Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 26, № 1. С. 179–189
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1907

УДК 517.958:531.332

О новом лагранжевом взгляде на эволюцию завихренности в пространственных течениях

***И. А. Максименко*[1], *В. В. Марков*[2,3,4]**

[1] Мюнхенский технический университет,
Германия, 80333, Мюнхен, Арцисштрассе, 21.
[2] Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
Россия, 119991, Москва, ул. Губкина, 8.
[3] Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Научно-исследовательский институт механики,
Россия, 119192, Москва, Мичуринский проспект, 1.
[4] Научно-исследовательский институт системных исследований РАН,
Россия, 117218, Москва, Нахимовский проспект, 36, корп. 1.

Аннотация

Цель исследования состоит в распространении на пространственный случай разработанного Г. Б. Сизых подхода к эволюции завихренности для двумерных течений, базирующегося на представлении эволюции завихренности в виде такого движения вихревых линий и вихревых трубок, при котором интенсивность этих трубок меняется со временем по любому наперед заданному закону. **Метод.** Строгий анализ уравнений, описывающих поле скорости течения идеальной несжимаемой жидкости и вязкого газа в общем пространственном случае с использованием представления о движении воображаемых частиц. **Результаты.** Для любого заданного временного закона изменения циркуляции скорости (например, для экспоненциального убывания) реальной жидкости по контурам предложен способ построения поля скорости движения этих контуров и вихревых трубок (т. е. построение поля скорости переносящих их воображаемых частиц). Установлено, что при заданной функции времени скорость воображаемых частиц определяется неоднозначно, и предложен способ коррекции их движения при сохранении выбранного закона изменения циркуляции. **Заключение.** Предложен новый лагранжев подход к эволюции завихренности в пространственных течениях и получены выражения для скорости движения контуров, обеспечивающие заданное изменение со временем циркуляции скорости реальной жидкости по любому контуру. Данный теоретический результат может быть

Научная статья

Образец для цитирования
Максименко И. А., Марков В. В. О новом лагранжевом взгляде на эволюцию завихренности в пространственных течениях // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 1. С. 179–189. EDN: HFRFPX. https://doi.org/10.14498/vsgtu1907.

Сведения об авторах

Иван Александрович Максименко https://orcid.org/0000-0001-8159-8531
студент; департамент гражданской, гео- и экологической инженерии;
e-mail: maksimenko.ia@phystech.edu

Владимир Васильевич Марков https://orcid.org/0000-0003-2188-2201
доктор физико-математических наук, профессор; ведущий научный сотрудник; отд. механики[2]; лаб. газодинамики взрыва и реагирующих систем[3]; отд. вычислительной математики[4]; e-mail: markov@mi-ras.ru

использован в пространственных модификациях метода вязких вихревых доменов для ограничения количества учитываемых в расчетах векторных трубок.

Ключевые слова: скорость движения контуров, интенсивность контуров, движение воображаемой жидкости, критерий Зоравского, теорема Фридмана, метод вязких вихревых доменов.

Получение: 7 февраля 2022 г. / Исправление: 23 февраля 2022 г. / Принятие: 24 февраля 2022 г. / Публикация онлайн: 16 марта 2022 г.

Введение. В середине прошлого столетия был создан бессеточный метод расчета пространственных вихревых течений идеальной несжимаемой жидкости (метод дискретных вихрей [1–3]), основанный на теоремах Гельмгольца о вихрях. Этот метод успешно применяется до сих пор (см., например, [4–6]). Позже теоремы Гельмгольца были обобщены на случай вязкой несжимаемой жидкости, но только для двумерных (плоскопараллельных [7] и незакрученных осесимметричных [8]) течений, и были найдены формулы для скорости $\mathbf{U}$ переноса вихревых трубок с сохранением их интенсивности. Обе формулы статей [7, 8], используя принятые обозначения для скорости потока, завихренности и кинематического коэффициента вязкости, можно представить в виде $\mathbf{U} = \mathbf{V} - \nu(\mathbf{\Omega} \times \operatorname{rot} \mathbf{\Omega})/\mathbf{\Omega}^2$.

В работе [9] был предложен численный метод исследования двумерных вязких течений, так называемый «метод вязких вихревых доменов» (ВВД), в котором используется представление о движении вихревых трубок постоянной интенсивности со скоростью $\mathbf{U}$, полученной в [7, 8]. Исчерпывающее объяснение этого метода приводится, например, в [10], а краткое — в [11]. Являясь бессеточным методом, ВВД обладает рядом преимуществ, в частности, возможностью удовлетворить граничным условиям в неограниченных пространственных течениях [12], что необходимо при моделировании природных явлений (циклоны, океанические течения и т. д.). Однако использование метода ВВД сопряжено с трудностями, такими как неограниченный рост общего числа рассматриваемых доменов, генерируемых на каждом расчетном шаге. В настоящее время ограничение общего числа доменов производится путем перераспределения их положений и интенсивностей [13–15]. В качестве одного из способов «борьбы» с неограниченным ростом числа доменов в работе [16] была предложена новая формула скорости переноса вихревых трубок для любого наперед заданного закона изменения их интенсивности во время движения, которая в случае экспоненциального закона убывания со временем позволяет пренебречь каждым доменом спустя некоторое конечное число шагов по времени и тем самым ограничить количество учитываемых в расчете доменов. Внедрение такой скорости в метод ВВД представляет собой отдельную содержательную задачу вычислительной гидродинамики и требует времени, а статья [16] опубликована недавно. Поэтому, несмотря на отсутствие примеров использования скорости [16], авторы настоящей статьи выражают уверенность в том, что это отсутствие временное, и результат [16] будет полезен для развития метода ВВД.

Как сказано выше, метод ВВД и разработанная для этого метода в [16] новая скорость позволяют рассчитывать только двумерные течения. Более точно формулы для скорости [16] работают только в таких течениях, в которых завихренность и ее ротор ортогональны. Следует заметить, что идеи работ [7, 8] удалось распространить на закрученные осесимметричные течения благодаря раздельному рассмотрению эволюции завихренностей радиально-осевой и окружной скоростей в [17, 18]. При таком раздельном взгляде роторы этих завихренностей ортогональны им. Поэтому формулы [16] можно применять для каждого из двух полей завихренности (при этом даже можно задать различными законы убывания интенсивностей вихревых трубок каждой из них). В общем пространственном случае такое распространение невозможно, поскольку (как уже было сказано) в двумерных течениях завихренность и ее ротор ортогональны, вследствие чего допускаются такие преобразования уравнений Навье—Стокса (использованные в [7, 8]), которые невозможны в общем пространственном случае, где завихренность и ее ротор могут быть не ортогональны (подробно см. [7, 8]). Поэтому длительное время после опубликования работ [7, 8] среди известных авторам исследователей считалось, что в общем пространственном случае скорость $\mathbf{U}$ не существует. Уверенность в этом вселяла статья [19], в которой было «доказано» отсутствие скорости $\mathbf{U}$ в общем пространственном случае. Однако потом в [19] была обнаружена ошибка. Это произошло после того, как в [11] было доказано, что в общем пространственном случае скорость $\mathbf{U}$ все-таки существует, причем для течений жидкостей всех типов: от идеальной несжимаемой жидкости до вязкого газа. Неточность [19] состоит в том, что решение одного из уравнений, имеющее в этой статье номер (22), не единственно в ограниченных областях, в то время как предложенное авторами решение уравнения (22) единственно только в неограниченном случае, когда значение искомой функции полагается равным нулю на бесконечности (данное указание на ошибку [19] публикуется впервые).

Для вычисления скорости $\mathbf{U}$ в общем пространственном случае в [11] был предложен так называемый нелокальный метод, требующий интегрирования вдоль вихревых линий. Это делает расчеты очень громоздкими, и теоретический результат [11] несколько лет не применялся для развития метода ВВД, который оставался двумерным. Однако недавно появился первый пространственный вариант метода ВВД [20], основанный на обобщении [11] двумерных вязких аналогов теорем Гельмгольца [7, 8] на общий пространственный случай. Сложилась ситуация, подобная той, которая была недавно разрешена в [16] для двумерных течений. Появилась проблема неограниченного роста количества вихревых трубок в процессе расчета, но уже в пространственном случае. В настоящей статье с целью преодоления этой проблемы предпринята попытка в общем пространственном случае найти аналог скорости $\mathbf{U}$ работы [16], при которой интенсивность вихревых трубок во время движения менялась бы со временем по заданному закону.

1. Представление динамического уравнения движения жидкости и газа. Поле скорости течения жидкости и газа (от идеальной несжимаемой жидкости до вязкого газа) в общем пространственном случае подчиняется уравнению вида

$$\partial \mathbf{V}/\partial t + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = \mathbf{F} - \boldsymbol{\nabla} f, \tag{1}$$

где t — время, $\mathbf{F}$ — удельная плотность всех непотенциальных сил, а f — некоторое скалярное поле, содержащее в качестве слагаемого удельную кинетическую энергию $\mathbf{V}^2/2$. Ниже считаем все параметры течения достаточно гладкими для обоснованности выкладок и рассуждений. Пусть $\alpha = \alpha(t)$ — произвольная гладкая функция времени.

Воспользуемся идеей доказательства существования скорости переноса вихревых трубок с сохранением их интенсивности, которое было предложено и применено Г. Б. Сизых в работе [11] (вклад другого соавтора [11], В. В. Маркова, состоит в обнаружении неоднозначности такой скорости). В пространственной области вихревого течения ($\boldsymbol{\Omega} \neq \mathbf{0}$) рассмотрим такую плоскую область σ, нормаль к которой во всех точках имеет острый угол с вихревыми линиями, пересекающими σ в течение некоторого отрезка времени $[t_1, t_2]$. Выделим пространственный односвязный фрагмент G_σ, который принадлежит пересечению всех вихревых трубок, проходящих через σ в различные моменты времени $t \in [t_1, t_2]$, и содержит σ. Пусть на поверхности σ задана любая не зависящая от времени функция g_σ. Интегрированием вдоль вихревых линий для каждого t из $[t_1, t_2]$ продолжим g_σ из σ в G_σ функцией $g(x, y, z, t)$, градиент которой удовлетворяет равенству

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\nabla} g = \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{F} + \alpha \mathbf{V}). \tag{2}$$

Рассмотрим векторное произведение

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{F} + \alpha\mathbf{V} - \boldsymbol{\nabla} g)) = \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{F} + \alpha\mathbf{V} - \boldsymbol{\nabla} g)) - (\mathbf{F} + \alpha\mathbf{V} - \boldsymbol{\nabla} g)\boldsymbol{\Omega}^2,$$

из которого с учетом (2) получим

$$\mathbf{F} = -\boldsymbol{\Omega} \times \frac{\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{F} + \alpha\mathbf{V} - \boldsymbol{\nabla} g)}{\boldsymbol{\Omega}^2} - \alpha\mathbf{V} + \boldsymbol{\nabla} g. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1), после перегруппировки слагаемых имеем

$$\partial\, \mathbf{V}/\partial t + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U} = -\alpha\mathbf{V} + \boldsymbol{\nabla}(g - f), \tag{4}$$

где

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} + \frac{\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{F} + \alpha\mathbf{V} - \boldsymbol{\nabla} g)}{\boldsymbol{\Omega}^2}. \tag{5}$$

2. Критерий Зоравского. Далее воспользуемся представлением о движении частиц воображаемой жидкости, впервые предложенном в [11, 21] и продуктивно использующимся в последнее время [22–28]. Для этого сформулируем критерий Зоравского [29, 30], который также известен как теорема Фридмана [31], в терминах движения вихревых трубок вместе с частицами воображаемой среды.

Пусть G — область пространства, заполненная одновременно двумя воображаемыми жидкостями, которые никак не взаимодействуют между собой (и не препятствуют движению друг друга). Частицы первой воображаемой жидкости движутся со скоростью $\mathbf{U}(x, y, z, t)$, а частицы второй — со скоростью $\tilde{\mathbf{V}}(x, y, z, t)$. Течение второй воображаемой жидкости является вихревым ($\tilde{\boldsymbol{\Omega}} = \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{V}} \neq \mathbf{0}$) в течение некоторого интервала времени (t_1, t_2). Пусть в области G при $t \in (t_1, t_2)$ завихренность второй воображаемой жидкости $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ и скорость первой воображаемой жидкости $\mathbf{U}$ связаны уравнением

$$\partial\, \tilde{\boldsymbol{\Omega}}/\partial t + \operatorname{rot}(\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{U}) = \mathbf{0}. \tag{6}$$

Тогда, как следует из критерия Зоравского, при $t \in (t_1, t_2)$ вихревые линии и вихревые трубки $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ двигаются со скоростью $\mathbf{U}$, а интенсивность вихревых трубок (равная циркуляции $\tilde{\Gamma}$ скорости $\tilde{\mathbf{V}}$ по любому контуру, единожды опоясывающему трубку поля $\tilde{\mathbf{\Omega}}$) сохраняется, пока эти частицы находятся внутри G.

Это следствие будет использовано ниже при исследовании связи поля завихренности реальной жидкости $\mathbf{\Omega}$ с полями скоростей частиц некоторых воображаемых жидкостей.

3. Движение вихревых трубок. В этом разделе для применения критерия Зоравского будем рассматривать сразу две воображаемые жидкости с использованием поля скорости реальной жидкости $\mathbf{V}$. Считаем, что частицы первой воображаемой жидкости движутся со скоростью $\mathbf{U}$, определяемой через $\mathbf{V}$ по формуле (5), а частицы второй воображаемой жидкости — со скоростью $\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V} \exp\left(\int_{t_1}^{t} \alpha(\tau)\, d\tau\right)$. Подставляя $\mathbf{V} = \tilde{\mathbf{V}} \exp\left(-\int_{t_1}^{t} \alpha(\tau)\, d\tau\right)$[1] в (4), получаем

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{U} = \mathbf{\nabla}(g - f) \exp\left(\int_{t_1}^{t} \alpha(\tau)\, d\tau\right). \tag{7}$$

Применяя оператор ротации к левой и правой частям (7), приходим к уравнению, имеющему вид (6): $\partial \tilde{\mathbf{\Omega}}/\partial t + \operatorname{rot}(\tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{U}) = \mathbf{0}$. Следовательно (критерий Зоравского), вихревые трубки $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ перемещаются вместе с частицами первой воображаемой жидкости, движущимися со скоростью (5). При этом циркуляция $\tilde{\Gamma}$ скорости $\tilde{\mathbf{V}}$ второй воображаемой жидкости по контурам, перемещающимся вместе с частицами первой воображаемой жидкости со скоростью (5), сохраняется с течением времени и равна $\tilde{\Gamma}(t) = \tilde{\Gamma}(t_1)$. Учитывая, что завихренность второй воображаемой жидкости $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ и завихренность реальной жидкости $\mathbf{\Omega}$ связаны соотношением $\mathbf{\Omega} = \tilde{\mathbf{\Omega}} \exp\left(-\int_{t_1}^{t} \alpha(\tau)\, d\tau\right)$, приходим к основному результату. *Вихревые линии и вихревые трубки поля скорости* (*реальной*) *жидкости перемещаются вместе с частицами воображаемой жидкости, движущимися со скоростью* (5), *и при этом перемещении интенсивность всех вихревых трубок меняется по закону*

$$\Gamma(t) = \Gamma(t_1) \exp\left(-\int_{t_1}^{t} \alpha(\tau)\, d\tau\right). \tag{8}$$

Таким образом, установлено, что в пространственном случае существует аналог скорости [16], с которой движутся вихревые трубки, а их интенсивность меняется по заданному закону (8). По известной функции $\alpha = \alpha(t)$ эта скорость определяется формулой (5), где $g = g(x, y, z, t)$ получается с помощью интегрирования уравнения (2) вдоль вихревых линий. Должный выбор g_σ позволяет менять в некотором диапазоне величину и направление скорости частиц воображаемой жидкости $\mathbf{U}$. Различным α и g_σ будут соответствовать различные скорости $\mathbf{U}$ и, как следствие, различные точки зрения на эволюцию завихренности, которые, согласно [11], все равноправны.

Как и в [16], предлагаемый новый способ вычисления скорости $\mathbf{U}$ представляет собой обобщение способа [11], поскольку совпадает с последним при $\alpha = 0$.

[1] Таким образом, $\mathbf{\Omega} = \tilde{\mathbf{\Omega}} \exp\left(-\int_{t_1}^{t} \alpha(\tau)\, d\tau\right)$.

4. Вязкая несжимаемая жидкость. Уравнение Навье—Стокса для несжимаемой жидкости имеет вид (1), в котором скалярное поле f может быть представлено как $f = p/\rho + \mathbf{V}^2/2 + \Pi$, где p/ρ — отношение давления к плотности, Π — потенциал объемных сил, а функция $\mathbf{F} = -\nu \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega}$. Поэтому, согласно (5), имеем

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} - \nu(\boldsymbol{\Omega} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega})/\boldsymbol{\Omega}^2 + \alpha(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V})/\boldsymbol{\Omega}^2 + (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\nabla} g)/\boldsymbol{\Omega}^2.$$

При перемещении контуров (доменов) с такой скоростью их интенсивность будет изменяться по закону (8). При реализации метода ВВД с использованием данной скорости функции α и g_σ должны удовлетворять определенным условиям гладкости в течение одного временного шага. Эти требования, вообще говоря, неизвестны, и их определение на сегодняшний день представляет собой актуальную задачу математической физики. Однако для справедливости представленных рассуждений, как следует из курса дифференциальных уравнений, указанные функции должны быть как минимум непрерывно дифференцируемыми в исследуемой области течения. При этом допускается скачкообразное изменение этих функций при переходе от одного временного шага к другому, поскольку это будет соответствовать смене «старой» лагранжевой точке зрения на «новую». Слова «старая» и «новая» взяты в кавычки, потому что эти точки зрения существовали и продолжают существовать на всех временных шагах, но одна из них применяется раньше, а другая — позже. Возможные варианты для выбора α предложены, например, в [16].

5. Неоднозначность скорости U. С математической точки зрения, формула (5) отражает не все возможные варианты скоростей переноса (убывающей) завихренности $\mathbf{U}$, удовлетворяющие уравнению (4). А именно, следует внести добавок $\gamma \boldsymbol{\Omega}$, коллинеарный вектору завихренности $\boldsymbol{\Omega}$ (γ — произвольная гладкая функция времени и пространства), так как на общий вид (4) это не повлияет.

Однако принципиальная неоднозначность в вычислении скорости (5) возникает из-за наличия слагаемого с функцией $g(x, y, z, t)$, которая получается путем интегрирования g_σ вдоль вихревых линий $\boldsymbol{\Omega}$ для каждого момента времени в область вихревого фрагмента жидкости и, таким образом, определяется с точностью до некоторого скалярного поля $W(x, y, z)$, постоянного вдоль этих же вихревых линий: $\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\nabla} W = 0$ (аналогичные рассуждения были применены в работе [11]). Поэтому, опуская детальные выкладки, (5) может быть обобщена как

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} + \frac{\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{F} + \alpha \mathbf{V} - \boldsymbol{\nabla} g + \boldsymbol{\nabla} W)}{\boldsymbol{\Omega}^2} + \gamma \boldsymbol{\Omega}.$$

Заключение. Новая точка зрения на эволюцию завихренности в течениях жидкости и газа, предложенная в [16] для двумерных течений, распространена на общий пространственный случай. Эта точка зрения состоит в представлении эволюции завихренности в виде такого движения вихревых линий и вихревых трубок, при котором интенсивность вихревых трубок меняется по любому наперед заданному временному закону, в частности, при $\alpha = 1$ она экспоненциально убывает. Разумеется, разным законам изменения интенсивности, т. е. разным $\alpha = \alpha(t)$, будут соответствовать разные скорости движения вихревых линий и вихревых трубок. С точки зрения сложности реализации предложенного подхода, связанной с необходимостью интегрирования вдоль вихревых линий, никаких дополнительных проблем по сравнению с [11] не возникает, поскольку в обоих случаях вдоль вихревых линий интегрируется уравнение типа (2).

Предлагаемая новая точка зрения на эволюцию завихренности в пространственных модификациях метода ВВД может быть использована для ограничения количества учитываемых в расчетах векторных трубок.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Вклад авторов: И. А. Максименко — 50%, В. В. Марков — 50%. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарность. Авторы благодарны рецензентам за тщательное прочтение статьи и ценные предложения и комментарии.

Библиографический список

1. Rosenhead L. The formation of vortices from a surface of discontinuity // *P. Roy. Soc. Lond.*, 1931. pp. 170–192. https://doi.org/10.1098/RSPA.1931.0189.
2. Белоцерковский С. М., Ништ М. И. *Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью.* М.: Наука, 1978. 352 с.
3. Cottet G.-H., Koumoutsakos P. *Vortex Methods. Theory and Practice*: Cambridge Univ. Press, 2000. xiv+313 pp. https://doi.org/10.1017/CBO9780511526442.
4. Aparinov A. A., Setukha A. V., Zhelannikov A. I. Numerical simulation of separated flow over three-dimensional complex shape bodies with some vortex method // *AIP Conference Proceedings*, 2014. vol. 1629, no. 1, 69. https://doi.org/10.1063/1.4902260.
5. Апаринов А. А., Крицкий Б. С., Сетуха А. В. Численное моделирование работы несущего винта вертолета вблизи посадочной площадки ограниченных размеров вихревым методом // *Изв. вузов. Авиационная техника*, 2017. №4. С. 21–27.
6. Aparinov A. A., Aparinov V. A., Setukha A. V Supercomputer modeling of parachute flight dynamics // *Supercomputing Frontiers and Innovations*, 2018. vol. 5, no. 3. pp. 121–125. https://doi.org/10.14529/jsfi180323.
7. Голубкин В. Н., Сизых Г. Б. О некоторых общих свойствах плоскопараллельных течений вязкой жидкости // *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1987. №3. С. 176–178.
8. Брутян М. А., Голубкин В. Н., Крапивский П. Л. Об уравнении Бернулли для осесимметричных течений вязкой жидкости // *Уч. зап. ЦАГИ*, 1988. Т. 19, №2. С. 98–100.
9. Дынникова Г. Я. Лагранжев подход к решению нестационарных уравнений Навье–Стокса // *Докл. РАН*, 2004. Т. 399, №1. С. 42–46.
10. Андронов П. Р., Гувернюк С. В., Дынникова Г. Я. *Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок.* М.: Моск. унив., 2006. 184 с.
11. Марков В. В., Сизых Г. Б. Эволюция завихренности в жидкости и газе // *Изв. РАН. МЖГ*, 2015. №2. С. 8–15.
12. Дынникова Г. Я. Расчет обтекания кругового цилиндра на основе двумерных уравнений Навье–Стокса при больших числах Рейнольдса с высоким разрешением в пограничном слое // *Докл. РАН*, 2008. Т. 422, №6. С. 755–757.
13. Dynnikova G. Ya., Dynnikov Ya. A., Guvernyuk S. V., Malakhova T. V. Stability of a reverse Karman vortex street // *Physics of Fluids*, 2021. vol. 33, no. 2, 024102. https://doi.org/10.1063/5.0035575.
14. Kuzmina K., Marchevsky I., Soldatova I., Izmailova Y. On the scope of Lagrangian vortex methods for two-dimensional flow simulations and the POD technique application

for data storing and analyzing // *Entropy*, 2021. vol. 23, no. 1, 118. https://doi.org/10.3390/e23010118.

15. Leonova D., Marchevsky I., Ryatina E. Fast methods for vortex influence computation in meshless lagrangian vortex methods for 2D incompressible flows simulation // *WIT Transactions on Engineering Sciences*, 2019. vol. 126. pp. 255–267. https://doi.org/10.2495/BE420231.
16. Сизых Г. Б. Новый лагранжев взгляд на эволюцию завихренности в двухмерных течениях жидкости и газа // *Изв. вузов. ПНД*, 2022. Т. 30, № 1. С. 30–36. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2022-30-1-30-36.
17. Сизых Г. Б. Эволюция завихренности в закрученных осесимметричных течениях вязкой несжимаемой жидкости // *Уч. зап. ЦАГИ*, 2015. Т. 46, № 3. С. 14–20.
18. Просвиряков Е. Ю. Восстановление радиально-осевой скорости в закрученных осесимметричных течениях вязкой несжимаемой жидкости при лагранжевом рассмотрении эволюции завихренности // *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2021. Т. 31, № 3. С. 505–516. https://doi.org/10.35634/vm210311.
19. Grant J. R., Marshall J. S. Diffusion velocity for a three-dimensional vorticity field // *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 2005. vol. 19, no. 6. pp. 377–390. https://doi.org/10.1007/s00162-005-0004-8.
20. Коцур О. С. Математическое моделирование эллиптического вихревого кольца в вязкой жидкости методом вихревых петель // *Математика и математическое моделирование*, 2021. № 3. С. 46–61. https://doi.org/10.24108/mathm.0321.0000263.
21. Сизых Г. Б. Значение энтропии на поверхности несимметричной выпуклой головной части при сверхзвуковом обтекании // *ПММ*, 2019. Т. 83, № 3. С. 377–383. https://doi.org/10.1134/S0032823519030135.
22. Sizykh G. B. Closed vortex lines in fluid and gas // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019. vol. 23, no. 3. pp. 407–416. https://doi.org/10.14498/vsgtu1723.
23. Миронюк И. Ю., Усов Л. А. Инвариант линии торможения при стационарном обтекании тела завихренным потоком идеальной несжимаемой жидкости // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 4. С. 780–789. https://doi.org/10.14498/vsgtu1815.
24. Коцур О. С. О существовании локальных способов вычисления скорости переноса вихревых трубок с сохранением их интенсивности // *Труды МФТИ*, 2019. Т. 11, № 1. С. 76–85.
25. Миронюк И. Ю., Усов Л. А. Точки торможения на вихревых линиях в течениях идеального газа // *Труды МФТИ*, 2020. Т. 12, № 4. С. 171–176. https://doi.org/10.53815/20726759_2020_12_4_171.
26. Сизых Г. Б. О коллинеарности завихренности и скорости за отошедшим скачком уплотнения // *Труды МФТИ*, 2021. Т. 13, № 3. С. 144–147. https://doi.org/10.53815/20726759_2021_13_3_144.
27. Сизых Г. Б. Второе интегральное обобщение инварианта Крокко для 3D-течений за отошедшим головным скачком // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 3. С. 588–595. https://doi.org/10.14498/vsgtu1861.
28. Сизых Г. Б. Интегральный инвариант течений идеального газа за отошедшим скачком уплотнения // *ПММ*, 2021. Т. 85, № 6. С. 742–747. https://doi.org/10.31857/S0032823521060102.
29. Prim R., Truesdell C. A derivation of Zorawski's criterion for permanent vector-lines // *Proc. Am. Math. Soc.*, 1950. vol. 1. pp. 32–34.
30. Truesdell C. *The Kinematics of Vorticity.* Bloomington: Indiana Univ. Press, 1954. xx+232 pp.
31. Фридман А. А. *Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости.* М.: ОНТИ, 1934. 368 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 1, pp. 179–189
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1907

MSC: 76N15

On a new Lagrangian view on the evolution of vorticity in spatial flows

I. A. Maksimenko[1]***, V. V. Markov***[2,3,4]

[1] Technical University of Munich,
21, Arcisstraße, Munich, 80333, Germany.
[2] Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences,
8, Gubkina st., Moscow, 119991, Russian Federation.
[3] Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics,
1, Michurinsky prospekt, Moscow, 119192, Russian Federation.
[4] Scientific Research Institute of System Analysis,
36, Nakhimovsky Ave., Moscow, 117218, Russian Federation.

Abstract

The purpose of the study is to extend to the spatial case proposed by G. B. Sizykh approach to a two-dimensional vorticity evolution, which is based on the idea of considering a vorticity evolution in the form of such a motion of vortex lines and tubes that the intensity of these tubes changes over time according to a predefined law. **Method.** Thorough analysis is determined by describing the flow velocity field of an ideal incompressible fluid and a viscous gas in the general case, using the idea of the movement of imaginary particles. **Results.** For any given time law of change of velocity circulation (i. e. for an exponential decay) of a real fluid along the contours the method of evaluating the field of velocity of such contours and vortex tubes is proposed (e. g. getting a field of imaginary particles, which transfer them). It is established that for a given time law the velocity of imaginary particles is determined ambiguously, and the method of how to adjust their motion preserving defined law of circulation change is proposed. **Conclusion.** A new Lagrangian approach to the evolution of vorticity in three-dimensional flows is derived, as well as the expressions for the contours' velocity, which imply stated changing over the time of the velocity circulation of a real fluid along any contour. This theoretical result can be utilized in spatial modifications of the viscous vortex domain method to limit the number of vector tubes used in calculations.

Keywords: contour velocity, contour intensity, imaginary fluid motion, Zoravski's criterion, Friedmann's theorem, viscous vortex domain method.

Research Article

Please cite this paper in press as:
Maksimenko I. A., Markov V. V. On a new Lagrangian view on the evolution of vorticity in spatial flows, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 1, pp. 179–189. https://doi.org/10.14498/vsgtu1907 (In Russian).

Authors' Details:

Ivan A. Maksimenko https://orcid.org/0000-0001-8159-8531
Student; Dept. of Civil, Geo and Environmental Engineering;
e-mail: maksimenko.ia@phystech.edu

Vladimir V. Markov https://orcid.org/0000-0003-2188-2201
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Leading Researcher; Dept. of Mechanics[2]; Lab. of Gas Dynamics of Explosion and Reacting Systems[3]; Dept. of Computational Mathematics[4];
e-mail: markov@mi-ras.ru

Received: 7th February, 2022 / Revised: 23rd February, 2022 /
Accepted: 24th February, 2022 / First online: 16th March, 2022

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Wrote the paper: I. A. Maksimenko (50%) and V. V. Markov (50%). The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The research has not had any funding.

Acknowledgments. The authors are grateful to the reviewers for careful reading of the paper and valuable suggestions and comments.

References

1. Rosenhead L. The formation of vortices from a surface of discontinuity, *P. Roy. Soc. Lond.*, 1931, pp. 170–192. https://doi.org/10.1098/RSPA.1931.0189.
2. Belotserkovskii S. M., Nisht M. I. *Otryvnoe i bezotryvnoe obtekanie tonkikh kryl'ev ideal'noi zhidkost'iu* [Separated and Unseparated Ideal Liquid Flow around thin Wings]. Moscow, Nauka, 1978, 352 pp. (In Russian)
3. Cottet G.-H., Koumoutsakos P. *Vortex Methods. Theory and Practice*, Cambridge Univ. Press, 2000, xiv+313 pp. https://doi.org/10.1017/CBO9780511526442.
4. Aparinov A. A., Setukha A. V., Zhelannikov A. I. Numerical simulation of separated flow over three-dimensional complex shape bodies with some vortex method, *AIP Conference Proceedings*, 2014, vol. 1629, no. 1, 69. https://doi.org/10.1063/1.4902260.
5. Aparinov A. A., Kritskii B. S., Setukha A. V. Numerical modeling of helicopter main rotor behavior near a small-scale helideck by the vortex method, *Russ. Aeronaut.*, 2017, vol. 60, no. 4, pp. 500–507. https://doi.org/10.3103/S1068799817040043.
6. Aparinov A. A., Aparinov V. A., Setukha A. V Supercomputer modeling of parachute flight dynamics, *Supercomputing Frontiers and Innovations*, 2018, vol. 5, no. 3, pp. 121–125. https://doi.org/10.14529/jsfi180323.
7. Golubkin V. N., Sizykh G. B. Some general properties of plane-parallel viscous flows, *Fluid Dyn.*, 1987, vol. 22, no. 3, pp. 479–481.
8. Brutyan M. A., Golubkin V. N., Krapivskii P. L. On the Bernoulli equation for axisymmetric viscous fluid flows, *Uch. zap. TsAGI* [TsAGI Science Journal], 1988, vol. 19, no. 2, pp. 98–100 (In Russian).
9. Dynnikova G. Ya. The Lagrangian approach to the solution of non-stationary Navier–Stokes equations, *Dokl. Math.*, 2004, vol. 49, no. 11, pp. 648–652.
10. Andronov P. R., Guvernyuk S. V., Dynnikova G. Ya. *Vikhrevye metody rascheta nestatsionarnykh gidrodinamicheskikh nagruzok* [Vortex Methods for Calculating Non-Stationary Hydrodynamic Loads]. Moscow, Moscow Univ., 2006, 184 pp. (In Russian)
11. Markov V. V., Sizykh G. B. Vorticity evolution in liquids and gases, *Fluid Dyn.*, 2015, vol. 50, no. 2, pp. 186–192. https://doi.org/10.1134/S0015462815020027.
12. Dynnikova G. Ya. Calculation of flow around a circular cylinder on the basis of two-dimensional Navier–Stokes equations at large Reynolds numbers with high resolution in a boundary layer, *Dokl. Phys.*, 2008, vol. 53, no. 10, pp. 544–547. https://doi.org/10.1134/S102833580810011X.
13. Dynnikova G. Ya., Dynnikov Ya. A., Guvernyuk S. V., Malakhova T. V. Stability of a reverse Karman vortex street, *Physics of Fluids*, 2021, vol. 33, no. 2, 024102. https://doi.org/10.1063/5.0035575.
14. Kuzmina K., Marchevsky I., Soldatova I., Izmailova Y. On the scope of Lagrangian vortex methods for two-dimensional flow simulations and the POD technique application for data storing and analyzing, *Entropy*, 2021, vol. 23, no. 1, 118. https://doi.org/10.3390/e23010118.

15. Leonova D., Marchevsky I., Ryatina E. Fast methods for vortex influence computation in meshless lagrangian vortex methods for 2D incompressible flows simulation, *WIT Transactions on Engineering Sciences*, 2019, vol. 126, pp. 255–267. https://doi.org/10.2495/BE420231.
16. Sizykh G. B. New Lagrangian view of vorticity evolution in two-dimensional flows of liquid and gas, *Izv. VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2022, vol. 30, no. 1, pp. 30–36 (In Russian). https://doi.org/10.18500/0869-6632-2022-30-1-30-36.
17. Sizykh G. B. Evolution of vorticity in swirling axisymmetric flows of a viscous incompressible fluid, *TsAGI Science Journal*, 2015, vol. 46, no. 3, pp. 209–217. https://doi.org/10.1615/tsagiscij.2015014086.
18. Prosviryakov E. Yu. Recovery of radial-axial velocity in axisymmetric swirling flows of a viscous incompressible fluid in the Lagrangian consideration of vorticity evolution, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2021, vol. 31, no. 3, pp. 505–516 (In Russian). https://doi.org/10.35634/vm210311.
19. Grant J. R., Marshall J. S. Diffusion velocity for a three-dimensional vorticity field, *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 2005, vol. 19, no. 6, pp. 377–390. https://doi.org/10.1007/s00162-005-0004-8.
20. Kotsur O. S. Mathematical modelling of the elliptical vortex ring in a viscous fluid with the vortex filament method, *Mathematics and Mathematical Modeling*, 2021, no. 3, pp. 46–61 (In Russian). https://doi.org/10.24108/mathm.0321.0000263.
21. Sizykh G. B. Entropy value on the surface of a non-symmetric convex bow part of a body in the supersonic flow, *Fluid Dyn.*, 2019, vol. 54, no. 7, pp. 907–911. https://doi.org/10.1134/S0015462819070139.
22. Sizykh G. B. Closed vortex lines in fluid and gas, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 3, pp. 407–416. https://doi.org/10.14498/vsgtu1723.
23. Mironyuk I. Yu., Usov L. A. The invariant of stagnation streamline for a stationary vortex flow of an ideal incompressible fluid around a body, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 780–789 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1815.
24. Kotsur O. S. On the existence of local formulae of the transfer velocity of local tubes that conserve their strengths, *Proceedings of MIPT*, 2019, vol. 11, no. 1, pp. 76–85 (In Russian).
25. Mironyuk I. Yu., Usov L. A. Stagnation points on vortex lines in flows of an ideal gas, *Proceedings of MIPT*, 2020, vol. 12, no. 4, pp. 171–176 (In Russian). https://doi.org/10.53815/20726759_2020_12_4_171.
26. Sizykh G. B. On the collinearity of vortex and the velocity behind a detached bow shock, *Proceedings of MIPT*, 2021, vol. 13, no. 3, pp. 144–147 (In Russian). https://doi.org/10.53815/20726759_2021_13_3_144.
27. Sizykh G. B. Second integral generalization of the Crocco invariant for 3D flows behind detached bow shock wave, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 588–595 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1861.
28. Sizykh G. B. Integral invariant of ideal gas flows behind a detached bow shock, *Fluid Dyn.*, 2021, vol. 56, no. 8, pp. 1027–1030. https://doi.org/10.1134/S0015462821080097.
29. Prim R., Truesdell C. A derivation of Zorawski's criterion for permanent vector-lines, *Proc. Am. Math. Soc.*, 1950, vol. 1, pp. 32–34.
30. Truesdell C. *The Kinematics of Vorticity*. Bloomington, Indiana Univ. Press, 1954, xx+232 pp.
31. Friedmann A. A. *Opyt gidromekhaniki szhimaemoi zhidkosti* [Experience in the Hydromechanics of Compressible Fluid]. Moscow, ONTI, 1934, 368 pp. (In Russian)