

# Механика деформируемого твёрдого тела



УДК 539.376

## Ползучесть и длительное разрушение узкой прямоугольной мембраны внутри высокой жесткой матрицы при пропорциональной зависимости величины поперечного давления от времени

А. М. Локощенко<sup>1</sup>, Л. В. Фомин<sup>1</sup>,  
Ю. Г. Басалов<sup>1</sup>, П. М. Третьяков<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Россия, 119192, Москва, Мичуринский проспект, 1.

<sup>2</sup> Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1.

### Аннотация

Проведено исследование ползучести и длительного разрушения узкой прямоугольной мембраны в стесненных условиях (внутри высокой жесткой матрицы) при пропорциональной зависимости величины поперечного давления от времени.

Деформирование мембраны рассматривается как последовательность трех стадий. На первой стадии мембрана деформируется в свободных условиях вплоть до касания продольных сторон жесткой матрицы. На второй стадии она деформируется при касании продольных стенок матрицы вплоть до касания ее поперечной стенки. На третьей стадии она уже деформируется при одновременном касании продольных и поперечной стенок матрицы. Деформирование мембраны происходит в условиях

### Научная статья

© Коллектив авторов, 2021

© СамГТУ, 2021 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

### Образец для цитирования

Локощенко А. М., Фомин Л. В., Басалов Ю. Г., Третьяков П. М. Ползучесть и длительное разрушение узкой прямоугольной мембраны внутри высокой жесткой матрицы при пропорциональной зависимости величины поперечного давления от времени // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 4. С. 676–695. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1874>.

### Сведения об авторах

*Александр Михайлович Локощенко*   <https://orcid.org/0000-0002-5462-6055>

доктор физико-математических наук, профессор; заведующий лабораторией; лаб. ползучести и длительной прочности; e-mail: [loko@imec.msu.ru](mailto:loko@imec.msu.ru)

*Леонид Викторович Фомин*  <https://orcid.org/0000-0002-9075-5049>

кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; лаб. ползучести и длительной прочности; e-mail: [fleonid1975@mail.ru](mailto:fleonid1975@mail.ru)

ползучести при двух видах контактных условий: скольжение мембраны вдоль стенок матрицы и прилипание мембраны к стенкам матрицы.

Для анализа постепенного длительного разрушения мембраны используется кинетическая теория ползучести Ю. Н. Работнова, при этом параметр поврежденности материала в данной задаче имеет скалярный характер. Решение системы, состоящей из определяющего и кинетического уравнений, показало, что во время деформирования мембраны на первой стадии в ней независимо от вида контактных условий накапливается поврежденность, близкая к ее предельному значению. В связи с этим процессы ползучести мембраны на второй и третьей стадиях деформирования при обоих рассматриваемых видах контактных условий практически совпадают. Получена зависимость времени до разрушения мембраны при различных скоростях возрастания величины поперечного давления.

Полученные уравнения использованы для анализа ползучести и длительного разрушения мембраны, изготовленной из хромомолибденовой стали 2.15Cr-1Mo steel, деформируемой при переменном поперечном давлении при температуре 600 °С.

**Ключевые слова:** прямоугольная мембрана, жесткая матрица, переменное поперечное давление, ползучесть, длительное разрушение, параметр поврежденности, кинетическая теория, длительная прочность.

Получение: 28 июня 2021 г. / Исправление: 15 октября 2021 г. /

Принятие: 22 ноября 2021 г. / Публикация онлайн: 23 декабря 2021 г.

---

**Введение.** В работе рассматриваются ползучесть и длительное разрушение длинной узкой прямоугольной мембраны, закрепленной вдоль длинных сторон и нагруженной равномерным поперечным давлением  $q$ , которое возрастает пропорционально времени  $t$ . Решение этой задачи при постоянной и кусочно-постоянной зависимостях  $q(t)$  при различных физических и геометрических условиях приведено в монографиях Л. М. Качанова [1], Одквиста [2], Сторакерса [3], Н. Н. Малинина [4] и др. Особый интерес представляет исследование ползучести рассматриваемой мембраны внутри жесткой матрицы. В монографиях [4, 5] рассмотрен цикл задач о ползучести такой мембраны внутри жесткой матрицы. В [5] приведены решения задач при учете различных форм матриц (клиновидной, криволинейной и прямоугольной) при двух типах контактных условий на границе мембраны: идеальное скольжение и прилипание. В [6] исследуется ползучесть длинной узкой мембраны внутри высокой жесткой матрицы при кусочно-постоянной зависимости величины поперечного давления от времени. Исследование проведено при трех вариантах контакта матрицы и мембраны: идеальное скольжение, прилипание и скольжение с учетом трения. В [7] проведено исследование установившейся ползучести мембраны внутри высокой жесткой матрицы при пропорциональной зависимости величины поперечного давления от времени. Расчеты проводятся до времени практически полного прилегания мембраны к матри-

---

Юрий Генрихович Басалов  <https://orcid.org/0000-0002-1416-3690>

ведущий инженер; лаб. ползучести и длительной прочности;

e-mail: [basalov@yandex.ru](mailto:basalov@yandex.ru)

Петр Максимович Третьяков  <https://orcid.org/0000-0002-8221-3127>

студент; механико-математический факультет; e-mail: [pet3tyak@gmail.com](mailto:pet3tyak@gmail.com)

це. Проведено сравнение этих времен при различных контактных условиях. А. Б. Ефимов с соавторами [8] составили обзор основных феноменологических закономерностей, описывающих постановку задачи контактного взаимодействия общего вида. Во всех этих работах исследуется только ползучесть мембраны, а длительное разрушение нигде не рассматривается.

В конце 50-х годов XX века Л. М. Качанов и Ю. Н. Работнов пришли к выводу, что используемые в то время термины механики деформируемого твердого тела (тензоры напряжений и деформаций и вектор перемещений) недостаточны для описания процесса длительного разрушения материалов и элементов конструкций в условиях ползучести. Ими был предложен новый подход к исследованию длительной прочности, этот подход был назван кинетическим. Он основан на использовании введенного Л. М. Качановым [9] параметра сплошности среды  $\psi$  и Ю. Н. Работновым [10] — параметра поврежденности  $\omega$ , связанного с  $\psi$  соотношением  $\psi = 1 - \omega$ , и разработанной впоследствии Ю. Н. Работновым [11] кинетической теории ползучести и длительной прочности. Основой этого подхода при одноосном растяжении является введение скалярного параметра поврежденности  $\omega(t)$ , характеризующего структурное состояние материала при произвольном значении времени  $t$ . Исходному состоянию материала (при  $t = 0$ ) соответствует значение  $\omega = 0$ , при разрушении ( $t = t^*$ ) поврежденность  $\omega(t^*)$  принимает значение 1. При рассмотрении длительной прочности в случае одноосного растяжения Л. М. Качанов [9] дополнил уравнение ползучести дифференциальным кинетическим уравнением, характеризующим изменение параметра  $\psi$  во времени, а Ю. Н. Работнов [12] дополнительно ввел параметр  $\omega$  в уравнение ползучести (для учета влияния процесса накопления поврежденности на процесс ползучести).

**1. Постановка задачи.** Рассматривается деформирование в условиях ползучести длинной узкой прямоугольной мембраны толщины  $H_0$ , закрепленной вдоль длинных сторон и расположенной внутри высокой жесткой матрицы прямоугольной формы, вплоть до ее (мембраны) разрушения (рис. 1). Ширина  $2a$  и длина мембраны и матрицы  $L$  удовлетворяют неравенству  $2a/L \ll 1$ . Отношение высоты матрицы  $b$  к половине ее ширины  $a$  в данной статье удовлетворяет неравенству  $b/a \geq 1$  (высокая матрица).

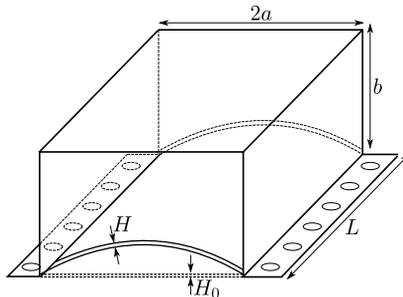


Рис. 1. Общая схема деформирования прямоугольной мембраны внутри жесткой матрицы

[Figure 1. General scheme of deformation of a rectangular membrane inside a rigid matrix]

Рассматривается пропорциональная зависимость величины поперечного давления  $q$  от времени  $t$ :

$$q(t) = \dot{q}t,$$

где  $\dot{q} = \text{const}$  — скорость возрастания величины  $q$ , точкой всюду обозначаются производные по времени  $t$ .

Деформирование мембраны в условиях ползучести рассматривается как последовательность трех стадий. На первой стадии мембрана деформируется в свободных условиях вплоть до касания продольных сторон матрицы. На второй стадии она деформируется при касании продольных стенок матрицы вплоть до касания ее поперечной стенки. На третьей стадии она уже деформируется при одновременном касании продольных и поперечной стенок матрицы.

Задача рассматривается в стандартной цилиндрической системе координат, поэтому при моделировании напряженно-деформированного состояния при  $t > 0$  рассматриваются радиальное  $\sigma_{rr}$ , окружное  $\sigma_{\theta\theta}$  и осевое  $\sigma_{zz}$  главные напряжения и соответствующие компоненты тензора деформаций ползучести  $p_{rr}$ ,  $p_{\theta\theta}$  и  $p_{zz}$ . Недиагональные компоненты тензоров напряжений и деформаций равны нулю.

Рассмотрим элемент мембраны [4]. Принимаем напряжения в элементе равномерно распределенными по толщине и, записывая уравнения равновесия в проекциях на нормаль и касательную, получаем

$$\sigma_{\theta\theta} = q\rho/H, \quad d(\sigma_{\theta\theta}H) = 0, \quad (1)$$

где  $\rho$  — радиус кривизны срединной поверхности,  $H$  — толщина мембраны. Следовательно,

$$\sigma_{\theta\theta}H = \text{const}. \quad (2)$$

Сопоставляя равенства (1) и (2), заключаем, что рассматриваемый радиус кривизны срединной поверхности мембраны  $\rho = \text{const}$  во всех ее точках, т. е. срединная поверхность мембраны при ее деформировании является частью поверхности кругового цилиндра с углом раствора  $2\alpha$  [4]. В этом случае очевидно, что если толщина мембраны до деформирования постоянна, то она останется постоянной и при любых значениях деформации ползучести. Следовательно, согласно равенству (1), окружное напряжение  $\sigma_{\theta\theta}$  по длине окружности радиуса  $\rho$  не изменяется.

Целью данного исследования является определение зависимости времени до разрушения мембраны  $t^*$  от величины скорости возрастания величины поперечного давления  $\dot{q}$ , в случае разрушения на  $i$ -той стадии эти параметры будем обозначать через  $t_i^*$  и  $\dot{q}_i$  соответственно,  $i = 1, 2, 3$ .

Для учета накопления поврежденности в материале мембраны в процессе ползучести вводится тензорный параметр поврежденности  $\omega_{ij}(t)$ , который при активном нагружении ( $\dot{q} > 0$ ) удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\omega_{ij}}{dt} = \frac{3}{2}F(\sigma_{kl}, \omega_{kl}, t)s_{ij}, \quad (3)$$

где  $s_{ij}$  — компоненты девиатора напряжений.

Для описания ползучести мембраны при  $t > 0$  с учетом накопления поврежденности материала вплоть до ее разрушения рассмотрим гипотезу пропорциональности девиаторов напряжений и девиаторов скоростей деформаций

ползучести при учете несжимаемости материала в следующем виде (в дальнейшем  $\omega_u$  представляет собой аналог интенсивности напряжений  $\sigma_u$ ):

$$\begin{cases} \dot{p}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{A\sigma_u^{n-1}}{(1-\omega_u)^n} s_{ij}, & p_{ij}(0) = 0; \\ \sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2}; \\ \omega_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\omega_{rr} - \omega_{\theta\theta})^2 + (\omega_{\theta\theta} - \omega_{zz})^2 + (\omega_{zz} - \omega_{rr})^2}; \end{cases} \quad (4)$$

где  $p_{ij}$  — компоненты тензора деформаций ползучести;  $A, n$  — постоянные величины соответствующих размерностей.

В рассматриваемом плоском деформированном состоянии скорость осевой деформации ползучести  $\dot{p}_{zz}$  принимается равной нулю:

$$\dot{p}_{zz} = 0. \quad (5)$$

Примем, как обычно для тонкостенных цилиндрических оболочек, равенство

$$\sigma_{rr} = 0. \quad (6)$$

В этом случае из гипотезы пропорциональности девиаторов напряжений и скоростей деформаций ползучести (4) при учете (5), (6) следует

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2}\sigma_{\theta\theta}, \quad \sigma_u = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{\theta\theta}.$$

Компоненты девиатора напряжений  $s_{ij}$  в мембране определяются соотношениями

$$s_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{2} > 0, \quad s_{zz} = 0, \quad s_{rr} = -\frac{\sigma_{\theta\theta}}{2} < 0, \quad s_{\theta z} = s_{rz} = s_{r\theta} = 0.$$

Следовательно, в соответствии с (3) в тензоре поврежденности  $\omega_{ij}$  только  $\omega_{\theta\theta} \neq 0$ , т. е. параметр поврежденности в данной задаче является скалярной величиной:  $\omega = \omega(t)$ . Примем кинетическое уравнение (3) в форме

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{B\sigma_{\theta\theta}^k}{(1-\omega)^m}, \quad \omega(0) = 0. \quad (7)$$

Таким образом, ползучесть мембраны внутри прямоугольной матрицы вплоть до разрушения определяется из системы определяющего уравнения

$$\dot{p}_{\theta\theta} = \frac{3}{2} \frac{A\sigma_u^{n-1}}{(1-\omega)^n} s_{\theta\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{A(\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{\theta\theta})^n}{(1-\omega)^n}, \quad p_{\theta\theta}(0) = 0 \quad (8)$$

и кинетического уравнения (7), а момент разрушения  $t = t^*$  характеризуется условием

$$\omega(t^*) = 1. \quad (9)$$

Из уравнения (7) после серии преобразований получаем

$$\omega(t) = 1 - \left( 1 - (m+1)B \int_0^t \sigma_{\theta\theta}^k dt \right)^{\frac{1}{m+1}}, \quad (10)$$

$$(1 - \omega)^n = \left( 1 - (m+1)B \int_0^t \sigma_{\theta\theta}^k dt \right)^{\frac{n}{m+1}}.$$

Подставляя выражение  $(1 - \omega)^n$  в уравнение (8), получаем выражение для скорости окружной компоненты тензора деформации ползучести:

$$\dot{\rho}_{\theta\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2} A \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{\theta\theta} \right)^n \left( 1 - (m+1)B \int_0^t \sigma_{\theta\theta}^k dt \right)^{-\frac{n}{m+1}}. \quad (11)$$

Дальнейшей целью исследований является определение зависимости окружного напряжения  $\sigma_{\theta\theta}$  (1) от скорости возрастания давления  $\dot{q}$  при обоих рассматриваемых контактных условиях (идеальное скольжение и прилипание), а затем с помощью (7) и (9) — анализ задачи о возможности разрушения на той или иной стадии ползучести.

**2. Разрушение мембраны в процессе свободного деформирования в условиях ползучести (первая стадия).** На первой стадии мембрана (плоская в начальном состоянии) под действием давления  $q(t)$  приобретает форму незамкнутой цилиндрической оболочки с центральным углом  $2\alpha$  (см. рис. 2). На этой стадии мембрана деформируется в условиях установившейся ползучести вплоть до касания продольных стенок жесткой матрицы.

Введем безразмерные переменные

$$\bar{H}_i = H_i/H_0, \quad \bar{H}_0 = H_0/a, \quad \bar{b} = b/a, \quad \bar{\rho} = \rho/a, \quad (12)$$

где  $H_0$  — начальная толщина мембраны,  $H_i$  — толщина мембраны на  $i$ -той стадии,  $i = 1, 2, 3$ .

Далее черточки над всеми безразмерными переменными опустим. В этом пункте рассматривается длительное разрушение мембраны при постоянной скорости возрастания поперечного давления  $\dot{q}_1 = \text{const}$ .

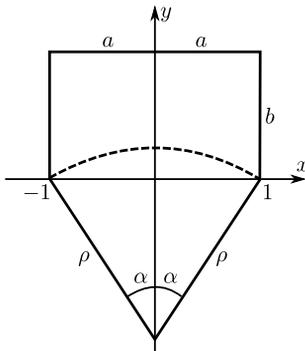


Рис. 2. Схема деформации прямоугольной мембраны на первом этапе [Figure 2. The scheme of deformation of a rectangular membran at the first stage]

Рассматривая два близких деформированных состояния мембраны, определим приращение окружной деформации ползучести:

$$dp_{\theta\theta} = \frac{(\rho + d\rho)(\alpha + d\alpha) - \rho\alpha}{\rho\alpha} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Следовательно, для скорости окружной компоненты деформации ползучести имеем

$$\dot{p}_{\theta\theta} = \frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}. \quad (13)$$

Поскольку

$$\rho \sin \alpha = 1, \quad (14)$$

имеем

$$\dot{\rho} \sin \alpha + \rho \dot{\alpha} \cos \alpha = 0.$$

Поэтому выражение (13) преобразуется к виду

$$\dot{p}_{\theta\theta} = (\alpha^{-1} - \operatorname{ctg} \alpha) \dot{\alpha}. \quad (15)$$

Из условия несжимаемости в случае плоского деформированного состояния имеем

$$\dot{p}_{rr} + \dot{p}_{\theta\theta} + \dot{p}_{zz} = 0, \quad \dot{p}_{zz} = 0, \quad \dot{p}_{rr} = -\dot{p}_{\theta\theta}.$$

Так как скорость радиальной компоненты деформации ползучести

$$\dot{p}_{rr} = \dot{H}_1 / H_1, \quad (16)$$

согласно равенствам (15), (16), с учетом  $\dot{p}_{rr} = -\dot{p}_{\theta\theta}$  получаем

$$\dot{p}_{\theta\theta} = -\frac{\dot{H}_1}{H_1} = (\alpha^{-1} - \operatorname{ctg} \alpha) \dot{\alpha}. \quad (17)$$

Интегрируя (17) при начальном условии  $H_1(0) = 1$ ,  $\alpha(0) = 0$ , получаем

$$H_1(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad H_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} = H_1^0, \quad (18)$$

где  $H_1^0$  — значение толщины мембраны в конце первой стадии, т. е. при  $\alpha = \pi/2$ . Величина  $\sigma_{\theta\theta}$  (1) при учете (12), (14) и (18) принимает следующий вид:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{q_1 \rho}{H_0 H_1} = \frac{\dot{q}_1 t}{H_0} \frac{\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Подставляя выражение (11) в (17), получаем

$$\frac{d\alpha}{dt} = (\alpha^{-1} - \operatorname{ctg} \alpha)^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} A \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{\theta\theta} \right)^n \left( 1 - (m+1) B \int_0^t \sigma_{\theta\theta}^k dt \right)^{-\frac{n}{m+1}}, \quad (19)$$

$$\alpha(0) = 0.$$

В конце первой стадии ( $t = t_1$ ) раствор мембраны  $2\alpha(t_1) = 2\alpha_1$  в случае ее неразрушения удовлетворяет равенству  $2\alpha_1 = \pi$ . Момент времени  $t_1$ , соответствующий окончанию первой стадии, и толщина мембраны  $H_1^0 = H(t_1)$  вычисляются согласно зависимости (18):

$$t_1 = t(\alpha_1), \quad H_1^0 = H_1(t_1) = \frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1} = \frac{2}{\pi}.$$

Определим скорость увеличения поперечного давления  $\dot{q}_1$ , при котором мембрана разрушается в процессе первой стадии ( $t = t_1^*$ ). Для этого воспользуемся уравнением (19) при начальном значении  $\alpha(0) = 0$ . Конечное значение  $\alpha^* = \alpha(t^*)$  определяется с помощью уравнения (10) при  $\omega(t^*) = 1$ :

$$(m + 1)B \int_0^{t_1^*} \sigma_{\theta\theta}^k dt = 1.$$

Далее рассматривается ползучесть мембраны внутри жесткой матрицы при различных контактных условиях в случае, если не произошло разрушения на первой стадии.

**3. Деформирование и разрушение мембраны в условиях идеального скольжения мембраны вдоль сторон матрицы.** Введем координаты поперечного сечения матрицы  $x$  и  $y$  (см. рис. 2) и дополнительные безразмерные координаты:

$$\bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{y} = \frac{y}{a}, \quad \bar{b} = \frac{b}{a}, \quad \bar{x}_0 = \frac{x_0}{a}, \quad \bar{y}_0 = \frac{y_0}{a},$$

где  $x_0, y_0$  — координаты точек касания мембраны и матрицы; далее черточки над этими безразмерными переменными также будем опускать.

**3.1. Деформирование и разрушение мембраны в процессе второй стадии ( $0 \leq y_0 \leq y_0^*, y_0^* \leq b - 1$ ).** Рассмотрим характеристики разрушения мембраны  $\dot{q}_2$  и  $t_2^*$  в процессе второй стадии. При этом исследование ползучести проводится сначала на первой стадии ( $0 \leq t \leq t_1$ ), а затем на второй стадии  $t_1 \leq t \leq t_2^*$ .

Ползучесть мембраны на первой стадии описывается дифференциальным уравнением (19) при  $\alpha(0) = 0$  и  $\alpha(t_1) = \pi/2$ , при этом

$$\sigma_{\theta\theta}(\alpha) = \frac{\dot{q}_2 \alpha t}{H_0 \sin^2 \alpha}.$$

Поврежденность материала в конце первой стадии определяется согласно (10):

$$\omega(t_1) = 1 - \left( 1 - (m + 1)B \int_0^{t_1} \sigma_{\theta\theta}^k dt \right)^{\frac{1}{m+1}} = \omega_1. \quad (20)$$

После окончания первой стадии деформирования ( $t = t_1$ ) наступает вторая стадия ( $t_1 \leq t \leq t_2^*, 0 \leq y \leq y_0^*, \omega_1 \leq \omega \leq 1$ ).

Решение задачи имеет различный характер для относительно высокой матрицы ( $b \geq 1$ ) и относительно низкой матрицы ( $b \leq 1$ ). Для определенности в данной работе будет рассмотрена ползучесть мембраны внутри относительно высокой матрицы.

В связи с осевой симметрией мембраны и матрицы далее рассматривается ползучесть правой половины мембраны в координатах  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq b$ .

При  $t > t_1$  часть поверхности мембраны прилегает к внутренней боковой поверхности матрицы.

При исследовании деформирования мембраны на второй стадии выделим два близких деформированных состояния с радиусом свободной дуги мембраны  $\rho = 1$ : одно характеризуется длиной участка контакта  $y_0$ , а другое — длиной участка контакта  $y_0 + dy_0$ . Согласно определению  $dp_{\theta\theta}$ , имеем

$$dp_{\theta\theta} = \frac{(y_0 + dy_0 + \pi/2) - (y_0 + \pi/2)}{y_0 + \pi/2} = \frac{dy_0}{y_0 + \pi/2} = -\frac{dH_2}{H_2}, \quad (21)$$

$$-\int_{H_1^0}^{H_2(y_0)} \frac{dH_2}{H_2} = \int_0^{y_0} \frac{dy_0}{y_0 + \pi/2},$$

$$H_2(y_0) = \frac{\pi}{2} \frac{H_1^0}{y_0 + \pi/2} = \frac{1}{y_0 + \pi/2}. \quad (22)$$

Толщина в конце второй стадии определяется согласно (22):

$$H_2^0 = H_2(t_2) = \frac{1}{b - 1 + \pi/2}. \quad (23)$$

Окончание второй стадии ( $t = t_2$ ) происходит при разрушении мембраны, т. е. когда  $\omega(t_2^*) = 1$ .

Рассмотрим зависимость параметра поврежденности на второй стадии от времени. Из (7) при  $\omega \geq \omega_1$ ,  $t \geq t_1$  имеем

$$\omega(t) = 1 - \left( (1 - \omega_1)^{m+1} - (m+1)B \int_{t_1}^t \sigma_{\theta\theta}^k dt \right)^{\frac{1}{m+1}}.$$

Тогда при разрушении в момент времени  $t = t_2^*$  из последнего соотношения имеем

$$(1 - \omega_1)^{m+1} = (m+1)B \int_{t_1}^{t_2^*} \sigma_{\theta\theta}^k dt. \quad (24)$$

Из (21) следует

$$\frac{dy_0}{dt} = (y_0 + \pi/2) \dot{p}_{\theta\theta}.$$

Отсюда с учетом (11) получаем

$$\frac{dy_0}{dt} = (y_0 + \pi/2) \frac{\sqrt{3}}{2} A \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{\theta\theta} \right)^n \left( (1 - \omega_1)^{m+1} - (m+1)B \int_{t_1}^t \sigma_{\theta\theta}^k dt \right)^{-\frac{n}{m+1}}. \quad (25)$$

Окружное напряжение на второй стадии при  $\rho = 1$  определяется из соотношений (1) и (22):

$$\sigma_{\theta\theta}(y_0) = \frac{q\rho}{H_0 H_2(y_0)} = \frac{\dot{q}_2 t}{H_0 H_2(y_0)} = \frac{\dot{q}_2 t}{H_0} (y_0 + \pi/2). \quad (26)$$

Определим зависимость времени разрушения  $t_2^*$  от скорости возрастания величины давления  $\dot{q}_2$ , т. е.  $t_2^* = t_2^*(\dot{q}_2)$ . Задавая произвольное значение  $\dot{q}_2$  ( $\dot{q}_2 \leq \dot{q}_1$ ) и подставляя его в выражение (26), находим решение дифференциального уравнения (25) при  $t_1 \leq t \leq t_2^*$ . При этом начальное значение  $y_0(t_1) = 0$ , а конечное значение  $t = t_2^*$  определяется с помощью уравнения (24).

**3.2. Деформирование и разрушение мембраны в процессе третьей стадии ( $b - 1 \leq y_0 \leq y_0^*$ ).** Рассмотрим процесс деформирования и разрушения мембраны при  $\dot{q}_3$  ( $\dot{q}_3 < \dot{q}_2$ ) на третьей стадии. Этот процесс происходит после окончания второй стадии деформирования.

Ползучесть мембраны в процессе первой стадии описывается дифференциальным уравнением (19) при условиях

$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha(t_1) = \pi/2, \quad \sigma_{\theta\theta}(\alpha) = \frac{\dot{q}_3 \alpha t}{H_0 \sin^2 \alpha}.$$

В конце первой стадии (при  $t = t_1$ ) поврежденность материала мембраны определяется равенством (20).

Вторая стадия деформирования характеризуется следующими значениями параметров:

$$t_1 \leq t \leq t_2, \quad 0 \leq y_0 \leq b - 1, \quad \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2.$$

Толщина мембраны  $H_2(y_0)$  на второй стадии ползучести и ее значение в конце второй стадии  $H_2^0$  определяются равенствами (22) и (23) соответственно.

Процесс деформирования мембраны на второй стадии определяется следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dy_0}{dt} = (y_0 + \pi/2) \frac{\sqrt{3}}{2} A \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{\theta\theta} \right)^n \left( (1 - \omega_1)^{m+1} - (m+1)B \int_{t_1}^t \sigma_{\theta\theta}^k dt \right)^{-\frac{n}{m+1}};$$

$$y_0(t_1) = 0, \quad y_0(t_2) = b - 1, \quad \sigma_{\theta\theta}(y_0) = \frac{\dot{q}_3 t}{H_0 H_2(y_0)} = \frac{\dot{q}_3 t}{H_0} (y_0 + \pi/2).$$

Поврежденность материала мембраны  $\omega_2 = \omega_2(t)$  в конце второй стадии определяется с помощью интегрирования дифференциального уравнения (7) при  $t > t_1$ :

$$\omega_2 = 1 - \left( (1 - \omega_1)^{m+1} - (m+1)B \int_{t_1}^{t_2} \sigma_{\theta\theta}^k dt \right)^{\frac{1}{m+1}}. \quad (27)$$

Третья стадия деформирования мембраны характеризуется параметрами

$$t_2 \leq t \leq t_3^*, \quad b - 1 \leq y_0 \leq y_0^*, \quad \omega_2 \leq \omega \leq 1.$$

Кинетика параметра  $\omega(t)$  в процессе третьей стадии определяется из дифференциального уравнения (7) при  $t > t_2$ :

$$\omega(t) = 1 - \left( (1 - \omega_2)^{m+1} - (m+1)B \int_{t_2}^t \sigma_{\theta\theta}^k dt \right)^{\frac{1}{m+1}}. \quad (28)$$

Отсюда для разрушения при  $t = t_3^*$  ( $\omega(t_3^*) = 1$ ) имеем уравнение

$$(1 - \omega_2)^{m+1} = (m + 1)B \int_{t_2}^{t_3^*} \sigma_{\theta\theta}^k dt. \quad (29)$$

На этой стадии мембрана касается обеих сторон матрицы:

$$\begin{aligned} dp_{\theta\theta} &= \frac{(2 - \pi/2)dy_0}{2y_0 - b + 1 + (b - y_0)\pi/2}, \\ - \int_{H_2^0}^{H_3(y_0)} \frac{dH_3}{H_3} &= \ln \frac{H_2^0}{H_3(y_0)} = \ln \frac{1 + b\pi/2 - b + y_0(2 - \pi/2)}{b - 1 + \pi/2}, \\ H_3(y_0) &= \frac{1}{1 + b\pi/2 - b + y_0(2 - \pi/2)}, \\ \dot{y}_0 &= \frac{2y_0 - b + 1 + (b - y_0)\pi/2}{2 - \pi/2} \dot{p}_{\theta\theta}. \end{aligned}$$

Подставляя в последнее уравнение выражение (8) при учете (10) вместо  $\dot{p}_{\theta\theta}$ , получаем

$$\begin{aligned} \dot{y}_0 &= \frac{2y_0 - b + 1 + (b - y_0)\pi/2}{2 - \pi/2} \frac{\sqrt{3}}{2} A \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{\theta\theta} \right)^n \times \\ &\times \left( (1 - \omega_2)^{m+1} - (m + 1) \int_{t_2}^t B \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{\theta\theta} \right)^k dt \right)^{-\frac{n}{m+1}}, \quad (30) \\ \sigma_{\theta\theta}(y_0) &= \frac{\dot{q}_3 t}{H_0} (1 + b\pi/2 - b + y_0(2 - \pi/2))(b - y_0). \end{aligned}$$

При решении дифференциального уравнения (30) начальное значение  $y_0(t_2) = b - 1$ , а конечное значение  $t_3^*$  удовлетворяет равенству (29) с учетом найденного значения для  $\sigma_{\theta\theta}$ .

**4. Деформирование и разрушение мембраны в условиях прилипания мембраны вдоль сторон матрицы.** Как и для предыдущего случая граничных условий рассмотрим вторую и третью стадии деформирования мембраны в условиях ползучести и определим условия ее разрушения.

**4.1. Деформирование и разрушение мембраны в процессе второй стадии ( $0 \leq y_0 \leq y_0^*$ ,  $y_0^* \leq b - 1$ ).** Чтобы определить условия разрушения мембраны в процессе ее деформирования на второй стадии при  $\dot{q}_2$  необходимо последовательно рассмотреть ее ползучесть на первой и второй стадиях.

Ползучесть мембраны на первой стадии при условии ее неразрушения на ней ( $0 \leq t \leq t_1$ ,  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ ,  $0 \leq \omega \leq \omega_1$ ) описывается дифференциальным уравнением (19) при условиях

$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha(t_1) = \pi/2, \quad \sigma_{\theta\theta}(\alpha) = \frac{\dot{q}_2 \alpha t}{H_0 \sin^2 \alpha}.$$

Поврежденность материала мембраны в конце первой стадии определяется равенством (20).

В процессе второй стадии деформирования мембраны зависимость параметра поврежденности от времени определяется соотношением (24). При исследовании второй стадии деформирования мембраны выделим два близких состояния с радиусом свободной дуги мембраны  $\rho = 1$ . Согласно определению  $p_{\theta\theta}$  имеем

$$dp_{\theta\theta} = \frac{(\pi/2 + dy_0) - \pi/2}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} dy_0 = -\frac{dH_2}{H_2},$$

$$-\int_{H_1^0}^{H_2(y_0)} \frac{dH_2}{H_2} = \int_0^{y_0} \frac{2dy_0}{\pi},$$

отсюда

$$H_2(y_0) = H_1^0 \exp\left(-\frac{2}{\pi} y_0\right).$$

Окружная компонента тензора напряжений при учете  $\rho = 1$  удовлетворяет следующему соотношению:

$$\sigma_{\theta\theta}(y_0) = \frac{q\rho}{H_0 H_2(y_0)} \Big|_{\rho=1} = \frac{\dot{q}t}{H_0 H_2(y_0)} = \frac{\dot{q}t}{H_0} \frac{\pi}{2} \exp\left(\frac{2}{\pi} y_0\right). \quad (31)$$

Далее имеем

$$\frac{dy_0}{dt} = \frac{\pi}{2} \frac{dp_{\theta\theta}}{dt} = \frac{\sqrt{3}\pi}{4} A \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{\theta\theta}\right)^n \left( (1-\omega_1)^{m+1} - (m+1)B \int_{t_1}^t \sigma_{\theta\theta}^k dt \right)^{-\frac{n}{m+1}}. \quad (32)$$

Подставляя (31) в (32), получаем дифференциальное уравнение относительно  $y_0$ , при этом начальное значение  $y_0(t_1) = 0$ , конечное значение  $t_2^*$  определяется с помощью уравнения (24).

**4.2. Деформирование и разрушение мембраны в процессе третьей стадии ( $b - 1 \leq y_0 \leq y_0^*$ ).** Рассмотрим ползучесть мембраны при  $\dot{q}_3$  последовательно на первой, второй и третьей стадиях в случае, если разрушение не произошло на первой и второй стадиях.

Ползучесть мембраны в процессе первой стадии описывается дифференциальным уравнением (19) при условиях

$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha(t_1) = \pi/2, \quad \sigma_{\theta\theta}(\alpha) = \frac{\dot{q}_3 \alpha t}{H_0 \sin^2 \alpha}.$$

В конце первой стадии (при  $t = t_1$ ) поврежденность  $\omega(t_1) = \omega_1$  материала мембраны задается соотношением

$$\omega_1 = 1 - \left( 1 - (m+1)B \int_0^{t_1} \sigma_{\theta\theta}^k dt \right)^{\frac{1}{m+1}}.$$

Вторая стадия процесса деформирования мембраны характеризуется следующими значениями параметров:

$$t_1 \leq t \leq t_2, \quad 0 \leq y_0 \leq b - 1, \quad \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2.$$

Процесс ползучести на второй стадии определяется следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dy_0}{dt} = \frac{\sqrt{3}\pi}{4} A \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{\theta\theta} \right)^n \left( (1 - \omega_1)^{m+1} - (m+1)B \int_{t_1}^t \sigma_{\theta\theta}^k dt \right)^{-\frac{n}{m+1}},$$

$$y_0(t_1) = 0, \quad y_0(t_2) = b - 1,$$

$$\sigma_{\theta\theta}(y_0) = \frac{\dot{q}_3 t}{H_0 H_2(y_0)} = \frac{\dot{q}_3 t}{H_0} \frac{\pi}{2} \exp\left(\frac{2}{\pi} y_0\right).$$

Поврежденность материала мембрана в конце второй стадии  $\omega(t_2) = \omega_2$  определяется из уравнения (27).

Третья стадия деформирования мембраны характеризуется параметрами

$$t_2 \leq t \leq t_3^*, \quad b - 1 \leq y_0 \leq y_0^*, \quad \omega_2 \leq \omega \leq 1.$$

На этой стадии ползучесть мембраны при касании ею обеих сторон матрицы описывается следующими уравнениями:

$$dp_{\theta\theta} = \frac{(2 - \pi/2)dy_0}{(b - y_0)\pi/2},$$

$$\dot{y}_0 = \frac{(b - y_0)\pi/2}{2 - \pi/2} \dot{p}_{\theta\theta} = \frac{b - y_0}{(2 - \pi/2)} \frac{\sqrt{3}\pi}{4} A \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{\theta\theta} \right)^n \times$$

$$\times \left( (1 - \omega_2)^{m+1} - (m+1)B \int_{t_2}^t \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{\theta\theta} \right)^k dt \right)^{-\frac{n}{m+1}}; \quad (33)$$

$$- \int_{H_2^0}^{H_3(y_0)} \frac{dH_3}{H_3} = \int_{(b-1)}^{y_0} dp_{\theta\theta}, \quad - \ln \frac{H_3(y_0)}{H_2^0} = - \frac{2 - \pi/2}{\pi/2} \ln(b - y_0),$$

$$H_3(y_0) = \frac{2}{\pi} \exp\left(-\frac{2}{\pi}(b - 1)\right) (b - y_0)^{\frac{4}{\pi} - 1}; \quad (34)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(y_0) = \frac{\dot{q}_3 t}{H_0 H_3(y_0)} (b - y_0). \quad (35)$$

Зависимость  $\omega(t)$  на третьей стадии процесса деформирования при  $t > t_2$  имеет вид (28).

Подставим (34) в (35), а затем в (33). С помощью интегрирования дифференциального уравнения (7) выпишем зависимость  $\omega(t)$  на третьей стадии процесса:

$$\omega(t) = 1 - \left[ (1 - \omega_2)^{m+1} - (m+1)B \int_{t_2}^t \sigma_{\theta\theta}^k dt \right]^{\frac{1}{m+1}}.$$

При разрушении в момент времени  $t = t_3^*$  величина  $\omega(t_3^*) = 1$ , поэтому

$$(1 - \omega_2)^{m+1} = (m+1)B \int_{t_2}^{t_3^*} \sigma_{\theta\theta}^k dt. \quad (36)$$

Вычисление значений  $\dot{q}_3$  и  $t_3^*$ , соответствующих разрушению на третьей стадии деформирования при условиях прилипания, производится аналогично случаю идеального скольжения.

Дифференциальное уравнение (33) решается при  $t_2 \leq t \leq t_3^*$ , при этом начальное условие  $y_0(t_2) = b - 1$ , конечное значение  $t = t_3^*$  удовлетворяет условию (36).

**5. Приложение.** В качестве примера рассмотрим ползучесть и длительное разрушение прямоугольной мембраны, изготовленной из хромомолибденовой стали 2.15Cr-1Mo steel и деформируемой при 600 °C внутри жесткой матрицы высотой  $b = 1.2$ .

Химический состав этой стали [13]:

$$C = 0.06 \%, \quad Si = 0.18 \%, \quad Mn = 0.48 \%, \quad P = 0.008 \%, \quad S = 0.008 \%, \\ Cr = 2.18 \%, \quad Mo = 0.93 \%, \quad Fe - \text{баланс.}$$

Материальные константы этой стали, используемые в кинетической модели ползучести и длительной прочности (7), (8), имеют следующие значения [13]:

$$A = 9.17 \cdot 10^{-17} \text{ МПа/ч}, \quad B = 0.91 \cdot 10^{-17} \text{ МПа/ч}, \quad n = 6.0, \quad m = 4.8, \quad k = 6.7.$$

Кроме того, во всех вычислениях в качестве безразмерной начальной толщины мембраны использовано значение  $H_0 = 0.01$ .

В табл. 1–3 приведены характеристики длительного разрушения мембраны на первой, второй и третьей стадиях деформирования соответственно. Расчеты показали, что характеристики ползучести мембраны вплоть до ее разрушения практически не зависят от вида контактных условий мембраны и матрицы. Это объясняется тем, что при переходе от первой стадии ко второй накопленная поврежденность материала мембраны  $\omega_1$  имеет порядок значений  $0.86 \div 0.94$ , а при переходе от второй стадии к третьей поврежденность  $\omega_2$  уже имеет порядок значений  $0.91 \div 0.94$ . Другими словами, почти весь ресурс поврежденности материала мембраны уже вырабатывается в процессе первой стадии, которая не зависит от вида контактных условий.

На рис. 3 приведена зависимость  $\alpha(t)$  при  $0 \leq t \leq t_1^*$  при различных значениях  $\dot{q}_1$ . На рис. 4 в логарифмических координатах приведена зависимость времени до разрушения мембраны  $t^*$  от величины  $\dot{q}$ , полученная при анализе результатов ползучести мембраны на всех трех стадиях.

Таблица 1

Характеристики длительного разрушения мембраны на первой стадии [Characteristics of long-term destruction of the membrane at the first stage of deformation]

$\dot{q}_1$ , МПа/ч	$t^*$ , hr	$\alpha^*$
2	0.67	1.37
1.5	0.87	1.387
1	1.26	1.4
0.8	1.54	1.414
0.5	2.36	1.44
0.2	5.39	1.48
0.15	6.98	1.5
0.1	10.05	1.56
0.08	12.29	1.57

Таблица 2

Характеристики длительного разрушения мембраны на второй стадии [Characteristics of long-term destruction of the membrane at the second stage of deformation]

$\dot{q}_2$ , МПа/чр	$y_0^*$		$t_1^*$ , hr	$t^* - t_1$ , s	$\omega_1$
	adhesion conditions	slip conditions			
0.02	0.003	0.003	42.71	0	0.938
0.01	0.02	0.02	79.6	0.02	0.929
0.005	0.07	0.067	148.4	0.14	0.923
0.003	0.11	0.105	234.4	0.44	0.916
0.002	0.14	0.136	337.2	0.99	0.91
0.0016	0.159	0.15	411.8	1.46	0.907
0.0014	0.175	0.166	464.2	2.01	0.904
0.0012	0.182	0.171	532.9	2.45	0.902
0.0011	0.188	0.177	576.13	2.65	0.902
0.001	0.197	0.184	627.5	3.37	0.9

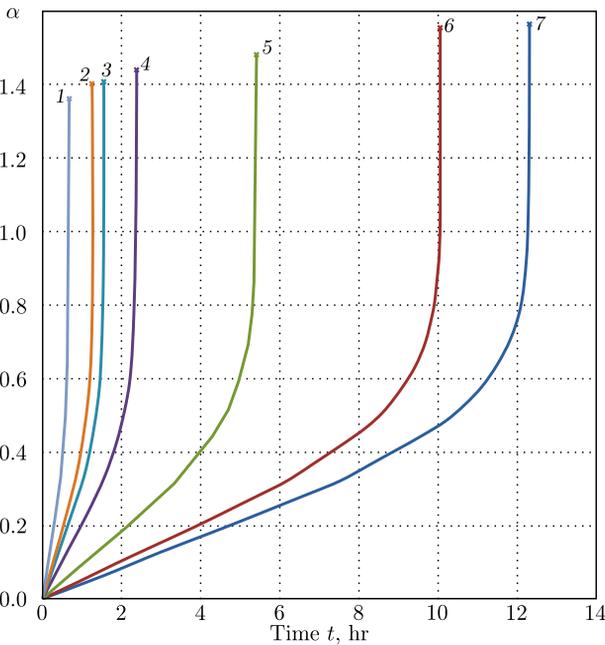


Рис. 3. Зависимость  $\alpha(t)$  в процессе первой стадии деформирования мембраны для различных значений скорости  $\dot{q}_1$  (в МПа/ч): 1 –  $\dot{q}_1 = 2$ , 2 –  $\dot{q}_1 = 1$ , 3 –  $\dot{q}_1 = 0.8$ , 4 –  $\dot{q}_1 = 0.5$ , 5 –  $\dot{q}_1 = 0.2$ , 6 –  $\dot{q}_1 = 0.1$ , 7 –  $\dot{q}_1 = 0.08$

[Figure 3. Dependence  $\alpha(t)$  during the first stage of membrane deformation for different values of the rate  $\dot{q}_1$  (in МПа/ч): 1 –  $\dot{q}_1 = 2$ , 2 –  $\dot{q}_1 = 1$ , 3 –  $\dot{q}_1 = 0.8$ , 4 –  $\dot{q}_1 = 0.5$ , 5 –  $\dot{q}_1 = 0.2$ , 6 –  $\dot{q}_1 = 0.1$ , 7 –  $\dot{q}_1 = 0.08$ ]

Характеристики длительного разрушения мембраны на третьей стадии [Characteristics of long-term destruction of the membrane at the third stage of deformation]

$\dot{q}_3$ , МПа/hr	$y_0^*$		$t_2^*$ , hr	$t^* - t_2$ , s	$\omega_2$
	adhesion conditions	slip conditions			
0.0009	0.211	0.19	689.6	0	0.939
0.0007	0.249	0.216	863.6	0.04	0.937
0.0005	0.305	0.269	1167	0.13	0.93
0.0002	0.479	0.405	2646	0.99	0.92
0.0001	0.634	0.521	4779	4.24	0.91

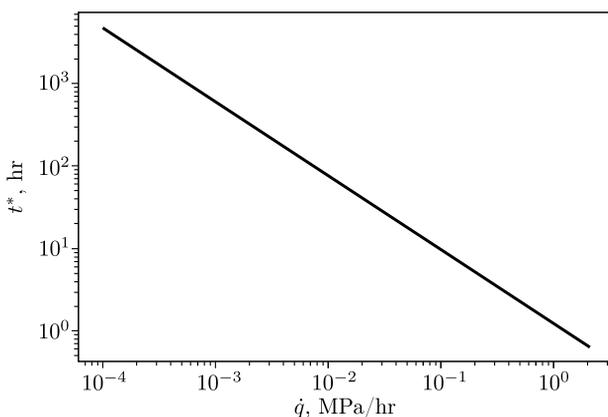


Рис. 4. График зависимости  $t^*$  от  $\dot{q}$  в логарифмических координатах [Figure 4. A plot of  $t^*$  versus  $\dot{q}$  in logarithmic coordinates]

**Заключение.** Исследована ползучесть узкой мембраны внутри высокой прямоугольной матрицы вплоть до ее разрушения при пропорциональной зависимости величины поперечного давления от времени. Рассмотрены два типа контактных условий: идеальное скольжение мембраны относительно матрицы и прилипание мембраны к матрице. Для описания процесса накопления поврежденности материала мембраны использована кинетическая теория Ю. Н. Работнова, при этом параметр поврежденности материала в данной задаче имеет скалярный характер. Решение системы, состоящей из определяющего и кинетического уравнений, проводится при последовательном чередовании первой, второй и третьей стадий деформирования. Модельные расчеты показали, что в процессе первой стадии, не зависящей от контактных условий, накапливается уровень поврежденности материала мембраны, который близок к предельному значению. Поэтому процесс деформирования на последующих стадиях дает практически одинаковые результаты при обоих рассматриваемых контактных условиях (идеальное скольжение и прилипание). Основным результатом проведенного исследования — зависимость времени до разрушения мембраны от скорости возрастания величины поперечного давления.

**Конкурирующие интересы.** Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

**Авторский вклад и ответственность.** Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи; все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

**Финансирование.** Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20–80–00387\_а).

### Библиографический список

1. Качанов Л. М. *Основы механики разрушения*. М.: Наука, 1974. 312 с.
2. Odqvist F. K. G. *Mathematical theory of creep and creep rupture*. Oxford: Clarendon Press, 1974. 200 pp.
3. Storåkers B. *Finite Plastic Deformation of a Circular Membrane under Hydrostatic Pressure* / Acta polytechnica Scandinavica. Mechanical engineering series. vol. 44. Stockholm: Royal Swedish Acad. of Eng. Sci., 1969. 107 pp.
4. Малинин Н. Н. *Ползучесть в обработке металлов*. М.: Машиностроение, 1986. 216 с.
5. Локощенко А. М. *Ползучесть и длительная прочность металлов*. М.: Физматлит, 2016. 504 с.
6. Локощенко А. М., Терауд В. В., Шеварова Е. А. Установившаяся ползучесть длинной мембраны внутри жесткой матрицы при переменном поперечном давлении // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 3. С. 445–468. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1772>.
7. Lokoshchenko A. M., Fomin L. V., Basalov Yu. G. Steady-state creep of a long narrow membrane inside a high rigid matrix at variable transverse pressure // *Proceeding of the 7<sup>th</sup> World Congress on Mechanical, Chemical and Material Engineering (MCM'21)*, 2021 (August, 2021), ICMIE 123. <https://doi.org/10.11159/icmie21.123>.
8. Ефимов А. Б., Романюк С. Н., Чумаченко Е. Н. Об определении закономерностей трения в процессах обработки металлов давлением // *Изв. РАН. МТТ*, 1995. № 6. С. 82–98.
9. Качанов Л. М. О времени разрушения в условиях ползучести // *Изв. АН СССР. Отд. техн. наук*, 1958. № 8. С. 26–36.
10. Работнов Ю. Н. О механизме длительного разрушения / *Вопросы прочности материалов и конструкций*. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5–7.
11. Работнов Ю. Н. *Ползучесть элементов конструкций*. М.: Наука, 1966. 752 с.
12. Работнов Ю. Н. О разрушении вследствие ползучести // *ПМТФ*, 1963. № 2. С. 113–123.
13. Goyal S., Laha K., Panneer Selvi S., Mathew M. D. Mechanistic approach for prediction of creep deformation, damage and rupture life of different Cr–Mo ferritic steels // *Materials at High Temperatures*, 2014. vol. 31, no. 3. pp. 211–220. <https://doi.org/10.1179/1878641314Y.0000000016>.

MSC: 74A05, 74D10

## Creep and long-term fracture of a narrow rectangular membrane inside a high rigid matrix with proportional dependence on the transverse pressure on time

A. M. Lokoshchenko<sup>1</sup>, L. V. Fomin<sup>1</sup>,  
Yu. G. Basalov<sup>1</sup>, P. M. Tretyakov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Lomonosov Moscow State University,  
Institute of Mechanics,  
1, Michurinsky prospekt, Moscow, 119192, Russian Federation.

<sup>2</sup> Lomonosov Moscow State University,  
Department of Mechanics and Mathematics,  
1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation.

### Abstract

In this work, we studied the creep and long-term fracture of a narrow rectangular membrane in confined conditions (inside a high rigid matrix) with a proportional dependence on the magnitude of transverse pressure on time.

Deformation of the membrane is considered as a sequence of three stages. At first stage, the membrane is deformed under free conditions until it touches the longitudinal sides of the rigid matrix. At second stage, the membrane is deformed when it touches the longitudinal walls of matrix until it touches its transverse wall. At third stage, the membrane is already deformed while simultaneously touching the longitudinal and transverse walls of matrix. Membrane deformation occurs under creep conditions under two types of contact conditions: sliding of the membrane along the walls of matrix and adhesion of membrane to the walls of matrix. The dependence of the time until the fracture of membrane at different rates of increase in the magnitude of the transverse pressure is obtained.

The analysis of the gradual long-term fracture of the membrane is carried out using the kinetic theory of creep by Yu. N. Rabotnov, while the parameter of material damage in this problem has a scalar character. The solution

---

### Research Article

© Authors, 2021

© Samara State Technical University, 2021 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

#### Please cite this paper in press as:

Lokoshchenko A. M., Fomin L. V., Basalov Yu. G., Tretyakov P. M. Creep and long-term fracture of a narrow rectangular membrane inside a high rigid matrix with proportional dependence on the transverse pressure on time, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 676–695. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1874> (In Russian).

#### Authors' Details:

Alexander M. Lokoshchenko  <https://orcid.org/0000-0002-5462-6055>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Laboratory; Lab. of Creep and Long-Term Strength; e-mail: [loko@imec.msu.ru](mailto:loko@imec.msu.ru)

Leonid V. Fomin  <https://orcid.org/0000-0002-9075-5049>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Senior Researcher; Lab. of Creep and Long-Term Strength; e-mail: [lfleonid1975@mail.ru](mailto:lfleonid1975@mail.ru)

of the system consisting of constitutive and kinetic equations showed that during the membrane deformation at the first stage regardless of the type of contact conditions, the level of damage accumulates in the membrane, which is close to its limiting value. In this regard, the creep processes of the membrane at second and third stages of deformation under both considered types of contact conditions practically coincide.

The obtained equations are used to analyze the creep and long-term fracture of a membrane made of 2.15Cr-1Mo steel, which is deformed under variable transverse pressure at a temperature of 600 °C.

**Keywords:** rectangular membrane, rigid matrix, variable transverse pressure, creep, long-term fracture, damage parameter, kinetic theory, long-term strength.

Received: 28<sup>th</sup> June, 2021 / Revised: 15<sup>th</sup> October, 2021 /

Accepted: 22<sup>nd</sup> November, 2021 / First online: 23<sup>rd</sup> December, 2021

---

**Competing interests.** We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

**Authors' contributions and responsibilities.** Each author has participated in the article concept development; the authors contributed equally to this article. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

**Funding.** This study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-80-00387\_a).

## References

1. Kachanov L. M. *Osnovy mekhaniki razrusheniia* [Fundamentals of Fracture Mechanics]. Moscow, Nauka, 1974, 312 pp. (In Russian)
2. Odqvist F. K. G. *Mathematical theory of creep and creep rupture*. Oxford, Clarendon Press, 1974, 200 pp.
3. Storåkers B. *Finite Plastic Deformation of a Circular Membrane under Hydrostatic Pressure*, Acta polytechnica Scandinavica. Mechanical engineering series, vol.44. Stocholm, Royal Swedish Acad. of Eng. Sci., 1969, 107 pp.
4. Malinin N. N. *Polzuchest' v obrabotke metallov* [Creep in Metal Forming]. Moscow, Mashinostroenie, 1986, 216 pp. (In Russian)
5. Lokoshchenko A. M. *Creep and Long-term Strength of Metals*. Boca, Raton, CRC Press, 2018, xviii+545 pp.. <https://doi.org/10.1201/b22242>.
6. Lokoshchenko A. M., Teraud W. V., Shevarova E. A. The steady-state creep of long membrane in a rigid matrix at a variable transverse pressure, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 445–468 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1772>.
7. Lokoshchenko A. M., Fomin L. V., Basalov Yu. G. Steady-state creep of a long narrow membrane inside a high rigid matrix at variable transverse pressure, *Proceeding of the 7<sup>th</sup> World Congress on Mechanical, Chemical and Material Engeneering (MCM'21)*, 2021 (August, 2021), ICMIE 123. <https://doi.org/10.11159/icmie21.123>.

---

Yuriy G. Basalov  <https://orcid.org/0000-0002-1416-3690>

Lead Engineer; Lab. of Creep and Long-Term Strength; e-mail: [basalov@yandex.ru](mailto:basalov@yandex.ru)

Petr M. Tretyakov  <https://orcid.org/0000-0002-8221-3127>

Student; Dept. of Mechanics and Mathematics; e-mail: [pet3tyakov@gmail.com](mailto:pet3tyakov@gmail.com)

8. Efimov A. B., Romanyuk S. N., Chumachenko E. N. On the determination of the regularities of friction in the processes of metal forming by pressure, *Mec. Solids*, 1995, no. 6, pp. 82–98 (In Russian).
9. Kachanov L. M. Time of the rupture process under creep conditions, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Otd. Techn. Nauk*, 1958, no. 8, pp. 26–36 (In Russian).
10. Rabotnov Yu. N. Mechanism of long-term destruction, In: *Strength of Materials and Structures*. Moscow, USSR Academy of Sciences, 1959, pp. 5–7 (In Russian).
11. Rabotnov Yu. N. *Creep problems in structural members*. Amsterdam, London, North-Holland Publ. Co., 1969, xiv+822 pp.
12. Rabotnov Yu. N. On fracture as a consequence of creep, *Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.*, 1963, no. 2, pp. 113–123 (In Russian).
13. Goyal S., Laha K., Panneer Selvi S., Mathew M. D. Mechanistic approach for prediction of creep deformation, damage and rupture life of different Cr–Mo ferritic steels, *Materials at High Temperatures*, 2014, vol. 31, no. 3, pp. 211–220. <https://doi.org/10.1179/1878641314Y.0000000016>.