \in \Omega}; \quad (9)$$

$$\Omega = \left\{ \Delta_{si}^{(2)} : 0 < \Delta_{si}^{(2)} < \infty; s = 1, 2; i = 1, 2 \right\},$$

$$\Phi(\bar{\Delta}) = \max_{x \in [0, R]} |Q(x, \bar{\Delta}) - Q^*| \leq \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 > 0. \quad (10)$$

Далее будет рассматриваться типовая задача с предельно достижимой в классе двухинтервальных ($N_0 = 2$) управляющих воздействий релейной формы (рис. 1) абсолютной точностью $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(2)}$ [10, 11].

Решение задачи полубесконечной оптимизации (9)–(10) сводится по схеме альтернансного метода [10, 11] к решению системы уравнений, определенной в [4] в соответствии с формой кривой конечного температурного распределения (рис. 3):

$$\begin{aligned} Q(0, \Delta_{11}^{(2)}, \Delta_{12}^{(2)}, \Delta_{21}^{(2)}, \Delta_{22}^{(2)}) - Q^* &= -\varepsilon_{\min}^{(2)}; \\ Q(x_2^0, \Delta_{11}^{(2)}, \Delta_{12}^{(2)}, \Delta_{21}^{(2)}, \Delta_{22}^{(2)}) - Q^* &= \varepsilon_{\min}^{(2)}; \\ Q(x_3^0, \Delta_{11}^{(2)}, \Delta_{12}^{(2)}, \Delta_{21}^{(2)}, \Delta_{22}^{(2)}) - Q^* &= -\varepsilon_{\min}^{(2)}; \\ Q(x_4^0, \Delta_{11}^{(2)}, \Delta_{12}^{(2)}, \Delta_{21}^{(2)}, \Delta_{22}^{(2)}) - Q^* &= \varepsilon_{\min}^{(2)}; \\ \frac{\partial Q(x_j^0, \Delta_{11}^{(2)}, \Delta_{12}^{(2)}, \Delta_{21}^{(2)}, \Delta_{22}^{(2)})}{\partial x} &= 0, j = 2, 3, 4, \end{aligned} \quad (11)$$

относительно неизвестных значений $\bar{\Delta}$ длительностей интервалов постоянства программного управления $u_1^*(t), u_2^*(t)$, величины $\varepsilon_{\min}^{(2)}$ и координат $x_j^0, j = 2, 3, 4$ точек достижения предельно допустимых отклонений $Q(x, \bar{\Delta})$ от Q^* .

Синтез системы двухканального управления

Синтез оптимального регулятора по общему методу фазового пространства [10, 12] приводит к вполне реализуемой структуре замкнутой системы с неполным измерением температурного состояния объекта $Q(\tilde{x}_j, t) = Q_j(t), j = \overline{1, k}$ в некоторых k отдельных точках $\tilde{x}_j \in [0, R]$ пространственной области его распределения и может быть выполнен путем выбора функции переключения $h_s(\bar{Q}), s = 1, 2$ каждого из управляющих воздействий $u_1^*(t), u_2^*(t)$ в форме линейной комбинации k сигналов обратных связей по измеряемым величинам $Q_j, j = \overline{1, k}$ с коэффициентами передачи ρ_{sj} , зависящими от начального состояния объекта [10]:

$$h_s(\bar{Q}) = \sum_{j=1}^k \rho_{sj} [Q_j(\tilde{x}_j, t_{\text{кон}}) - Q_j(t)], \quad s = 1, 2; j = \overline{1, k}. \quad (12)$$

Если теперь принять число k точек контроля управляемой величины в (12) равным числу $N_{01} = N_{02} = N_0 \geq 2$ интервалов оптимального управления для заданного ε_0 в (10), т. е. положить

$$h_s(\bar{Q}) = \sum_{j=1}^{N_0} \rho_{sj} [Q_j(\tilde{x}_j, t_{\text{кон}}) - Q_j(t)], \quad s = 1, 2; j = \overline{1, N_0}, \quad (13)$$

то условия равенства нулю $h_s(\bar{Q})$ в расчетные моменты времени t_{ms} , $m=1,2,\dots,N_0-1$, $s=1,2$, переключения оптимальной программы соответственно $u_1^*(t), u_2^*(t)$ при $s=1$ и $s=2$ выполняются для каждого Q_0 в (2) в том случае (см. рис. 1), когда коэффициенты передачи ρ_{sj} , $s=1,2$; $j=\overline{1,N_0}$, опосредованно зависящие от Q_0 через значения $Q_j(t_{ms})$, являются нетривиальными решениями однородной системы N_0-1 линейных уравнений с N_0 неизвестными:

$$\sum_{j=1}^{N_0} \rho_{sj} [Q_j(\tilde{x}_j, t_{\text{кон}}) - Q_j(t_{ms})] = 0, \quad s=1,2; \quad m=1,2,\dots,N_0-1. \quad (14)$$

Полагая здесь для определенности $\rho_{s1}=1$ при $s=1,2$ [10], получим из (14) систему из N_0-1 линейных уравнений относительно N_0-1 неизвестных коэффициентов обратных связей ρ_{sj} , $j=\overline{2,N_0}$ для $s=1$ и $s=2$.

Значения $\Delta_{11}^{(2)}, \Delta_{12}^{(2)}, \Delta_{21}^{(2)}, \Delta_{22}^{(2)}$ длительностей интервалов постоянства $u_1^*(t), u_2^*(t)$, а значит, и моменты переключения t_{ms} вместе с оптимальной длительностью процесса управления, и величины $Q_j(\tilde{x}_j, t_{\text{кон}})$ могут быть найдены при расчете программного оптимального управления по ходу решения задачи альтернансным методом, описанным в [11]. При известных t_{ms} значения $Q_j(t_{ms})$ находятся по решениям уравнений объекта, отвечающим программному управлению $u_1^*(t), u_2^*(t)$. По полученным данным искомые коэффициенты ρ_{sj} находятся указанным выше способом из уравнений (14) с заданными элементами ее матрицы $Q_j(\tilde{x}_j, t_{\text{кон}}) - Q_j(t_{ms})$, $j=\overline{1,N_0}$.

В случае двухинтервального характера нагрева при $N_0=2$ функции переключения (13) должны быть сформированы по сигналам обратной связи по температурам $Q(\tilde{x}_1, t) = Q_1$, $Q(\tilde{x}_2, t) = Q_2$ в двух точках \tilde{x}_1 и $\tilde{x}_2 \in [0, R]$ по толщине пластины:

$$\begin{aligned} h_1(Q_1, Q_2) &= \rho_{11} (Q^* - Q(\tilde{x}_1, t)) + \rho_{12} (Q^* - Q(\tilde{x}_2, t)), \\ h_2(Q_1, Q_2) &= \rho_{21} (Q^* - Q(\tilde{x}_1, t)) + \rho_{22} (Q^* - Q(\tilde{x}_2, t)), \end{aligned} \quad (15)$$

в качестве которых удобно принять точки \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 на множестве точек $\{x_j^0\}$ в системе уравнений (11), например $\tilde{x}_1=0, \tilde{x}_2=x_3^0$ (рис. 3), где результирующие значения температур $Q(0, t_{\text{кон}}) = Q(0, \Delta_{s1}^{(2)}, \Delta_{s2}^{(2)})$ и $Q(x_3^0, t_{\text{кон}}) = Q(x_3^0, \Delta_{s1}^{(2)}, \Delta_{s2}^{(2)})$, $s=1,2$ в конце оптимального процесса должны быть равны минимально допустимым величинам $Q^* - \varepsilon_{\min}^{(2)}$ согласно [4], что вытекает из альтернансных соотношений [11], независимо от начальной температуры Q_0 применительно к рассматриваемому случаю $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(2)}$.

Тогда при $\rho_{s1}=1$ для $s=1$ и $s=2$ системы уравнений (14) сводятся к одному уравнению относительно ρ_{s2} , и функции переключения примут следующий вид:

$$\begin{aligned} h_1(Q_1, Q_2) &= Q^* - \varepsilon_{\min}^{(2)} - Q(0, t) + \rho_{12} \left(Q^* - \varepsilon_{\min}^{(2)} - Q(x_3^0, t) \right), \\ h_2(Q_1, Q_2) &= Q^* - \varepsilon_{\min}^{(2)} - Q(0, t) + \rho_{22} \left(Q^* - \varepsilon_{\min}^{(2)} - Q(x_3^0, t) \right). \end{aligned} \quad (16)$$

В соответствии с полученными результатами алгоритм оптимального двухканального управления для каждого из управляющих воздействий определяется соотношениями

$$\begin{aligned} u_1^*(Q) &= \frac{u_{1\max}}{2} \left[1 + \text{sign} \left(Q^* - \varepsilon_{\min}^{(2)} - Q(0, t) + \rho_{12} \left(Q^* - \varepsilon_{\min}^{(2)} - Q(x_3^0, t) \right) \right) \right], \\ u_2^*(Q) &= \frac{u_{2\max}}{2} \left[1 + \text{sign} \left(Q^* - \varepsilon_{\min}^{(2)} - Q(0, t) + \rho_{22} \left(Q^* - \varepsilon_{\min}^{(2)} - Q(x_3^0, t) \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (17)$$

и реализуется в замкнутой системе управления, построенной по схеме (рис. 2), где коэффициенты передачи ρ_{12} и ρ_{22} вычисляются указанным выше способом.

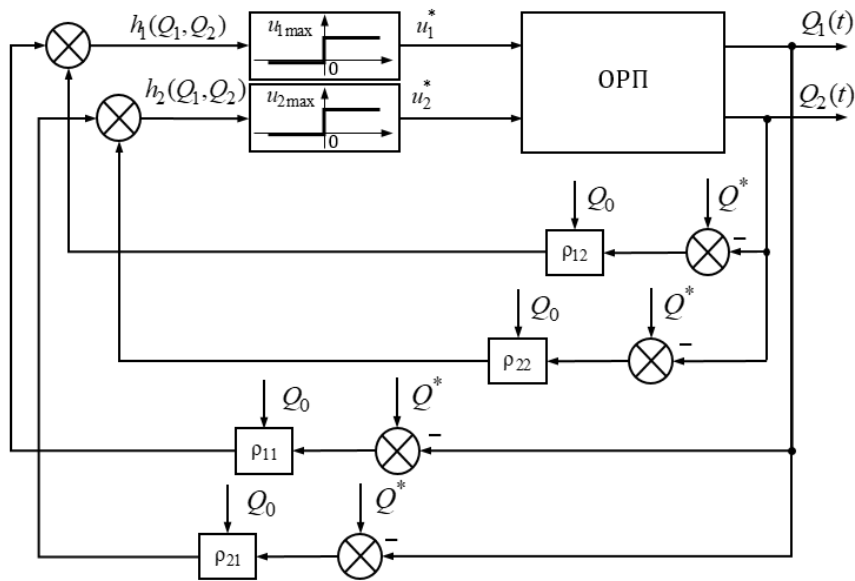


Рис. 2. Структурная схема замкнутой системы оптимального по быстродействию управления процессом индукционного нагрева при $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(2)}$

Для исходных номинальных данных, отвечающих процессу индукционного нагрева пластины из титанового сплава толщиной 0.2 м перед последующей операцией горячего прессования ($\xi = 4$, $\lambda = 14$ Вт/(м · °С), $Q_0 = 20$ °С, $Q^* = 960$ °С, $a = 4,34 \cdot 10^{-6}$ м³/с, $u_{1\max} = 300$ кВт/м³, $u_{2\max} = 393$ кВт/м³, $Bi_1 = 0,57$, $Bi_2 = 0,43$), найдены путем решения системы уравнений (11) значения параметров оптимального процесса и коэффициентов обратной связи в (16):

$$\Delta_{11}^{(2)}=1607 \text{ с}, \Delta_{12}^{(2)}=130 \text{ с}, \Delta_{21}^{(2)}=1475 \text{ с}, \Delta_{22}^{(2)}=262 \text{ с}, x_2^0=0,04 \text{ м}, x_3^0=0,01 \text{ м}, x_4^0=0,17 \text{ м},$$

$$\varepsilon_{\min}^{(2)}=19 \text{ }^{\circ}\text{C}, \rho_{12}=1,26, \rho_{22}=-0,07$$

и отвечающие этим результатам пространственные температурные распределения $Q(x, \bar{\Delta}) - Q^*$ (рис. 3).

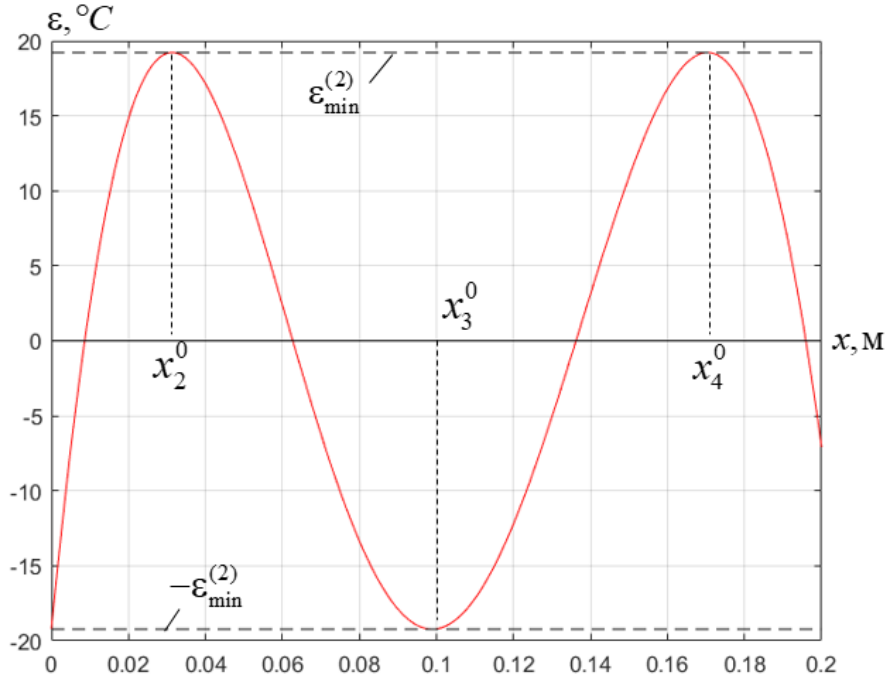


Рис. 3. Кривая конечного температурного распределения при $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(2)}$

Моделирование замкнутой системы проводилось в среде программирования MATLAB/Simulink [14, 15]. При моделировании теплового объекта (1)–(3), (5) с граничными условиями третьего рода использовались методы конечномерного приближения [13], позволяющие представить объект в виде параллельного соединения достаточно большого числа типовых апериодических звеньев (рис. 4) с коэффициентами усиления $F_n^*(x)$ и постоянными времени T_n^* , которые предварительно вычисляются по следующим выражениям:

$$k = \frac{\lambda R^2}{a}; T_n^* = \frac{R^2}{a \eta_n^2};$$

$$F_{1n}^*(x) = \frac{1}{E_n \eta_n^2} \bar{W}_{1n} \left[\cos \left(\eta_n \frac{x}{R} \right) + \frac{Bi_1}{\eta_n} \sin \left(\eta_n \frac{x}{R} \right) \right];$$

$$F_{2n}^*(x) = \frac{1}{E_n \eta_n^2} \bar{W}_{2n} \left[\cos \left(\eta_n \frac{x}{R} \right) + \frac{Bi_1}{\eta_n} \sin \left(\eta_n \frac{x}{R} \right) \right].$$

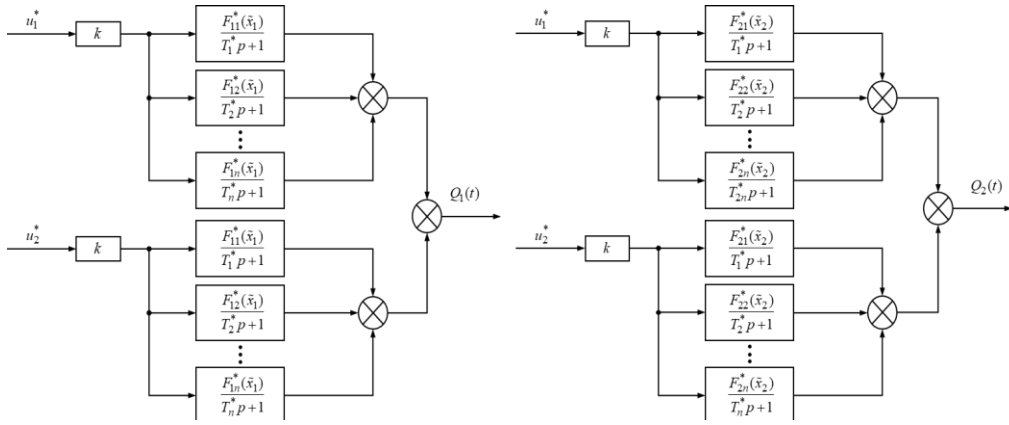


Рис. 4. Структура объекта управления в виде параллельного соединения n -числа аperiodических звеньев

На рис. 5 приведены некоторые результаты компьютерного моделирования процесса управления индукционным нагревом в замкнутой системе оптимального быстрого действия, построенной по схеме рис. 2, с алгоритмами управления вида (17) для вышеуказанных значений параметров объекта.

Уравнения линий переключения для обоих управляющих воздействий на плоскости температур $Q_1 = Q(0, t)$, $Q_2 = Q(x_3^0, t)$ вычисляются по значениям $Q(0, \Delta_{s1}^{(2)})$, $Q(x_3^0, \Delta_{s1}^{(2)})$ в момент $\Delta_{s1}^{(2)}$ переключения $u_1^*(Q)$, $u_2^*(Q)$ и записываются в зависимости от начальной температуры Q_0 в параметрической форме:

$$\begin{aligned}
 Q_1(Q_0, \Delta_{s1}^{(2)}(Q_0)) &= Q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda R^2}{a E_n \eta_n^2} \times \\
 &\times \left[\bar{W}_{1n} u_{1\max} \left(1 - e^{-\eta_n^2 \frac{a}{R^2} \Delta_{s1}^{(2)}(Q_0)} \right) + \bar{W}_{2n} u_{2\max} \left(1 - e^{-\eta_n^2 \frac{a}{R^2} \Delta_{s1}^{(2)}(Q_0)} \right) \right]; \\
 Q_2(Q_0, \Delta_{s1}^{(2)}(Q_0)) &= Q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda R^2}{a E_n \eta_n^2} \left(\cos \left(\eta_n \frac{x_3^0}{R} \right) + \frac{B i_1}{\eta_n} \sin \left(\eta_n \frac{x_3^0}{R} \right) \right) \times \\
 &\times \left[\bar{W}_{1n} u_{1\max} \left(1 - e^{-\eta_n^2 \frac{a}{R^2} \Delta_{s1}^{(2)}(Q_0)} \right) + \bar{W}_{2n} u_{2\max} \left(1 - e^{-\eta_n^2 \frac{a}{R^2} \Delta_{s1}^{(2)}(Q_0)} \right) \right],
 \end{aligned} \tag{18}$$

где $s = \overline{1, 2}$.

Выбор функции переключения в форме (16) с постоянными коэффициентами обратной связи $\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{21}, \rho_{22}$, соответствующими только одному принятому на начальном этапе постановки задачи значению Q_0 , позволяет провести синтез квазиоптимальной системы управления [10] с заменой линий переключения (18) прямыми на плоскости температур Q_1, Q_2 :

$$\begin{aligned} (Q^* - \varepsilon_{\min}^{(2)})(1 + \rho_{12}) - Q_1 - \rho_{12}Q_2 &= 0, \\ (Q^* - \varepsilon_{\min}^{(2)})(1 + \rho_{22}) - Q_1 - \rho_{22}Q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

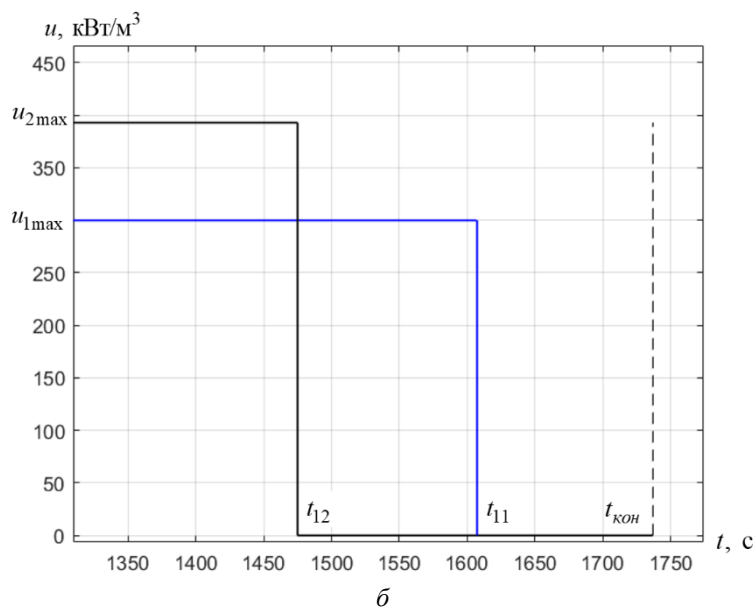
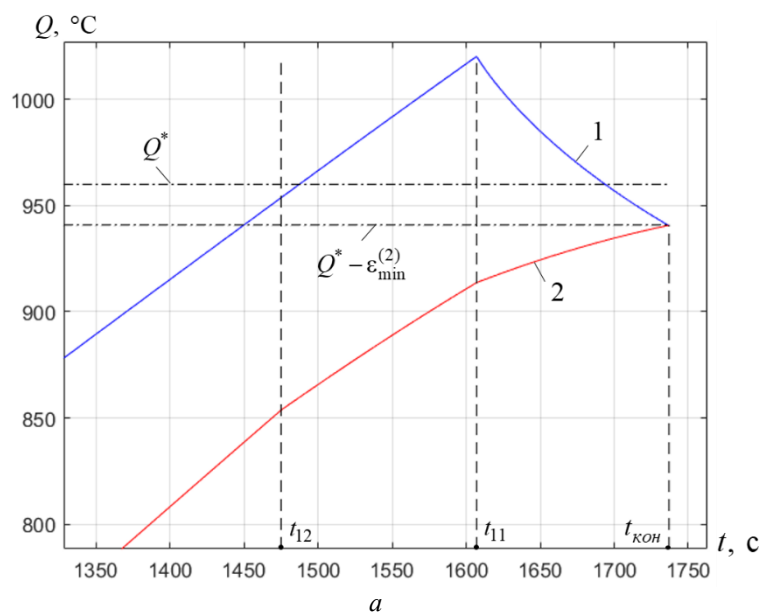


Рис. 5. Оптимальный по быстродействию процесс управления нагревом пластины в замкнутой системе:
 a – температурное поле ($1 - Q_1(t)$,
 $2 - Q_2(t)$); b – оптимальное управление

На рис. 6 изображены линии переключения (18), а также прямые (19) и фазовые траектории системы для принятого значения Q_0 . Переключения управляющего воздействия в системе управления происходят при этом в точках А, Б пересечения линий (18) с прямыми (19) (фазовая траектория 1, 2, 3 в плоскости Q_1, Q_2 на рис. 6), а окончание процесса управления фиксируется по моменту достижения равенства $Q_1 = Q_2$ на втором интервале управления.

Следует отметить, что процесс в замкнутой системе с алгоритмом управления (17), построенной по схеме рис. 2, остается строго оптимальным по быстродействию с переключением управляющего воздействия на второй интервал в точках пересечения линий (18) с прямыми (19) только при равенстве начальной температуры Q_0 ее расчетному значению, для которого находятся коэффициенты ρ_{11}, ρ_{22} в (19). При отклонениях Q_0 от этого значения, принятого в исходных данных для рассматриваемой задачи, конечное температурное распределение будет отличаться от температурного состояния при оптимальном режиме нагрева. В частности, на рис. 6 представлены фазовые траектории процесса нагрева при начальной температуре $Q_0 = 80$, при которой траектории 1', 2' не попадают в точки пересечения линий (18) с прямыми (19) и переключение происходит на прямых 5.

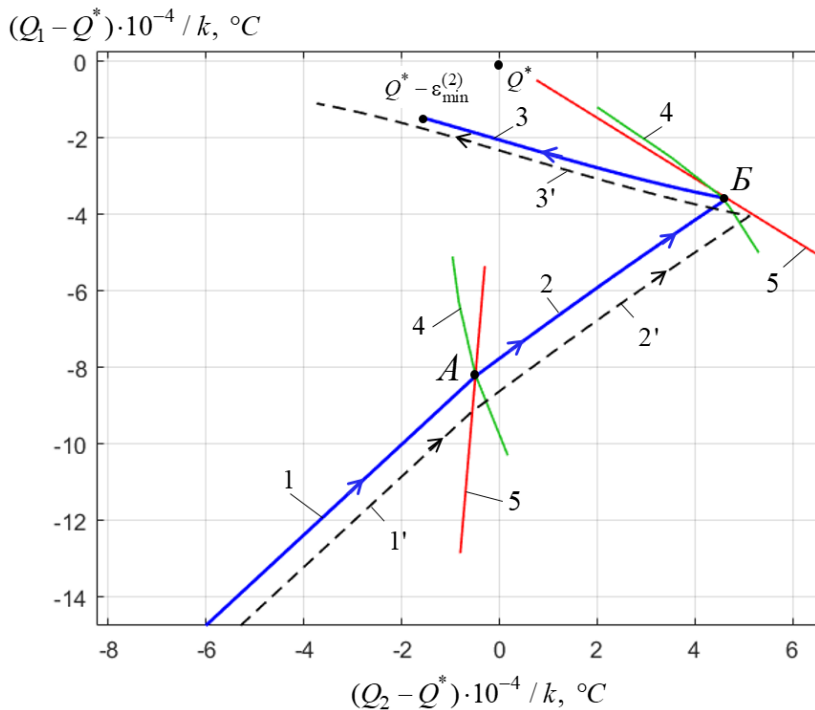


Рис. 6. Линии переключения и фазовые траектории в системе оптимального по быстродействию управления:

- 1, 2, 3 – фазовые траектории на первом и втором интервалах для $Q_0 = 20$;
- 1', 2', 3' – фазовые траектории на первом и втором интервалах для $Q_0 = 80$;
- 4 – линии переключения (18); 5 – прямые переключения (19)

Таким образом, задача синтеза двухканального оптимального по быстродействию управления объектом (1)–(3) с сосредоточенными управляющими воздействиями вида (17) сводится к построению релейной системы автоматического регулирования (схема 2) для каждого из каналов управления с линейными обратными связями по значениям управляемой величины в некоторых точках пространственной области ее распределения, число которых должно быть равно числу интервалов постоянства оптимальных программных управляющих воздействий.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. – М.: Физматлит, 2007.
2. Яковлев В.Б. Теория автоматического управления: Учебник для вузов / В.Б. Яковлев, С.Е. Душин, Н.С. Зотов, Д.Х. Имаев, Н.Н. Кузьмин. – М.: Высшая школа, 2003.
3. Пупков К.А., Фалдин Н.В., Егунов Н.Д. Методы синтеза оптимальных систем автоматического управления. – М.: МГТУ, 2000.
4. Ильина Н.А. Двухканальное оптимальное по быстродействию управление процессом индукционного нагрева с учетом фазового ограничения на максимальную температуру // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Технические науки. – 2020. – № 65(2). – С. 41–58.
5. Рапопорт Э.Я., Плешивцева Ю.Э. Оптимальное управление температурными режимами индукционного нагрева. – М.: Наука, 2012.
6. Рапопорт Э.Я. Методы параметрической оптимизации в задачах многоканального управления системами с распределенными параметрами // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2019. – № 4. – С. 36–50.
7. Рапопорт Э.Я., Ильина Н.А. Двухканальное оптимальное по быстродействию управление процессом нестационарной теплопроводности // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Технические науки. – 2018. – № 1(57). – С. 7–18.
8. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов: 2-е изд. / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Наука, 1969.
9. Плешивцева Ю.Э., Рапопорт Э.Я. Метод последовательной параметризации управляющих воздействий в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами // Изв. РАН. ТиСУ. – 2009. – № 3. – С. 22–33.
10. Рапопорт Э.Я. Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. – М.: Высшая школа, 2009.
11. Рапопорт Э.Я. Альтернативный метод в прикладных задачах оптимизации. – М.: Наука, 2000.
12. Фельдбаум А.А. Основы теории оптимальных автоматических систем. – М.: Наука, 1966.
13. Рапопорт Э.Я. Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. – М.: Высш. шк., 2003.
14. Дьяконов В.П. MATLAB. Полный самоучитель. – М.: ДМК Пресс, 2012.
15. Рогачев Г.Н. Программные средства анализа и синтеза систем управления: Конспект лекций. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2016.

Статья поступила в редакцию 10 марта 2021 г.

TWO-CHANNEL TIME-OPTIMAL CONTROL OF NONSTATIONARY HEAT CONDUCTIVE PROCESS WITH ACCOUNT FOR RESPONSE TIME OF BOUNDARY CONTROL ACTIONS *

N.A. Il'ina

Samara State Technical University
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia

E-mail: ilina.natalyaa@yandex.ru., edgar.rapoport@mail.ru

Abstract. *The task of organization a closed time-optimal control system of linear object with distributed parameters of parabolic type is considered. The object has two lumped internal controls for the power of heat sources excited in the electromagnetic field of an inductor. The proposed method for the synthesis of optimal controllers uses an alternance method for calculating the optimal program controls for each of the control actions. An example of the construction of a quasi-optimal time control system for the process of periodic induction heating of a metal workpiece with constant values of the feedback coefficients calculated for the most characteristic initial spatial distribution is given.*

Keywords: *optimal control, design an optimum control system, two-channel control, alternance method, semi-infinite optimization, induction heating.*

REFERENCES

1. Butkovskiy A.G., Malyy S.A., Andreev Yu.N. Upravlenie nagrevom metalla [Control of Metal Heating]. Moscow, Metallurgy Publ., 1981. 272 p. (In Russian).
2. Yakovlev V.B. Teoriya avtomaticheskogo upravleniya: Uchebnik dlya vuzov / V.B. Yakovlev, S.E. Dushin, N.S. Zotov, D.H. Imaev, N.N. Kuzmin. – Moscow: Vyssh. Shkola, 2003. (In Russian).
3. Pupkov K.A., Faldin N.V., Yegupov N.D. Metody sinteza optimal'nykh sistem avtomaticheskogo upravleniya. Moscow: MGТУ, 2000.
4. Il'ina N.A. Dvukhkanal'noe optimal'noe po bystrodeystviyu upravlenie protsessom induktsionnogo nagreva s uchetom fazovogo ogranicheniya na maksimal'nyu temperaturu [Two-channel time-optimal control of induction heating process with maximum temperature constraint] // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Tekhnicheskiye nauki. 2020. No. 65(2). Pp. 41–58.
5. Lykov A.B. Teoriya teploprovodnosti [Theory of heat conduction]. Moscow: Vyssh. Shkola, 1967. 600 p. (In Russian).
6. Rapoport E.Ya. Metody parametricheskoy optimizatsii v zadachakh mnogokanal'nogo upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami [Parametric optimization methods for multichannel control of systems with distributed parameters] // Izvestiya RAN. Teoriya i sistemami upravleniya, 2019. No. 4. Pp. 36–50. (In Russian).
7. Rapoport E.Ya., Il'ina N.A. Dvukhkanal'noe optimal'noe po bystrodeystviyu upravlenie protsessom nestatsionarnoy teploprovodnosti [Two-channel time-optimal control of the process of nonstationary heat conductivity] // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Un-ta. Ser. Tekhn. Nauki. 2018. No. 1(57). Pp. 7–18. (In Russian).
8. Pontryagin L.S. Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov [Mathematical theory of optimal processes] / L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskiy, R.V. Gamkrelidze, E.F. Mishchenko. Moscow: Nauka, 1969. 384 p. (In Russian).
9. Rapoport E.Ya., Pleshivtseva Yu.E. Optimal'noe upravlenie temperaturnumi regimami induktsionnogo nagreva [Optimal Control of Induction Heating Processes]. Moscow: Nauka, 2012. 309 p. ISBN 978-5-02-037501-7 (In Russian).
10. Rapoport E.Ya. Optimal'noe upravlenie sistem s raspredelennymi parametrami [Optimal Control for Systems with Distributed Parameters]. Moscow: Vyssh. Shkola, 2009. 677 p. (In Russian).
11. Rapoport E.Ya. Al'ternatsionnyy metod v prikladnykh zadachakh optimizatsii [Alternance Method for Solving Applied Optimization Problems]. Moscow: Nauka, 2000. 336 p. (In Russian).

Natalya A. Il'ina, Graduate student.

12. *Feldbaum A.A.* Osnovi teorii optimalnikh avtomaticheskikh sistem. Moscow: Nauka, 1966. 623 p.
13. *Rapoport E.Ya.* Strukturnoe modelirovanie obektov i sistem upravleniya s raspredelennimi parametrami. Moscow: Vyssh. Shkola, 2003. 299 p.
14. *Dyakonov V.P.* MATLAB. Polnuy samouchitel' [MATLAB.Full tutorial]. Moscow: DMK Press, 2012. 768 p. (In Russian).
15. *Rogachev G.N.* Programmnye sredstva analiza i sinteza sistem upravleniya: Konspekt lektsii. Samara: Samar. Gos. Tekhn. Un-t, 2016. 111 p. (In Russian).