Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 26, № 1. С. 7–35
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1908

Дифференциальные уравнения и математическая физика

УДК 519.633

Численный метод решения начально-краевой задачи для многомерного нагруженного параболического уравнения общего вида с условиями третьего рода

З. В. Бештокова[1,2]

[1] Северо-Кавказский центр математических исследований,
Северо-Кавказский федеральный университет,
Россия, 355017, Ставрополь, ул. Пушкина, 1.

[2] Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова,
Россия, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173.

Аннотация

Исследуется начально-краевая задача для многомерного нагруженного параболического уравнения общего вида с краевыми условиями третьего рода. Для численного решения строится локально-одномерная разностная схема А. А. Самарского с порядком аппроксимации $O(h^2+\tau)$. Методом энергетических неравенств получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках, откуда следуют единственность, устойчивость, а также сходимость решения локально-одномерной разностной схемы к решению исходной дифференциальной задачи в L_2-норме со скоростью, равной порядку аппроксимации разностной схемы. Построен алгоритм численного решения и проведены численные расчеты тестовых примеров, иллюстрирующие полученные в данной работе теоретические выкладки.

Ключевые слова: параболическое уравнение, нагруженное уравнение, разностные схемы, локально-одномерная схема, априорная оценка, устойчивость, сходимость, многомерная задача.

Получение: 11 февраля 2022 г. / Исправление: 18 марта 2022 г. /
Принятие: 21 марта 2022 г. / Публикация онлайн: 31 марта 2022 г.

Научная статья

Образец для цитирования

Бештокова З. В. Численный метод решения начально-краевой задачи для многомерного нагруженного параболического уравнения общего вида с условиями третьего рода // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 1. С. 7–35. EDN: BIBCLS. https://doi.org/10.14498/vsgtu1908.

Сведения об авторе

Зарьяна Владимировна Бештокова https://orcid.org/0000-0001-8020-4406
научный сотрудник; отд. вычислительных методов[1]; аспирант[2];
e-mail: zarabaeva@yandex.ru

Введение. Нагруженными дифференциальными уравнениями в литературе принято называть уравнения, содержащие функции от решения на многообразиях меньшей размерности, чем размерность области определения искомой функции [1]. Краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений возникают при изучении движения подземных вод в задачах управления качеством водных ресурсов, когда в водоем поступает из n источников загрязняющее вещество определенной интенсивности, при построении математической модели переноса дисперсных загрязнений в пограничном слое атмосферы.

Среди таких задач наиболее сложными с точки зрения численной реализации считаются многомерные (по пространственным переменным) задачи. Сложность заключается в значительном увеличении объема вычислений, возникающем при переходе от одномерных задач к многомерным. В этой связи актуальное значение приобретает задача построения экономичных разностных схем для численного решения многомерных задач, обладающих возможностью достаточно эффективной стабилизации решений (устойчивостью) и требующих при переходе со слоя на слой затраты числа арифметических операций Q, пропорционального числу узлов сетки, так что $Q = O(h^{-p})$, где $h = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant p} h_i$, p — размерность области, h_i — шаг сетки по направлению x_i.

Настоящая работа посвящена построению локально-одномерных (экономичных) разностных схем для численного решения начально-краевой задачи для многомерного нагруженного параболического уравнения общего вида с краевыми условиями третьего рода, суть которой состоит в сведении перехода со слоя на слой к последовательному решению ряда одномерных задач по каждому из координатных направлений. При этом каждая из вспомогательных задач может не аппроксимировать исходную задачу, но в совокупности и в специальных нормах такая аппроксимация имеет место [2–4].

В разработку теории нагруженных дифференциальных уравнений большой вклад внесли идеи работ [5, 6]. Отметим также, что в обзорных работах А. М. Нахушева на многочисленных примерах показана практическая и теоретическая важность исследований нагруженных дифференциальных уравнений. Одним из методов приближенного решения краевых задач для дифференциальных уравнений является предложенный А. М. Нахушевым метод редукции интегро-дифференциальных уравнений к нагруженным дифференциальным уравнениям. В его работе [1] впервые указана связь нелокальных задач с нагруженными уравнениями. Нелокальные задачи типа Бицадзе—Самарского для уравнений Лапласа и теплопроводности эквивалентно редуцированы к локальным задачам для нагруженных дифференциальных уравнений.

1. Постановка задачи. В цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \leqslant t \leqslant T]$, основанием которого является p-мерный прямоугольный параллелепипед

$$\overline{G} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) : 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \ldots, p\}$$

с границей Γ, $\overline{G} = G \cup \Gamma$, рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$\begin{cases} k_\alpha(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \beta_{-\alpha}u - \mu_{-\alpha}(x,t), \quad x_\alpha = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ -k_\alpha(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \beta_{+\alpha}u - \mu_{+\alpha}(x,t), \quad x_\alpha = l_\alpha, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \tag{3}$$

где

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big) + r_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \\ - \sum_{s=1}^{m} q_{s_\alpha}(x,t)u(x_1,\ldots,x_{\alpha-1},x_\alpha^s,x_{\alpha+1},\ldots,x_p,t),$$

$$k_\alpha(x,t) \in C^{3,1}(\overline{Q}_T);\ r_\alpha(x,t),\ q_{s_\alpha}(x,t),\ f(x,t) \in C^{2,1}(\overline{Q}_T);$$
$$0 < c_0 \leqslant k_\alpha(x,t) \leqslant c_1;$$
$$|r_\alpha(x,t)|,\ |k_{x_\alpha}(x,t)|,\ |r_{x_\alpha}(x,t)|,\ |q_{s_\alpha}(x,t)|,\ |\beta_{\pm\alpha}(x,t)| \leqslant c_2;$$

x_α^s — фиксированная точка интервала $(0, l_\alpha)$, $s = 1,2,\ldots,m$; c_0, c_1, c_2 — положительные постоянные; $Q_T = G \times (0 < t \leqslant T]$; $\mu_{\pm\alpha}(x,t)$ — непрерывные функции.

В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты уравнения и граничных условий из задачи (1)–(3) удовлетворяют необходимым по ходу изложения условиям, обеспечивающим нужную гладкость решения $u(x,t)$ в цилиндре $\overline{Q}_T$.

С помощью выбора коэффициентов $q_{s_\alpha}(x,t)$ можно регулировать интенсивность источников (стоков) в точках x_α^s.

Далее через M_i, $i = 1,2,\ldots,$ будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от входных данных исходной дифференциальной задачи (1)–(3).

Допуская существование регулярного решения задачи (1)–(3) в цилиндре $\overline{Q}_T$, получим априорную оценку для ее решения. Для получения априорной оценки воспользуемся методом энергетических неравенств. Умножим уравнение (1) скалярно на u и получим энергетическое тождество:

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial t}, u\Big) = \Big(\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big), u\Big) + \Big(\sum_{\alpha=1}^{p} r_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}, u\Big) - \\ - \Big(\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{s=1}^{m} q_{s_\alpha}(x,t)u(x_1,\ldots,x_{\alpha-1},x_\alpha^s,x_{\alpha+1},\ldots,x_p,t), u\Big) + \big(f(x,t),u\big). \tag{4}$$

Воспользуемся скалярным произведением и нормой:

$$u_x^2 = \sum_{\alpha=1}^{p} u_{x_\alpha}^2, \quad \|u\|^2_{L_2(0,l_\alpha)} = \int_0^{l_\alpha} u^2(x,t)\,dx_\alpha,$$

$$(u,v)=\int_G uv\,dx,\quad (u,u)=\|u\|_0^2,\quad \|u\|_0^2=\int_G u^2\,dx.$$

Справедлива следующая [7]

Теорема 1. *Пусть Ω — область с гладкой границей $\partial\Omega$. Для элементов $u(x)$ из $W_2^1(\Omega)$ определены следы на областях Γ гладких гиперповерхностей как элементы $L_2(\Gamma)$, и они непрерывно меняются. Для них справедливы неравенства вида*

$$\int_\Gamma\big[u(x+le_1)-u(x)\big]^2ds\equiv\|u(x+le_1)-u(x)\|_{2,\Gamma}^2\leqslant cl\int_{Q_l(\Gamma)}u_x^2dx,\quad 0\leqslant l\leqslant\delta,$$

и

$$\|u(x)\|_{2,\Gamma}^2\leqslant c\Big[\frac{1}{\delta}\|u(x)\|_{2,Q_\delta(\Gamma)}^2+\delta\|u_x(x)\|_{2,Q_\delta(\Gamma)}^2\Big],$$

где e_1 — единичный вектор нормали к Γ в точке x, а $Q_l(\Gamma)$ — криволинейный цилиндр, образованный отрезками этих нормалей длины l (δ — наибольшая из тех длин l, при которых $Q_l(\Gamma)\subset\Omega$), c — постоянная, не зависящая от функции $u(x)$.

Для всех элементов $v(x)$ из $W_2^1(\Omega)$ с «кусочно-гладкой границей» справедлива оценка

$$\int_{\partial\Omega}v^2ds\leqslant\bar c_1\int_\Omega\big(|v|\cdot|v_x|+v^2\big)\,dx\leqslant\bar c_1\int_\Omega\Big[\frac{\varepsilon}{\bar c_1}v_x^2+\Big(\frac{\bar c_1}{4\varepsilon}+1\Big)v^2\Big]\,dx\equiv$$
$$\equiv\int_\Omega\big(\varepsilon v_x^2+c_\varepsilon v^2\big)\,dx,\quad \varepsilon>0.$$

Преобразуем интегралы, входящие в тождество (4), с учетом теоремы 1:

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial t},u\Big)=\frac12\frac{\partial}{\partial t}\|u\|_0^2,\tag{5}$$

$$\Big(\sum_{\alpha=1}^p\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big),u\Big)=$$
$$=\sum_{\alpha=1}^p\int_{G'}k_\alpha(x,t)u\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big|_0^{l_\alpha}dx'-\sum_{\alpha=1}^p\int_G k_\alpha(x,t)\Big(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big)^2dx.\tag{6}$$

Далее для оценки слагаемых в правой части применим ε-неравенство Коши:

$$\Big(\sum_{\alpha=1}^p r_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha},u\Big)\leqslant\sum_{\alpha=1}^p\Big(r_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha},u\Big)\leqslant\varepsilon\|u_x\|_0^2+M_1(\varepsilon)\|u\|_0^2,\tag{7}$$

$$-\Big(\sum_{\alpha=1}^p\sum_{s=1}^m q_{s_\alpha}(x,t)u(x_1,\dots,x_{\alpha-1},x_\alpha^s,x_{\alpha+1},\dots,x_p,t),u\Big)=$$
$$=-\sum_{\alpha=1}^p\sum_{s=1}^m u(x_1,\dots,x_{\alpha-1},x_\alpha^s,x_{\alpha+1},\dots,x_p,t)\big(q_{s_\alpha}(x,t),u\big)\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{s=1}^{m}\Big(u^2(x_1,\ldots,x_{\alpha-1},x_\alpha^s,x_{\alpha+1},\ldots,x_p,t)+\big(q_{s_\alpha}(x,t),u\big)^2\Big)\leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{s=1}^{m}\Big(\varepsilon\|u_x\|_0^2+c(\varepsilon)\|u\|_0^2+M_2\big(1,u^2\big)\Big)\leqslant \varepsilon M_3\|u_x\|_0^2+M_4(\varepsilon)\|u\|_0^2, \quad (8)$$

$$\big(f(x,t),u\big)\leqslant \frac{1}{2}\|f\|_0^2+\frac{1}{2}\|u\|_0^2, \quad (9)$$

где $G'=\big\{x'=(x_1,x_2,\ldots,x_{\alpha-1},x_{\alpha+1},\ldots,x_p):\ 0<x_k<l_k, k=1,2,\ldots,\alpha-1,\alpha+1,\ldots,p\big\}$, $dx'=dx_1dx_2\cdots dx_{\alpha-1}dx_{\alpha+1}\cdots dx_p$, $c(\varepsilon)=1/l_\alpha+1/\varepsilon$, $\varepsilon>0$.

Учитывая преобразования (5)–(9), из (4) получаем неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u\|_0^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\int_G k_\alpha(x,t)\Big(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big)^2dx\leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G'} uk_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big|_0^{l_\alpha}dx'+\varepsilon M_5\|u_x\|_0^2+M_6(\varepsilon)\|u\|_0^2+\frac{1}{2}\|f\|_0^2. \quad (10)$$

Первое слагаемое в правой части (10) с учетом (2) оценим следующим образом:

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G'} uk_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big|_0^{l_\alpha}dx'=\sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G'}\Big(k_\alpha(l_\alpha,x',t)u_{x_\alpha}(l_\alpha,x',t)u(l_\alpha,x',t)-$$
$$-k_\alpha(0,x',t)u_{x_\alpha}(0,x',t)u(0,x',t)\Big)dx'=$$
$$=\sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G'}\Big(\mu_{+\alpha}(l_\alpha,x',t)u(l_\alpha,x',t)-\beta_{+\alpha}(l_\alpha,x',t)u^2(l_\alpha,x',t)-$$
$$-\beta_{-\alpha}(0,x't)u^2(0,x',t)+\mu_{-\alpha}(0,x',t)u(0,x',t)\Big)dx'. \quad (11)$$

Из (11), пользуясь теоремой 1 и ε-неравенством Коши, получим оценку

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G'} uk_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big|_0^{l_\alpha}dx'\leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon M_7\|u_x\|_0^2+M_8(\varepsilon)\|u\|_0^2+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G'}(\mu_{-\alpha}^2+\mu_{+\alpha}^2)dx'. \quad (12)$$

Тогда из неравенства (10) с учетом (12) находим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u\|_0^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\int_G k_\alpha(x,t)\Big(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big)^2dx\leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon M_9\|u_x\|_0^2+M_{10}(\varepsilon)\|u\|_0^2+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G'}(\mu_{-\alpha}^2+\mu_{+\alpha}^2)dx'+\frac{1}{2}\|f\|_0^2. \quad (13)$$

Проинтегрируем (13) по τ от 0 до t, тогда получим

$$\|u\|_0^2+\int_0^t\|u_x\|_0^2d\tau\leqslant\varepsilon M_{11}\int_0^t\|u_x\|_0^2d\tau+M_{12}(\varepsilon)\int_0^t\|u\|_0^2d\tau+$$
$$+M_{13}\biggl(\int_0^t\biggl(\|f\|_0^2+\int_{G'}(\mu_{-\alpha}^2+\mu_{+\alpha}^2)dx'\biggr)d\tau+\|u_0(x)\|_0^2\biggr).\quad(14)$$

Выбирая $\varepsilon=1/M_{11}$, из (14) находим

$$\|u\|_0^2\leqslant M_{14}\int_0^t\|u\|_0^2d\tau+$$
$$+M_{15}\biggl(\int_0^t\biggl(\|f\|_0^2+\int_{G'}(\mu_{-\alpha}^2+\mu_{+\alpha}^2)dx'\biggr)d\tau+\|u_0(x)\|_0^2\biggr).\quad(15)$$

На основании леммы Гроноулла [7] из (15) получаем неравенство

$$\|u\|_0^2\leqslant M\biggl(\int_0^t\biggl(\|f\|_0^2+\int_{G'}(\mu_{-\alpha}^2+\mu_{+\alpha}^2)dx'\biggr)d\tau+\|u_0(x)\|_0^2\biggr),\quad(16)$$

где M зависит только от входных данных задачи (1)–(3).

Из априорной оценки (16) следует единственность решения исходной задачи (1)–(3), а также непрерывная зависимость решения задачи от входных данных на каждом временном слое в L_2-норме.

2. Построение локально-одномерной разностной схемы (ЛОС). Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_α с шагом $h_\alpha=l_\alpha/N_\alpha$, $\alpha=1,2,\ldots,p$:

$$\bar\omega_h=\prod_{\alpha=1}^p\bar\omega_{h_\alpha},\quad\bar\omega_{h_\alpha}=\bigl\{x_\alpha^{(i_\alpha)}=i_\alpha\hbar_\alpha:i_\alpha=0,1,\ldots,N_\alpha,\ \alpha=1,2,\ldots,p\bigr\},$$

$$\hbar_\alpha=\begin{cases}h_\alpha, & i_\alpha=1,2,\ldots,N_\alpha-1,\\ h_\alpha/2, & i_\alpha=0,N_\alpha.\end{cases}$$

По аналогии с [8] на отрезке $[0,T]$ также введем равномерную сетку

$$\overline{\omega}_\tau=\{t_j=j\tau,\quad j=0,1,\ldots,j_0\}$$

с шагом $\tau=T/j_0$. Каждый из отрезков $[t_j,t_{j+1}]$ разобьем на p частей, введя точки $t_{j+\alpha/p}=t_j+\tau\alpha/p$, $\alpha=1,2,\ldots,p-1$, и обозначим через $\Delta_\alpha=(t_{j+(\alpha-1)/p},t_{j+\alpha/p}]$ полуинтервал, где $\alpha=1,2,\ldots,p$.

Уравнение (1) перепишем в виде

$$\pounds u=\frac{\partial u}{\partial t}-Lu-f=0,$$

или

$$\sum_{\alpha=1}^p\pounds_\alpha u=0,\quad\pounds_\alpha u=\frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t}-L_\alpha u-f_\alpha,$$

где $f_\alpha(x,t)$, $\alpha = 1,2,\ldots,p$, — произвольные функции, обладающие той же гладкостью, что и $f(x,t)$, удовлетворяющие условию нормировки $\sum_{\alpha=1}^{p} f_\alpha = f$.

На каждом полуинтервале Δ_α, $\alpha = 1,2,\ldots,p$, будем последовательно решать задачи

$$\pounds_\alpha \vartheta_\alpha = \frac{1}{p}\frac{\partial \vartheta_{(\alpha)}}{\partial t} - L_\alpha \vartheta_{(\alpha)} - f_\alpha = 0, \quad x \in G, \quad t \in \Delta_\alpha, \quad \alpha = 1,2,\ldots,p, \tag{17}$$

$$\begin{cases} k_\alpha \dfrac{\partial \vartheta_{(\alpha)}}{\partial x_\alpha} = \beta_{-\alpha}\vartheta_{(\alpha)} - \mu_{-\alpha}(x,t), & x_\alpha = 0, \\ -k_\alpha \dfrac{\partial \vartheta_{(\alpha)}}{\partial x_\alpha} = \beta_{+\alpha}\vartheta_{(\alpha)} - \mu_{+\alpha}(x,t), & x_\alpha = l_\alpha, \end{cases} \tag{18}$$

полагая при этом [8, с. 522]

$$\vartheta_{(1)}(x,0) = u_0(x), \quad \vartheta_{(\alpha)}(x,t_{j+(\alpha-1)/p}) = \vartheta_{(\alpha-1)}(x,t_{j+(\alpha-1)/p}), \quad \alpha = 2,3,\ldots p,$$

$$\vartheta_{(1)}(x,t_j) = \vartheta_{(p)}(x,t_j), \quad j = 0,1,\ldots,j_0.$$

Аналогично [8, с. 401] получим для уравнения (17) номера α монотонную схему второго порядка аппроксимации по h_α. Для этого рассмотрим последнее уравнение при фиксированном α с возмущенным оператором $\widetilde{L}_\alpha$:

$$\frac{1}{p}\frac{\partial \vartheta_{(\alpha)}}{\partial t} = \widetilde{L}_\alpha \vartheta_{(\alpha)} + f_{(\alpha)}, \quad t \in \Delta_\alpha, \quad \alpha = 1,2,\ldots,p, \tag{19}$$

где

$$\widetilde{L}_\alpha \vartheta_{(\alpha)} = \varkappa_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial \vartheta_{(\alpha)}}{\partial x_\alpha}\right) + r_\alpha(x,t)\frac{\partial \vartheta_{(\alpha)}}{\partial x_\alpha} - \\ - \sum_{s=1}^{m} q_{s_\alpha}\vartheta_{(\alpha)}(x_1,\ldots,x_{\alpha-1},x_\alpha^s,x_{\alpha+1},\ldots,x_p,t),$$

$\varkappa_\alpha = \dfrac{1}{1+R_\alpha}$, $R_\alpha = \dfrac{1}{2}\dfrac{h_\alpha |r_\alpha|}{k_\alpha}$ — разностное число Рейнольдса,

$$r_\alpha^+ = \frac{1}{2}(r_\alpha + |r_\alpha|) \geqslant 0, \quad r_\alpha^- = \frac{1}{2}(r_\alpha - |r_\alpha|) \leqslant 0, \quad b_\alpha^+ = \frac{r_\alpha^+}{k_\alpha}, \quad b_\alpha^- = \frac{r_\alpha^-}{k_\alpha},$$

$$r_\alpha = r_\alpha^+ + r_\alpha^-, \quad a^{(1_\alpha)} = a_{i_\alpha+1}, \quad a_\alpha = k_\alpha(x_{i_\alpha-1/2},\bar{t}), \quad \varphi_\alpha^{j+\alpha/p} = f_\alpha(x,\bar{t}),$$

$$\hbar_\alpha = \begin{cases} h_\alpha, & i_\alpha = 1,2,\ldots,N_\alpha - 1, \\ h_\alpha/2, & i_\alpha = 0, N_\alpha, \end{cases} \qquad d_{s_\alpha} = q_{s_\alpha}(x_{i_\alpha},\bar{t}), \quad \bar{t} = t^{j+1/2}.$$

Аппроксимируем каждое уравнение (18), (19) номера α двухслойной неявной схемой на полуинтервале $(t_{j+(\alpha-1)/p}, t_{j+\alpha/p}]$, тогда получим цепочку из p одномерных разностных уравнений:

$$\frac{y^{j+\alpha/p} - y^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} = \tilde{\Lambda}_\alpha y^{j+\alpha/p} + \varphi_\alpha^{j+\alpha/p}, \quad \alpha = 1,2,\ldots,p, \quad x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \tag{20}$$

$$\tilde{\Lambda}_\alpha y = \varkappa_\alpha (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\alpha/p})_{x_\alpha} + b_\alpha^+ a_\alpha^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha}^{j+\alpha/p} + b_\alpha^- a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\alpha/p} - \\ - \sum_{s=1}^m d_{s_\alpha} (y_{i_{\alpha_s}}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha_s}}^- + y_{i_{\alpha_s}+1}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha_s}}^+),$$

$$x_{i_{\alpha_s}}^- = \frac{x_\alpha^{(i_{\alpha_s}+1)} - x_\alpha^s}{h_\alpha}, \quad x_{i_{\alpha_s}}^+ = \frac{x_\alpha^s - x_\alpha^{(i_{\alpha_s})}}{h_\alpha}, \quad x_\alpha^{(i_{\alpha_s})} \leqslant x_\alpha^s \leqslant x_\alpha^{(i_{\alpha_s}+1)}.$$

К уравнению (20) надо присоединить граничные и начальное условия. Запишем разностный аналог для граничных условий (2):

$$\begin{cases} a_\alpha^{(1\alpha)} y_{x_\alpha,0}^{j+\alpha/p} = \beta_{-\alpha} y_0^{j+\alpha/p} - \mu_{-\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ -a_\alpha^{(N_\alpha)} y_{\bar{x}_\alpha,N_\alpha}^{j+\alpha/p} = \beta_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{j+\alpha/p} - \mu_{+\alpha}, & x_\alpha = l_\alpha. \end{cases} \tag{21}$$

Условия (21) имеют порядок аппроксимации $O(h_\alpha)$. Повысим порядок аппроксимации до $O(h_\alpha^2)$ на решениях уравнения (17) при каком-либо α:

$$a_\alpha^{(1\alpha)} \vartheta_{x_\alpha,0}^{j+\alpha/p} = \beta_{-\alpha} \vartheta_0^{j+\alpha/p} - \mu_{-\alpha} + O(h_\alpha),$$

$$a_\alpha^{(1\alpha)} = k_{1/2}^{(\alpha)} = k_0 + k_0' \frac{h_\alpha}{2} + k_0'' \frac{h_\alpha^2}{8} + O(h_\alpha^3),$$

$$\frac{\vartheta_{(\alpha)}^1 - \vartheta_{(\alpha)}^0}{h_\alpha} = \vartheta_{(\alpha)x_\alpha,0} = \vartheta_{(\alpha)}' + \vartheta_{(\alpha)}'' \frac{h_\alpha}{2} + O(h_\alpha^2),$$

$$a_\alpha^{(1\alpha)} \vartheta_{x_\alpha,0}^{j+\alpha/p} = k^{(\alpha)} \vartheta_{(\alpha),0}' + (k^{(\alpha)} \vartheta_{(\alpha)}')' \frac{h_\alpha}{2} + O(h_\alpha^2),$$

$$k^{(\alpha)} \vartheta_{(\alpha),0}' = a_\alpha^{(1\alpha)} \vartheta_{x_\alpha,0}^{j+\alpha/p} - \frac{1}{2} h_\alpha (k^{(\alpha)} \vartheta_{(\alpha)}')' + O(h_\alpha^2) = \\ = a_\alpha^{(1\alpha)} \vartheta_{x_\alpha,0}^{j+\alpha/p} - \frac{1}{2} h_\alpha \Big(\frac{1}{p} \frac{\partial \vartheta^{j+\alpha/p}}{\partial t} - r_\alpha \frac{\partial \vartheta_{(\alpha)}}{\partial x_\alpha} + \\ + \sum_{s=1}^m q_{s_\alpha} \vartheta_{(\alpha)}(x_1, \ldots, x_{\alpha-1}, x_\alpha^s, x_{\alpha+1}, \ldots, x_p, t) - f_\alpha \Big) + O(h_\alpha^2).$$

Итак,

$$a_\alpha^{(1\alpha)} \vartheta_{x_\alpha,0}^{j+\alpha/p} - \frac{1}{2} h_\alpha \Big(\frac{1}{p} \vartheta_{\bar{t}}^{j+\alpha/p} - r_\alpha \vartheta_{(\alpha)x_\alpha,0} + \\ + \sum_{s=1}^m q_{s_\alpha} \vartheta_{(\alpha)}(x_1, \ldots, x_{\alpha-1}, x_\alpha^s, x_{\alpha+1}, \ldots, x_p, t) - f_\alpha \Big) = \\ = \beta_{-\alpha} \vartheta_0^{j+\alpha/p} - \sum_{s=1}^m q_{s_\alpha} \vartheta_{(\alpha)}(x_1, \ldots, x_{\alpha-1}, x_\alpha^s, x_{\alpha+1}, \ldots, x_p, t) - \mu_{-\alpha} + \\ + O(h_\alpha^2) + O(h_\alpha \tau). \tag{22}$$

В (22) отбросим величины порядка малости $O(h_\alpha^2)$ и $O(h_\alpha\tau)$, заменим $\vartheta_{(\alpha)}$ на $y_{(\alpha)} = y^{j+\alpha/p}$, тогда (22) перепишется так:

$$\Big(a_\alpha^{(1_\alpha)} + \frac{1}{2}h_\alpha r_\alpha^{(0)}\Big) y_{x_\alpha,0}^{j+\alpha/p} - \frac{1}{2}\frac{h_\alpha}{p} y_{\bar{t}}^{j+\alpha/p} =$$
$$= \beta_{-\alpha} y_0^{j+\alpha/p} + \frac{1}{2}h_\alpha d_\alpha^0 (y_{i_{\alpha_0}}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha_0}}^- + y_{i_{\alpha_0}+1}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha_0}}^+) - \mu_{-\alpha} - \frac{1}{2}h_\alpha f_{\alpha,0}, \quad x_\alpha = 0,$$

или

$$\frac{1}{2}h_\alpha \frac{y_0^{j+\alpha/p} - y_0^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} = \varkappa_{-\alpha} a_\alpha^{(1_\alpha)} y_{x_\alpha,0}^{j+\alpha/p} - \beta_{-\alpha} y_0^{j+\alpha/p} -$$
$$- \frac{1}{2}h_\alpha \sum_{s=1}^{m} d_{s_\alpha}^{(0)} (y_{i_{\alpha_s}}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha_s}}^- + y_{i_{\alpha_s}+1}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha_s}}^+) + \overline{\mu}_{-\alpha},$$

$$\frac{1}{2}h_\alpha \frac{y_{N_\alpha}^{j+\alpha/p} - y_{N_\alpha}^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} = -\varkappa_{+\alpha} a_\alpha^{(N_\alpha)} y_{\bar{x}_\alpha,N_\alpha}^{j+\alpha/p} - \beta_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{j+\alpha/p} -$$
$$- \frac{1}{2}h_\alpha \sum_{s=1}^{m} d_{s_\alpha}^{(N_\alpha)} (y_{i_{\alpha_s}}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha_s}}^- + y_{i_{\alpha_s}+1}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha_s}}^+) + \overline{\mu}_{+\alpha},$$

где

$$\overline{\mu}_{-\alpha} = \mu_{-\alpha} + \frac{1}{2}h_\alpha f_{\alpha,0}, \quad \overline{\mu}_{+\alpha} = \mu_{+\alpha} + \frac{1}{2}h_\alpha f_{\alpha,N_\alpha}, \quad \mu_{\pm\alpha} = \mu_{\pm\alpha}(t_j);$$

$$\varkappa_{-\alpha} = \Big(1 + \frac{1}{2}\frac{h_\alpha |r_\alpha^{(0)}|}{k_\alpha^{(1/2)}}\Big)^{-1}, \quad r_\alpha^{(0)} \leqslant 0; \quad \varkappa_{+\alpha} = \Big(1 + \frac{1}{2}\frac{h_\alpha |r_\alpha^{(N_\alpha)}|}{k_\alpha^{(N_\alpha-1/2)}}\Big)^{-1}, \quad r_\alpha^{(N_\alpha)} \geqslant 0.$$

Таким образом, приходим к цепочке одномерных схем с нелокальными граничными условиями при каждом $\alpha = 1, 2, \ldots, p$:

$$\frac{y^{j+\alpha/p} - y^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} = \tilde{\Lambda}_\alpha y^{j+\alpha/p} + \varphi_\alpha^{j+\alpha/p}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \tag{23}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}h_\alpha \dfrac{y^{j+\alpha/p} - y^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} = \Lambda_\alpha^- y^{(\alpha)} + \overline{\mu}_{-\alpha}, \quad x_\alpha = 0, \\ \dfrac{1}{2}h_\alpha \dfrac{y^{j+\alpha/p} - y^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} = \Lambda_\alpha^+ y^{(\alpha)} + \overline{\mu}_{+\alpha}, \quad x_\alpha = l_\alpha, \end{cases} \tag{24}$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \tag{25}$$

где

$$\tilde{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)} = \varkappa_\alpha (a_\alpha y_{x_\alpha}^{(\alpha)})_{x_\alpha} + b_\alpha^+ a_\alpha^{(+1_\alpha)} y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)} + b_\alpha^- a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)} -$$
$$- \sum_{s=1}^{m} d_{s_\alpha} (y_{i_{\alpha_s}}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha_s}}^- + y_{i_{\alpha_s}+1}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha_s}}^+);$$

$$\Lambda_\alpha^- y^{(\alpha)} = \varkappa_{-\alpha} a_\alpha^{(1_\alpha)} y^{(\alpha)}_{x_\alpha,0} - \beta_{-\alpha} y^{(\alpha)}_0 - \\ - \frac{1}{2} h_\alpha \sum_{s=1}^m d^{(0)}_{s_\alpha} (y^{(\alpha)}_{i_{\alpha_s}} x^-_{i_{\alpha_s}} + y^{(\alpha)}_{i_{\alpha_s}+1} x^+_{i_{\alpha_s}}), \quad x_\alpha = 0;$$

$$\Lambda_\alpha^+ y^{(\alpha)} = -\varkappa_{+\alpha} a_\alpha^{(N_\alpha)} y^{(\alpha)}_{\bar{x}_\alpha,N_\alpha} - \beta_{+\alpha} y^{(\alpha)}_{N_\alpha} - \\ - \frac{1}{2} h_\alpha \sum_{s=1}^m d^{(N_\alpha)}_{s_\alpha} (y^{(\alpha)}_{i_{\alpha_s}} x^-_{i_{\alpha_s}} + y^{(\alpha)}_{i_{\alpha_s}+1} x^+_{i_{\alpha_s}}), \quad x_\alpha = l_\alpha;$$

$$\frac{1}{p} y^{(\alpha)}_{\bar{t}} = \frac{y^{j+\alpha/p} - y^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau}.$$

Задачу (23)–(25) перепишем в операторном виде

$$\frac{y^{j+\alpha/p} - y^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} = \overline{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)} + \Phi_\alpha^{j+\alpha/p}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad x \in \overline{\omega}_{h_\alpha}, \tag{26}$$

$$y(x,0) = u_0(x),$$

где

$$\overline{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)} = \begin{cases} \tilde{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}, & x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \frac{1}{0.5h_\alpha} \Lambda_\alpha^- y^{(\alpha)}, & x_\alpha = 0, \\ \frac{1}{0.5h_\alpha} \Lambda_\alpha^+ y^{(\alpha)}, & x_\alpha = l_\alpha, \end{cases} \qquad \Phi_\alpha = \begin{cases} \varphi_\alpha, & x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \frac{1}{0.5h_\alpha} \overline{\mu}_{-\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ \frac{1}{0.5h_\alpha} \overline{\mu}_{+\alpha}, & x_\alpha = l_\alpha. \end{cases}$$

3. Погрешность аппроксимации ЛОС. Характеристикой точности решения локально-одномерной схемы является разность $z^{j+\alpha/p} = y^{j+\alpha/p} - u^{j+\alpha/p}$, где $u^{j+\alpha/p}$ — решение исходной задачи (1)–(3). Подставляя $y^{j+\alpha/p} = z^{j+\alpha/p} + u^{j+\alpha/p}$ в разностную задачу (23)–(25), получим задачу для погрешности $z^{j+\alpha/p}$:

$$\frac{z^{j+\alpha/p} - z^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} = \tilde{\Lambda}_\alpha z^{j+\alpha/p} + \psi_\alpha^{j+\alpha/p}, \tag{27}$$

где $\psi_\alpha^{j+\alpha/p} = \tilde{\Lambda}_\alpha u^{j+\alpha/p} + \varphi_\alpha^{j+\alpha/p} - \dfrac{u^{j+\alpha/p} - u^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau}$.

Обозначив через

$$\mathring{\psi}_\alpha = \Big(L_\alpha u + f_\alpha - \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^{j+1/2}$$

и замечая, что $\sum_{\alpha=1}^p \mathring{\psi}_\alpha = 0$, если $\sum_{\alpha=1}^p f_\alpha = f$, представим погрешность в (27) в виде суммы $\psi_\alpha^{j+\alpha/p} = \mathring{\psi}_\alpha + \psi_\alpha^*$:

$$\psi_\alpha^{j+\alpha/p} = \tilde{\Lambda}_\alpha u^{j+\alpha/p} + \varphi_\alpha^{j+\alpha/p} - \frac{u^{j+\alpha/p} - u^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} + \mathring{\psi}_\alpha - \mathring{\psi}_\alpha = \\ = (\tilde{\Lambda}_\alpha u^{j+\alpha/p} - L_\alpha u^{j+1/2}) + (\varphi_\alpha^{j+\alpha/p} - f_\alpha^{j+1/2}) - \\ - \Big(\frac{u^{j+\alpha/p} - u^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} - \frac{1}{p}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^{j+1/2}\Big) + \mathring{\psi}_\alpha = \mathring{\psi}_\alpha + \psi_\alpha^*.$$

Очевидно, что

$$\psi_\alpha^* = O(h_\alpha^2+\tau), \quad \overset{\circ}{\psi}_\alpha = O(1), \quad \sum_{\alpha=1}^{p}\psi_\alpha^{j+\alpha/p} = \sum_{\alpha=1}^{p}\overset{\circ}{\psi}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{p}\psi_\alpha^* = O(|h|^2+\tau).$$

Запишем граничное условие $x_\alpha = 0$ так:

$$\frac{1}{2}h_\alpha\frac{y_0^{j+\alpha/p}-y_0^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} = \varkappa_{-\alpha}a_\alpha^{(1_\alpha)}y_{x_\alpha,0}^{j+\alpha/p} - \beta_{-\alpha}y_0^{j+\alpha/p} - \\ -\frac{1}{2}h_\alpha\sum_{s=1}^{m}d_{s_\alpha}^{(0)}(y_{i_{\alpha_s}}^{(\alpha)}x_{i_{\alpha_s}}^- + y_{i_{\alpha_s}+1}^{(\alpha)}x_{i_{\alpha_s}}^+) + \frac{1}{2}h_\alpha f_{\alpha,0} + \mu_{-\alpha}.$$

Пусть $z^{j+\alpha/p} = y^{j+\alpha/p} - u^{j+\alpha/p}$, где u — решение исходной дифференциальной задачи (1)–(3). Подставляя $y^{j+\alpha/p} = z^{j+\alpha/p} + u^{j+\alpha/p}$, получим

$$\frac{1}{2}h_\alpha\frac{z_0^{j+\alpha/p}-z_0^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} = \varkappa_{-\alpha}a_\alpha^{(1_\alpha)}z_{x_\alpha,0}^{j+\alpha/p} - \beta_{-\alpha}z_0^{j+\alpha/p} - \\ -\frac{1}{2}h_\alpha\sum_{s=1}^{m}d_{s_\alpha}^{(0)}(z_{i_{\alpha_s}}^{(\alpha)}x_{i_{\alpha_s}}^- + z_{i_{\alpha_s}+1}^{(\alpha)}x_{i_{\alpha_s}}^+) + \\ +\varkappa_{-\alpha}a_\alpha^{(1_\alpha)}u_{x_\alpha,0}^{j+\alpha/p} - \beta_{-\alpha}u_0^{j+\alpha/p} - \frac{1}{2}h_\alpha\sum_{s=1}^{m}d_{s_\alpha}^{(0)}(u_{i_{\alpha_s}}^{(\alpha)}x_{i_{\alpha_s}}^- + u_{i_{\alpha_s}+1}^{(\alpha)}x_{i_{\alpha_s}}^+) - \\ -\frac{1}{2}h_\alpha\frac{u_0^{j+\alpha/p}-u_0^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} + \frac{1}{2}h_\alpha f_{\alpha,0} + \mu_{-\alpha}.$$

К правой части полученного выражения добавим и вычтем

$$\frac{1}{2}h_\alpha\overset{\circ}{\psi}_\alpha = \frac{1}{2}h_\alpha\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + r_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \\ -\sum_{s=1}^{m}q_{s_\alpha}u(x_1,\ldots,x_\alpha^s,\ldots,x_p,t) + f_\alpha - \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{x_\alpha=0}^{j+1/2}.$$

Тогда

$$\psi_{-\alpha} = \frac{1}{2}h_\alpha\left(f_{\alpha,0} - \frac{u_0^{j+\alpha/p}-u_0^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau}\right) + \varkappa_{-\alpha}a_\alpha^{(1_\alpha)}u_{x_\alpha,0}^{j+\alpha/p} - \beta_{-\alpha}u_0^{j+\alpha/p} - \\ -\frac{1}{2}h_\alpha\sum_{s=1}^{m}d_{s_\alpha}^{(0)}(u_{i_{\alpha_s}}^{(\alpha)}x_{i_{\alpha_s}}^- + u_{i_{\alpha_s}+1}^{(\alpha)}x_{i_{\alpha_s}}^+) + \mu_{-\alpha} - \frac{1}{2}h_\alpha\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + r_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \\ -\sum_{s=1}^{m}q_{s_\alpha}u(x_1,\ldots,x_\alpha^s,\ldots,x_p,t) + f_\alpha - \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{x_\alpha=0}^{j+1/2} + \frac{1}{2}h_\alpha\overset{\circ}{\psi}_\alpha = \\ = \frac{1}{2}h_\alpha\left(f_{\alpha,0} - \frac{u_0^{j+\alpha/p}-u_0^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau}\right) + a_\alpha^{(1_\alpha)}u_{x_\alpha,0}^{j+\alpha/p} + \frac{1}{2}h_\alpha r_\alpha^{(0)}u_{x_\alpha,0}^{j+\alpha/p} - \\ -\beta_{-\alpha}u_0^{j+\alpha/p} - \frac{1}{2}h_\alpha\sum_{s=1}^{m}d_{s_\alpha}^{(0)}(u_{i_{\alpha_s}}^{(\alpha)}x_{i_{\alpha_s}}^- + u_{i_{\alpha_s}+1}^{(\alpha)}x_{i_{\alpha_s}}^+) + \mu_{-\alpha} -$$

$$-\frac{1}{2}h_\alpha\Big[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big(k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big)\Big]^{j+1/2}-\frac{1}{2}h_\alpha\Big(f_{\alpha,0}-\frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^{j+1/2}+$$

$$+\frac{1}{2}h_\alpha\sum_{s=1}^{m}q_{s_\alpha}u(x_1,\ldots,x_\alpha^s,\ldots,x_p,t)-\frac{1}{2}h_\alpha r_\alpha^{(0)}u_{x_\alpha,0}^{j+1/2}+\frac{1}{2}h_\alpha\mathring{\psi}_\alpha+O(h_\alpha\tau)=$$

$$=a_\alpha^{(1_\alpha)}u_{x_\alpha,0}^{j+\alpha/p}+\frac{1}{2}h_\alpha r_\alpha^{(0)}u_{x_\alpha,0}^{j+\alpha/p}-\beta_{-\alpha}u_0^{j+\alpha/p}+\mu_{-\alpha}-$$

$$-\frac{1}{2}h_\alpha\Big[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big(k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big)\Big]^{j+1/2}-\frac{1}{2}h_\alpha r_\alpha(x,t)\frac{\partial u^{j+1/2}}{\partial x_\alpha}+\frac{1}{2}h_\alpha\mathring{\psi}_\alpha+$$

$$+O(h_\alpha^2)+O(h_\alpha\tau)=k_\alpha\frac{\partial u^{j+\alpha/p}}{\partial x_\alpha}+\frac{1}{2}h_\alpha\Big[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big(k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big)\Big]_0^{j+\alpha/p}-\beta_{-\alpha}u_0^{j+\alpha/p}-$$

$$-\frac{1}{2}h_\alpha\Big[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big(k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big)\Big]^{j+1/2}+\mu_{-\alpha}+\frac{1}{2}h_\alpha\mathring{\psi}_\alpha+O(h_\alpha^2)+O(h_\alpha\tau)=$$

$$=\Big(k_\alpha\frac{\partial u^{j+\alpha/p}}{\partial x_\alpha}-\beta_{-\alpha}u_0^{j+\alpha/p}+\mu_{-\alpha}\Big)_{x_\alpha=0}+\frac{1}{2}h_\alpha\mathring{\psi}_\alpha+O(h_\alpha^2)+O(h_\alpha\tau).$$

В силу граничных условий (2) выражение, стоящее в скобках, есть ноль. Поэтому

$$\psi_{-\alpha}=\frac{1}{2}h_\alpha\mathring{\psi}_{-\alpha}+\psi_{-\alpha}^*,\quad \psi_{-\alpha}^*=O(h_\alpha^2+\tau)+O(h_\alpha\tau),$$

имеем

$$\frac{1}{2}h_\alpha\frac{z_0^{j+\alpha/p}-z_0^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau}=\varkappa_{-\alpha}a_\alpha^{(1_\alpha)}z_{x_\alpha,0}^{j+\alpha/p}-\beta_{-\alpha}z_0^{j+\alpha/p}-$$
$$-\frac{1}{2}h_\alpha\sum_{s=1}^{m}d_{s_\alpha}^{(0)}(z_{i_{\alpha_s}}^{(\alpha)}x_{i_{\alpha_s}}^{-}+z_{i_{\alpha_s}+1}^{(\alpha)}x_{i_{\alpha_s}}^{+})+\frac{1}{2}h_\alpha\mathring{\psi}_{-\alpha}+\psi_{-\alpha}^*,$$

$$\frac{1}{2}h_\alpha\frac{z_{N_\alpha}^{j+\alpha/p}-z_{N_\alpha}^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau}=-\varkappa_{+\alpha}a_\alpha^{(N_\alpha)}z_{\bar{x}_\alpha,N_\alpha}^{j+\alpha/p}-\beta_{+\alpha}z_{N_\alpha}^{j+\alpha/p}-$$
$$-\frac{1}{2}h_\alpha\sum_{s=1}^{m}d_{s_\alpha}^{(N_\alpha)}(z_{i_{\alpha_s}}^{(\alpha)}x_{i_{\alpha_s}}^{-}+z_{i_{\alpha_s}+1}^{(\alpha)}x_{i_{\alpha_s}}^{+})+\frac{1}{2}h_\alpha\mathring{\psi}_{+\alpha}+\psi_{+\alpha}^*.$$

Итак, задачу для погрешности $z^{j+\alpha/p}$ запишем в виде

$$\frac{z^{j+\alpha/p}-z^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau}=\tilde{\Lambda}_\alpha z^{j+\alpha/p}+\psi_\alpha^{j+\alpha/p},\quad x_\alpha\in\omega_{h_\alpha},\tag{28}$$

$$\frac{1}{2}h_\alpha\frac{z^{j+\alpha/p}-z^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau}=\Lambda_\alpha^- z^{(\alpha)}+\psi_{-\alpha},\quad x_\alpha=0,$$

$$\frac{1}{2}h_\alpha\frac{z^{j+\alpha/p}-z^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau}=\Lambda_\alpha^+ z^{(\alpha)}+\psi_{+\alpha},\quad x_\alpha=l_\alpha,$$

$$z(x,0)=0,$$

где

$$\psi_\alpha = \mathring{\psi}_\alpha + \psi^*_\alpha, \quad \mathring{\psi}_\alpha = O(1), \quad \psi^*_\alpha = O(h^2_\alpha + \tau), \quad \sum_{\alpha=1}^{p} \mathring{\psi}_\alpha = 0,$$

$$\psi_{-\alpha} = \frac{1}{2} h_\alpha \mathring{\psi}_{-\alpha} + \psi^*_{-\alpha}, \quad \psi_{+\alpha} = \frac{1}{2} h_\alpha \mathring{\psi}_{+\alpha} + \psi^*_{+\alpha},$$

$$\psi_{\pm\alpha} = O(h^2_\alpha + \tau), \quad \mathring{\psi}_{\pm\alpha} = O(1), \quad \sum_{\alpha=1}^{p} \mathring{\psi}_{\pm\alpha} = 0.$$

4. Устойчивость локально-одномерной схемы. Умножим уравнение (26) скалярно на $y^{(\alpha)} = y^{j+\alpha/p}$:

$$\Big[\frac{1}{p} y^{(\alpha)}_{\bar t}, y^{(\alpha)}\Big]_\alpha - \big[\overline{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\big]_\alpha = \big[\Phi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\big]_\alpha, \tag{29}$$

где

$$[u, v] = \sum_{x \in \bar\omega_h} uvH, \quad H = \prod_{\alpha=1}^{p} \hbar_\alpha, \quad [u, v]_\alpha = \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} u_{i_\alpha} v_{i_\alpha} \hbar_\alpha,$$

$$\hbar_\alpha = \begin{cases} h_\alpha, & i_\alpha = 1, 2, \ldots, N_\alpha - 1, \\ h_\alpha/2, & i_\alpha = 0, N_\alpha, \end{cases} \quad \|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)} = \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} y^2 \hbar_\alpha,$$

$$\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} = \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)} H/\hbar_\alpha.$$

Преобразуем каждое слагаемое тождества (29):

$$\Big[\frac{1}{p} y^{(\alpha)}_{\bar t}, y^{(\alpha)}\Big]_\alpha = \frac{1}{2p}\big(\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)}\big)_{\bar t} + \frac{\tau}{2p}\|y_{\bar t}\|^2_{L_2(\alpha)}, \tag{30}$$

где $\|\cdot\|_{L_2(\alpha)}$ означает, что норма берется по переменной x_α при фиксированных значениях остальных переменных.

$$\begin{aligned}
\big[\overline{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\big]_\alpha &= \big(\tilde\Lambda_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\big)_\alpha + \Lambda^-_\alpha y^{(\alpha)} y^{(\alpha)}_0 + \Lambda^+_\alpha y^{(\alpha)} y^{(\alpha)}_{N_\alpha} = \\
&= \big(\varkappa_\alpha (a_\alpha y^{(\alpha)}_{\bar x_\alpha})_{x_\alpha}, y^{(\alpha)}\big)_\alpha + \big(b^+_\alpha a^{(+1_\alpha)}_\alpha y^{(\alpha)}_{x_\alpha}, y^{(\alpha)}\big)_\alpha + \big(b^-_\alpha a_\alpha y^{(\alpha)}_{\bar x_\alpha}, y^{(\alpha)}\big)_\alpha - \\
&- \Big[\sum_{s=1}^{m} d_{s_\alpha}(y^{(\alpha)}_{i_{\alpha_s}} x^-_{i_{\alpha_s}} + y^{(\alpha)}_{i_{\alpha_s}+1} x^+_{i_{\alpha_s}}), y^{(\alpha)}\Big]_\alpha + (\varkappa_{-\alpha} a^{(1_\alpha)}_\alpha y^{(\alpha)}_{x_\alpha,0} - \beta_{-\alpha} y^{(\alpha)}) y^{(\alpha)}_0 - \\
&- (\varkappa_{+\alpha} a^{(N_\alpha)}_\alpha y^{(\alpha)}_{\bar x_\alpha, N_\alpha} + \beta_{+\alpha} y^{(\alpha)}_{N_\alpha}) y^{(\alpha)}_{N_\alpha}.
\end{aligned} \tag{31}$$

Так как

$$\varkappa_\alpha = \frac{1}{1 + R_\alpha} = 1 - \frac{0.5h|r_\alpha|}{k_\alpha} + O(h^2),$$

$\varkappa_\alpha$ заменим на $1 - \frac{0.5h|r_\alpha|}{k_\alpha}$. Тогда выражение (31) перепишем в виде

$$\left[\overline{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right]_\alpha = -\left(\varkappa^{-1} a_\alpha, y^2_{\bar{x}_\alpha}\right]_\alpha + \left(b^+_\alpha a^{(+1_\alpha)}_\alpha y^{(\alpha)}_{x_\alpha}, y^{(\alpha)}\right)_\alpha + \\ + \left(b^-_\alpha a_\alpha y^{(\alpha)}_{\bar{x}_\alpha}, y^{(\alpha)}\right)_\alpha - \left[\sum_{s=1}^m d_{s_\alpha}(y^{(\alpha)}_{i_{\alpha_s}} x^-_{i_{\alpha_s}} + y^{(\alpha)}_{i_{\alpha_s}+1} x^+_{i_{\alpha_s}}), y^{(\alpha)}\right]_\alpha - \\ - \left(a_\alpha y^{(\alpha)}_{\bar{x}_\alpha}, \varkappa_{\bar{x}} y^{(\alpha)}\right]_\alpha - \beta_{-\alpha} y_0^2 - \beta_{+\alpha} y^2_{N_\alpha}, \quad (32)$$

$$\left[\Phi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right]_\alpha = \left(\varphi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right)_\alpha + \overline{\mu}_{-\alpha} y_0^{(\alpha)} + \overline{\mu}_{+\alpha} y^{(\alpha)}_{N_\alpha} = \\ = \left(\varphi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right)_\alpha + \left(\mu_{-\alpha} + \frac{1}{2} h_\alpha f_{\alpha,0}\right)_\alpha y_0^{(\alpha)} \hbar_\alpha + \left(\mu_{+\alpha} + \frac{1}{2} h_\alpha f_{\alpha,N_\alpha}\right) y^{(\alpha)}_{N_\alpha} \hbar_\alpha = \\ = \left[\varphi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right]_\alpha + \mu_{-\alpha} y_0^{(\alpha)} + \mu_{+\alpha} y^{(\alpha)}_{N_\alpha}. \quad (33)$$

С помощью леммы 1 из [9] находим оценки для слагаемых, входящих в правую часть (32):

$$-\left(\varkappa^{-1} a_\alpha, y^2_{\bar{x}_\alpha}\right]_\alpha \leqslant -M_1 \|y_{\bar{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\alpha)},$$

$$-\left(a_\alpha y^{(\alpha)}_{\bar{x}_\alpha}, \varkappa_{\bar{x}} y^{(\alpha)}\right]_\alpha + \left(b^+_\alpha a^{(+1_\alpha)}_\alpha y_{x_\alpha}, y^{(\alpha)}\right)_\alpha + \left(b^-_\alpha a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}, y^{(\alpha)}\right)_\alpha \leqslant \\ \leqslant M_2\left(\varepsilon \|y_{\bar{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\alpha)} + \frac{1}{4\varepsilon}\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)}\right),$$

$$-\left[\sum_{s=1}^m d_{s_\alpha}(y^{(\alpha)}_{i_{\alpha_s}} x^-_{i_{\alpha_s}} + y^{(\alpha)}_{i_{\alpha_s}+1} x^+_{i_{\alpha_s}}), y^{(\alpha)}\right]_\alpha \leqslant \\ \leqslant -(y^{(\alpha)}_{i_{\alpha_s}} x^-_{i_{\alpha_s}} + y^{(\alpha)}_{i_{\alpha_s}+1} x^+_{i_{\alpha_s}}) \left[\sum_{s=1}^m d_{s_\alpha}, y^{(\alpha)}\right]_\alpha \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2}(y^{(\alpha)}_{i_{\alpha_s}} x^-_{i_{\alpha_s}} + y^{(\alpha)}_{i_{\alpha_s}+1} x^+_{i_{\alpha_s}})^2 + \frac{1}{2}\left[\sum_{s=1}^m d_{s_\alpha}, y^{(\alpha)}\right]^2_\alpha \leqslant \\ \leqslant M_3\left(\varepsilon \|y_{\bar{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\alpha)} + c(\varepsilon)\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)}\right),$$

$$-\beta_{-\alpha} y_0^2 - \beta_{+\alpha} y^2_{N_\alpha} \leqslant c_2(y_0^2 + y_N^2) \leqslant c_2\left(\varepsilon \|y_{\bar{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\alpha)} + c(\varepsilon)\|y\|^2_{L_2(\alpha)}\right),$$

$$\left[\varphi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right]_\alpha \leqslant \frac{1}{2}\|\varphi^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)} + \frac{1}{2}\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)},$$

$$\mu_{-\alpha} y_0^{(\alpha)} + \mu_{+\alpha} y^{(\alpha)}_{N_\alpha} \leqslant \frac{\mu^2_{-\alpha}}{2} + \frac{\mu^2_{+\alpha}}{2} + \frac{1}{2}\left[(y_0^{(\alpha)})^2 + (y^{(\alpha)}_{N_\alpha})^2\right] \leqslant \frac{1}{2}\left(\mu^2_{-\alpha} + \mu^2_{+\alpha}\right) + \\ + \varepsilon \|y^{(\alpha)}_{\bar{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\alpha)} + c(\varepsilon)\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)},$$

где $\varepsilon > 0$, $c(\varepsilon) = 1/l_\alpha + 1/\varepsilon$.

Подставляя (30), (33) и все полученные оценки после суммирования по $i_\beta \neq i_\alpha$, $\beta = 1, 2, \ldots, p$, в тождество (29), находим

$$\frac{1}{2p}\left(\|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)_{\bar t} + M_1\|y_{\bar x_\alpha}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)} \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon M_4\|y^{(\alpha)}_{\bar x_\alpha}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + M_5(\varepsilon)\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} +$$
$$+\frac{1}{2}\left(\|\varphi^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \sum_{i_\beta\neq i_\alpha}(\mu^2_{-\alpha}+\mu^2_{+\alpha})H/\hbar_\alpha\right).$$

Выбирая $\varepsilon \leqslant \frac{M_1}{2M_4}$, из последнего находим

$$\frac{1}{2p}\left(\|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)_{\bar t} + \frac{M_1}{2}\|y^{(\alpha)}_{\bar x_\alpha}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)} \leqslant M_6\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} +$$
$$+\frac{1}{2}\left(\|\varphi^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \sum_{i_\beta\neq i_\alpha}(\mu^2_{-\alpha}(t_j)+\mu^2_{+\alpha}(t_j))H/\hbar_\alpha\right). \quad (34)$$

Просуммируем (34) сначала по $\alpha = 1, 2, \ldots, p$:

$$\frac{1}{2\tau}\|y^{j+1}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} - \frac{1}{2\tau}\|y^{j}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \frac{M_1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\|y^{j+\alpha/p}_{\bar x_\alpha}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)} \leqslant$$
$$\leqslant M_6\sum_{\alpha=1}^{p}\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\|\varphi^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \sum_{i_\beta\neq i_\alpha}(\mu^2_{-\alpha}+\mu^2_{+\alpha})H/\hbar_\alpha\right), \quad (35)$$

а затем, умножая обе части на 2τ и суммируя по j' от 0 до j, получаем

$$\|y^{j+1}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\|y^{j'+\alpha/p}_{\bar x_\alpha}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)} \leqslant M_7\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\|y^{j'+\alpha/p}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} +$$
$$+M_8\left(\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\|\varphi^{j'+\alpha/p}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \sum_{i_\beta\neq i_\alpha}(\mu^2_{-\alpha}+\mu^2_{+\alpha})H/\hbar_\alpha\right) + \|y^0\|^2_{L_2}\right). \quad (36)$$

Из (36) имеем

$$\|y^{j+1}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} \leqslant M_7\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\|y^{j'+\alpha/p}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + M_8F^j, \quad (37)$$

$$F^j = \sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\|\varphi^{j'+\alpha/p}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \sum_{i_\beta\neq i_\alpha}(\mu^2_{-\alpha}+\mu^2_{+\alpha})H/\hbar_\alpha\right) + \|y^0\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}.$$

Покажем,что имеет место неравенство

$$\max_{1\leqslant\alpha\leqslant p}\|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\leqslant\nu_1\sum_{j'=0}^{j-1}\tau\max_{1\leqslant\alpha\leqslant p}\|y^{j'+\alpha/p}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\nu_2F^j,$$

где ν_1, ν_2 — известные положительные постоянные.

Перепишем неравенство (35) в следующем виде:

$$\|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\leqslant\|y^{j+(\alpha-1)/p}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+$$
$$+2\tau M_6\|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\tau\left(\|\varphi^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}(\mu^2_{-\alpha}+\mu^2_{+\alpha})H/\hbar_\alpha\right).\quad(38)$$

Просуммируем (38) по α' от 1 до α, тогда получим

$$\|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\leqslant\|y^j\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+2\tau M_6\sum_{\alpha'=1}^{\alpha}\|y^{j+\alpha'/p}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+$$
$$+\tau\sum_{\alpha'=1}^{\alpha}\left(\|\varphi^{j+\alpha'/p}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\sum_{i_\beta\neq i'_\alpha}(\mu^2_{-\alpha'}+\mu^2_{+\alpha'})H/\hbar_\alpha\right)\leqslant$$
$$\leqslant\|y^j\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+2\tau M_6\sum_{\alpha=1}^{p}\|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+$$
$$+\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\|\varphi^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}(\mu^2_{-\alpha}+\mu^2_{+\alpha})H/\hbar_\alpha\right).\quad(39)$$

Не нарушая общности, можно считать, что

$$\max_{1\leqslant\alpha'\leqslant p}\|y^{j+\alpha'/p}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}=\|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)},$$

в противном случае (38) будем суммировать до такого α, при котором $\|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}$ достигает максимального значения при фиксированном j. Тогда (39) перепишем в виде

$$\max_{1\leqslant\alpha\leqslant p}\|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\leqslant\|y^j\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+2p\tau M_6\max_{1\leqslant\alpha\leqslant p}\|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+$$
$$+\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\|\varphi^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}(\mu^2_{-\alpha}+\mu^2_{+\alpha})H/\hbar_\alpha\right).\quad(40)$$

Так как из (37) следует, что

$$\|y^j\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\leqslant M_7\sum_{j'=0}^{j-1}\tau\max_{1\leqslant\alpha\leqslant p}\|y^{j'+\alpha/p}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+M_8F^j,\quad(41)$$

из (40) с учетом (41) имеем

$$(1-2p\tau M_6)\max_{1\leqslant\alpha\leqslant p}\|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\leqslant M_7\sum_{j'=0}^{j-1}\tau\max_{1\leqslant\alpha\leqslant p}\|y^{j'+\alpha/p}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+M_9F^j.$$

Выбирая $\tau\leqslant\tau_0=\frac{1}{4pM_6}$, из последнего находим

$$\max_{1\leqslant\alpha\leqslant p}\|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\leqslant\nu_1\sum_{j'=0}^{j-1}\tau\max_{1\leqslant\alpha\leqslant p}\|y^{j'+\alpha/p}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\nu_2F^j.$$

Вводя обозначение $g_{j+1}=\max\limits_{1\leqslant\alpha\leqslant p}\|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\omega_h)}$, последнее соотношение можно переписать в виде

$$g_{j+1}\leqslant\nu_1\sum_{k=1}^{j}\tau g_k+\nu_2F^j, \tag{42}$$

где ν_1, ν_2 — известные положительные постоянные.

Применяя к (42) лемму 4 [10, с. 171], получаем априорную оценку

$$\|y^{j+1}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\leqslant M\Bigg[\|y^0\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\|\varphi^{j'+\alpha/p}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+$$
$$+\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\big(\mu^2_{-\alpha}(0,x',t_{j'})+\mu^2_{+\alpha}(l_\alpha,x',t_{j'})\big)H/\hbar_\alpha\Bigg], \tag{43}$$

где $M=\mathrm{const}>0$ не зависит от h_α и τ, $x'=(x_1,x_2,\ldots,x_{\alpha-1},x_{\alpha+1},\ldots,x_p)$.

Итак, справедлива

Теорема 2. *Локально-одномерная схема (23)–(25) устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения разностной задачи (23)–(25) при $\tau\leqslant\tau_0$ справедлива оценка (43).*

5. Сходимость локально-одномерной схемы. По аналогии с [8, с. 528] представим решение задачи (28) в виде суммы $z_{(\alpha)}=\upsilon_{(\alpha)}+\eta_{(\alpha)}$, $z_{(\alpha)}=z^{j+\alpha/p}$, где $\eta_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\frac{\eta_{(\alpha)}-\eta_{(\alpha-1)}}{\tau}=\mathring{\psi}_\alpha,\ x\in\omega_{h_\alpha}+\gamma_{h,\alpha},\ \alpha=1,2,\ldots,p, \tag{44}$$

$$\eta(x,0)=0,$$

где

$$\mathring{\psi}_\alpha=\begin{cases}\mathring{\psi}_\alpha, & x_\alpha\in\omega_{h_\alpha},\\ \mathring{\psi}_{-\alpha}, & x_\alpha=0,\\ \mathring{\psi}_{+\alpha}, & x_\alpha=l_\alpha.\end{cases}$$

Из (44) следует $\eta^{j+1} = \eta_{(p)} = \eta^j + \tau(\overset{\circ}{\psi}_1 + \overset{\circ}{\psi}_2 + \dots + \overset{\circ}{\psi}_p) = \eta^j = \dots = \eta^0 = 0$, так как $\eta^0 = 0$.

Тогда для η_α имеем

$$\eta_{(\alpha)} = \tau(\overset{\circ}{\psi}_1 + \overset{\circ}{\psi}_2 + \dots + \overset{\circ}{\psi}_\alpha) = -\tau(\overset{\circ}{\psi}_{\alpha+1} + \dots + \overset{\circ}{\psi}_p) = O(\tau).$$

Функция $\upsilon_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\frac{\upsilon_{(\alpha)} - \upsilon_{(\alpha-1)}}{\tau} = \tilde{\Lambda}_\alpha \upsilon_{(\alpha)} + \tilde{\psi}_\alpha, \quad \tilde{\psi}_\alpha = \tilde{\Lambda}_\alpha \eta_{(\alpha)} + \psi^*_\alpha, \quad x \in \omega_{h_\alpha}, \tag{45}$$

$$\frac{1}{2} h_\alpha \frac{\upsilon_{(\alpha)} - \upsilon_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda^-_\alpha \upsilon_{(\alpha)} + \tilde{\psi}_{-\alpha}, \quad \tilde{\psi}_{-\alpha} = \Lambda^-_\alpha \eta_{(\alpha)} + \psi^*_{-\alpha}, \quad x_\alpha = 0, \tag{46}$$

$$\frac{1}{2} h_\alpha \frac{\upsilon_{(\alpha)} - \upsilon_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda^+_\alpha \upsilon_{(\alpha)} + \tilde{\psi}_{+\alpha}, \quad \tilde{\psi}_{+\alpha} = \Lambda^+_\alpha \eta_{(\alpha)} + \psi^*_{+\alpha}, \quad x_\alpha = l_\alpha, \tag{47}$$

$$\upsilon(x, 0) = 0. \tag{48}$$

Если существуют непрерывные в замкнутой области $\overline{Q}_T$ производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^2 \partial t}, \quad \frac{\partial^3 k}{\partial x_\alpha \partial x_\beta^2}, \quad \frac{\partial^2 k}{\partial x_\alpha \partial t}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x_\beta^2},$$

$$\frac{\partial r}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 q_s}{\partial x_\beta^2}, \quad \frac{\partial q_s}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_\beta^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial t}, \quad 1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant p, \quad \alpha \neq \beta,$$

то $\Lambda_\alpha \eta_{(\alpha)} = -\tau \Lambda_\alpha (\overset{\circ}{\psi}_{\alpha+1} + \dots + \overset{\circ}{\psi}_p) = O(\tau)$, $\Lambda^\pm_\alpha \eta_{(\alpha)} = O(\tau)$.

Решение задачи (45)–(48) оценим с помощью теоремы 2:

$$\begin{aligned} \|\upsilon^{j+1}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} \leqslant M(T) \Bigg[\sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \|\tilde{\psi}_\alpha^{j'+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \\ + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \big(\tilde{\psi}^2_{-\alpha}(0, x', t_{j'}) + \tilde{\psi}^2_{+\alpha}(l_\alpha, x', t_{j'}) \big) H/\hbar_\alpha \Bigg]. \end{aligned} \tag{49}$$

Так как $\eta^j = 0$, $\eta_{(\alpha)} = O(\tau)$, $\|z^j\| \leqslant \|\upsilon^j\|$, из оценки (49) следует

Теорема 3. *Пусть задача (1)–(3) имеет единственное непрерывное в $\overline{Q}_T$ решение $u(x,t)$ и существуют непрерывные в $\overline{Q}_T$ производные*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^2 \partial t}, \quad \frac{\partial^3 k}{\partial x_\alpha \partial x_\beta^2}, \quad \frac{\partial^2 k}{\partial x_\alpha \partial t}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x_\beta^2},$$

$$\frac{\partial r}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 q_s}{\partial x_\beta^2}, \quad \frac{\partial q_s}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_\beta^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial t}, \quad 1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant p, \quad \alpha \neq \beta,$$

тогда локально-одномерная схема (23)–(25) сходится к решению дифференциальной задачи (1)–(3) со скоростью $O(|h|^2 + \tau)$, так что при достаточно малом τ имеет место оценка

$$\|y^{j+1} - u^{j+1}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)} \leqslant M(|h|^2 + \tau), \quad 0 < \tau \leqslant \tau_0,$$

где $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_p^2$.

6. Алгоритм численного решения задачи. Для решения сеточных уравнений, получающихся при разностной аппроксимации нагруженных уравнений, удобно использовать метод параметрической прогонки (см. [11, с. 131]).

Перепишем задачу (1)–(3) при $0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha$, $\alpha = 2$, $p = 2$, $s = 1, 2$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(k_1(x_1, x_2, t)\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big) + \frac{\partial}{\partial x_2}\Big(k_2(x_1, x_2, t)\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big) +$$

$$+ r_1(x_1, x_2, t)\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2, t) + r_2(x_1, x_2, t)\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2, t) -$$

$$- q_{1_1}(x_1, x_2, t)u(x_1^1, x_2, t) - q_{1_2}(x_1, x_2, t)u(x_1^2, x_2, t) -$$

$$- q_{2_1}(x_1, x_2, t)u(x_1, x_2^1, t) - q_{2_2}(x_1, x_2, t)u(x_1, x_2^2, t) + f(x_1, x_2, t), \quad (50)$$

$$\begin{cases} k_1(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \beta_{-1}u - \mu_{-1}(x,t), & x_1 = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ -k_1(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \beta_{+1}u - \mu_{+1}(x,t), & x_1 = l_1, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ k_2(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_2} = \beta_{-2}u - \mu_{-2}(x,t), & x_2 = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ -k_2(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_2} = \beta_{+2}u - \mu_{+2}(x,t), & x_2 = l_2, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \quad (51)$$

$$u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2). \quad (52)$$

Для решения задачи (50)–(52) рассмотрим сетку

$$x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \quad t_j = j\tau,$$

где $i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha$, $h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha$, $j = 0, 1, \ldots, m$, $\tau = T/m$. Вводится один дробный шаг $t_{j+1/2} = t_j + \tau/2$. Обозначим сеточную функцию:

$$y_{i_1,i_2}^{j+\alpha/p} = y^{j+\alpha/p} = y(i_1 h_1, i_2 h_2, (j + \alpha/2)\tau), \quad \alpha = 1, 2.$$

Напишем локально-одномерную схему

$$\begin{cases} \dfrac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau} = \tilde{\Lambda}_1 y^{j+1/2} + \varphi_1, \\ \dfrac{y^{j+1} - y^{j+1/2}}{\tau} = \tilde{\Lambda}_2 y^{j+1} + \varphi_2, \end{cases} \quad (53)$$

$$\begin{cases} y_{0,i_2}^{j+1/2} = \varkappa_{11}(i_2h_2,t_{j+1/2})y_{1,i_2}^{j+1/2} + \varkappa_{11_1}^{1}(i_2h_2,t_{j+1/2})y_{i_{1_1},i_2}^{j+1/2} + \\ \qquad + \varkappa_{11_2}^{1}(i_2h_2,t_{j+1/2})y_{i_{1_2},i_2}^{j+1/2} + \varkappa_{11_1}^{2}(i_2h_2,t_{j+1/2})y_{i_{1_1}+1,i_2}^{j+1/2} + \\ \qquad + \varkappa_{11_2}^{2}(i_2h_2,t_{j+1/2})y_{i_{1_2}+1,i_2}^{j+1/2} + \mu_{11}(i_2h_2,t_{j+1/2}), \\ y_{N_1,i_2}^{j+1/2} = \varkappa_{12}(i_2h_2,t_{j+1/2})y_{N_1-1,i_2}^{j+1/2} + \varkappa_{12_1}^{1}(i_2h_2,t_{j+1/2})y_{i_{1_1},i_2}^{j+1/2} + \\ \qquad + \varkappa_{12_2}^{1}(i_2h_2,t_{j+1/2})y_{i_{1_2},i_2}^{j+1/2} + \varkappa_{12_1}^{2}(i_2h_2,t_{j+1/2})y_{i_{1_1}+1,i_2}^{j+1/2} + \\ \qquad + \varkappa_{12_2}^{2}(i_2h_2,t_{j+1/2})y_{i_{1_2}+1,i_2}^{j+1/2} + \mu_{12}(i_2h_2,t_{j+1/2}), \\ y_{i_1,0}^{j+1/2} = \varkappa_{21}(i_1h_1,t_{j+1})y_{i_1,1}^{j+1} + \varkappa_{21_1}^{1}(i_1h_1,t_{j+1})y_{i_1,i_{2_1}}^{j+1} + \\ \qquad + \varkappa_{21_2}^{1}(i_1h_1,t_{j+1})y_{i_1,i_{2_2}}^{j+1} + \varkappa_{21_1}^{2}(i_1h_1,t_{j+1})y_{i_1,i_{2_1}+1}^{j+1} + \\ \qquad + \varkappa_{21_2}^{2}(i_1h_1,t_{j+1})y_{i_1,i_{2_2}+1}^{j+1} + \mu_{21}(i_1h_1,t_{j+1}), \\ y_{i_1,N_2}^{j+1} = \varkappa_{22}(i_1h_1,t_{j+1})y_{i_1,N_2-1}^{j+1} + \varkappa_{22_1}^{1}(i_1h_1,t_{j+1})y_{i_1,i_{2_1}}^{j+1} + \\ \qquad + \varkappa_{22_2}^{1}(i_1h_1,t_{j+1})y_{i_1,i_{2_2}}^{j+1} + \varkappa_{22_1}^{2}(i_1h_1,t_{j+1})y_{i_1,i_{2_1}+1}^{j+1} + \\ \qquad + \varkappa_{22_2}^{2}(i_1h_1,t_{j+1})y_{i_1,i_{2_2}+1}^{j+1} + \mu_{22}(i_1h_1,t_{j+1}), \end{cases} \tag{54}$$

$$y_{i_1,i_2}^{0} = u_0(i_1h_1,i_2,h_2), \tag{55}$$

$$\tilde{\Lambda}_\alpha y = \varkappa_\alpha(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\alpha/p})_{x_\alpha} + b_\alpha^{+}a_\alpha^{(+1_\alpha)}y_{x_\alpha}^{j+\alpha/p} + b_\alpha^{-}a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\alpha/p} - \\ - \sum_{s=1}^{m} d_{s_\alpha}(y_{i_{\alpha_s}}^{(\alpha)}x_{i_{\alpha_s}}^{-} + y_{i_{\alpha_s}+1}^{(\alpha)}x_{i_{\alpha_s}}^{+}),$$

$$\varphi_\alpha = \frac{1}{2}f(x_1,x_2,t_{j+\alpha/2}) \text{ или } \varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = f(x_1,x_2,t_{j+1}),\ \alpha = 1,2.$$

Приведем расчетные формулы для решения задачи (53)–(55).

На первом этапе находим решение $y_{i_1,i_2}^{j+1/2}$ Для этого при каждом значении $i_2 = \overline{1, N_2-1}$ решается следующая задача:

$$A_{1(i_1,i_2)}y_{i_1-1,i_2}^{j+1/2} - C_{1(i_1,i_2)}y_{i_1,i_2}^{j+1/2} + B_{1(i_1,i_2)}y_{i_1+1,i_2}^{j+1/2} - \\ - \sum_{s=1}^{2} d_{s_1(i_1,i_2)}(y_{i_{1_s}}^{(1)}x_{i_{1_s}}^{-} + y_{i_{1_s}+1}^{(1)}x_{i_{1_s}}^{+}) = -F_{1(i_1,i_2)}^{j+1/2}, \quad 0 < i_1 < N_1, \tag{56}$$

$$y_{0,i_2}^{j+1/2} = \varkappa_{11}(i_2h_2,t_{j+1/2})y_{1,i_2}^{j+1/2} + \varkappa_{11_1}^{1}(i_2h_2,t_{j+1/2})y_{i_{1_1},i_2}^{j+1/2} + \\ + \varkappa_{11_2}^{1}(i_2h_2,t_{j+1/2})y_{i_{1_2},i_2}^{j+1/2} + \varkappa_{11_1}^{2}(i_2h_2,t_{j+1/2})y_{i_{1_1}+1,i_2}^{j+1/2} + \\ + \varkappa_{11_2}^{2}(i_2h_2,t_{j+1/2})y_{i_{1_2}+1,i_2}^{j+1/2} + \mu_{11}(i_2h_2,t_{j+1/2}),$$

$$y_{N_1,i_2}^{j+1/2} = \varkappa_{12}(i_2h_2,t_{j+1/2})y_{N_1-1,i_2}^{j+1/2} + \varkappa_{12_1}^{1}(i_2h_2,t_{j+1/2})y_{i_{1_1},i_2}^{j+1/2} + \\ + \varkappa_{12_2}^{1}(i_2h_2,t_{j+1/2})y_{i_{1_2},i_2}^{j+1/2} + \varkappa_{12_1}^{2}(i_2h_2,t_{j+1/2})y_{i_{1_1}+1,i_2}^{j+1/2} + \\ + \varkappa_{12_2}^{2}(i_2h_2,t_{j+1/2})y_{i_{1_2}+1,i_2}^{j+1/2} + \mu_{12}(i_2h_2,t_{j+1/2}),$$

где

$$A_{1(i_1,i_2)} = \frac{(\varkappa_1)_{i_1,i_2}(a_1)_{i_1,i_2}}{h_1^2} - \frac{(b_1^-)_{i_1,i_2}(a_1)_{i_1,i_2}}{h_1},$$

$$B_{1(i_1,i_2)} = \frac{(\varkappa_1)_{i_1,i_2}(a_1)_{i_1+1,i_2}}{h_1^2} + \frac{(b_1^+)_{i_1,i_2}(a_1)_{i_1+1,i_2}}{h_1},$$

$$C_{1(i_1,i_2)} = A_{1(i_1,i_2)} + B_{1(i_1,i_2)} + \frac{1}{\tau}, \quad F_{1(i_1,i_2)}^{j+1/2} = \frac{1}{\tau} y_{i_1,i_2}^j + \varphi_{1(i_1,i_2)}.$$

$$\varkappa_{11}(i_2h_2, t_{j+1/2}) = \frac{\frac{(\varkappa_{-1}a_1)_{1,i_2}}{h_1}}{\frac{(\varkappa_{-1}a_1)_{1,i_2}}{h_1} + \beta_{-1,i_2}^{j+1/2} + \frac{0.5h_1}{\tau}},$$

$$\varkappa_{12}(i_2h_2, t_{j+1/2}) = \frac{\frac{(\varkappa_{+1}a_1)_{N_1,i_2}}{h_1}}{\frac{(\varkappa_{+1}a_1)_{N_1,i_2}}{h_1} + \beta_{+1,i_2}^{j+1/2} + \frac{0.5h_1}{\tau}},$$

$$\varkappa_{11_s}^1(i_2h_2, t_{j+1/2}) = \frac{-\frac{1}{2}h_1 d_{s_1}^{(0)} x_{i_{1_s}}^-}{\frac{(\varkappa_{-1}a_1)_{1,i_2}}{h_1} + \beta_{-1,i_2}^{j+1/2} + \frac{0.5h_1}{\tau}},$$

$$\varkappa_{12_s}^1(i_2h_2, t_{j+1/2}) = \frac{-\frac{1}{2}h_1 d_{s_1}^{(N_1)} x_{i_{1_s}}^-}{\frac{(\varkappa_{+1}a_1)_{N_1,i_2}}{h_1} + \beta_{+1,i_2}^{j+1/2} + \frac{0.5h_1}{\tau}},$$

$$\varkappa_{11_s}^2(i_2h_2, t_{j+1/2}) = \frac{-\frac{1}{2}h_1 d_{s_1}^{(0)} x_{i_{1_s}}^+}{\frac{(\varkappa_{-1}a_1)_{1,i_2}}{h_1} + \beta_{-1,i_2}^{j+1/2} + \frac{0.5h_1}{\tau}},$$

$$\varkappa_{12_s}^2(i_2h_2, t_{j+1/2}) = \frac{-\frac{1}{2}h_1 d_{s_1}^{(N_1)} x_{i_{1_s}}^+}{\frac{(\varkappa_{+1}a_1)_{N_1,i_2}}{h_1} + \beta_{+1,i_2}^{j+1/2} + \frac{0.5h_1}{\tau}},$$

$$\mu_{11}(i_2h_2, t_{j+1/2}) = \frac{\bar{\mu}_{-1}(i_2h_2, t_{j+1/2}) + \frac{0.5h_1}{\tau} y_0^j}{\frac{(\varkappa_{-1}a_1)_{1,i_2}}{h_1} + \beta_{-1,i_2}^{j+1/2} + \frac{0.5h_1}{\tau}},$$

$$\mu_{12}(i_2h_2, t_{j+1/2}) = \frac{\bar{\mu}_{+1}(i_2h_2, t_{j+1/2}) + \frac{0.5h_1}{\tau} y_{N_1}^j}{\frac{(\varkappa_{+1}a_1)_{N_1,i_2}}{h_1} + \beta_{+1,i_2}^{j+1/2} + \frac{0.5h_1}{\tau}}.$$

Решение системы (56) будем искать в виде [11]:

$$y_{i_1,i_2} = \alpha_{i_1+1,i_2} y_{i_1+1,i_2} + \beta_{1,i_1+1,i_2} y_{i_{1_1}} + \beta_{2,i_1+1,i_2} y_{i_{1_1}+1} + \beta_{3,i_1+1,i_2} y_{i_{1_2}} + \\ + \beta_{4,i_1+1,i_2} y_{i_{1_2}+1} + \delta_{i_1+1,i_2}, \quad i_1 = \overline{0, N_1 - 1}. \quad (57)$$

Найдем теперь α_{i_1,i_2}, β_{k,i_1,i_2}, $k = 1,2,3,4$, $i_1 = \overline{1, N_1}$. Из (57) следует, что

$$\alpha_{1,i_2} = \varkappa_{11}, \quad \beta_{1,1,i_2} = \varkappa_{11_1}^1, \quad \beta_{2,1,i_2} = \varkappa_{11_1}^2,$$

$$\beta_{3,1,i_2} = \varkappa_{11_2}^1, \quad \beta_{4,1,i_2} = \varkappa_{11_2}^2, \quad \delta_{1,i_2} = \mu_{11}.$$

Подставляя

$$y_{i_1,i_2} = \alpha_{i_1+1,i_2} y_{i_1+1,i_2} + \beta_{1,i_1+1,i_2} y_{i_{1_1}} + \beta_{2,i_1+1,i_2} y_{i_{1_1}+1} + \\ + \beta_{3,i_1+1,i_2} y_{i_{1_2}} + \beta_{4,i_1+1,i_2} y_{i_{1_2}+1} + \delta_{i_1+1,i_2},$$

$$y_{i_1-1,i_2} = \alpha_{i_1,i_2} y_{i_1,i_2} + \beta_{1,i_1,i_2} y_{i_{1_1}} + \beta_{2,i_1,i_2} y_{i_{1_1}+1} + \\ + \beta_{3,i_1,i_2} y_{i_{1_2}} + \beta_{4,i_1,i_2} y_{i_{1_2}+1} + \delta_{i_1,i_2}$$

в (57), получим

$$\alpha_{i_1+1,i_2} = \frac{B_{1(i_1,i_2)}}{C_{1(i_1,i_2)} - A_{1(i_1,i_2)}\alpha_{i_1,i_2}}, \quad \delta_{i_1+1,i_2} = \frac{F^j_{1(i_1,i_2)} + A_{1(i_1,i_2)}\delta_{i_1,i_2}}{C_{1(i_1,i_2)} - A_{1(i_1,i_2)}\alpha_{i_1,i_2}}.$$

$$\beta_{1,i_1+1,i_2} = \frac{A_{1(i_1,i_2)}\beta_{1,i_1,i_2} - d_{1_1(i_1,i_2)} x^-_{i_{1_1}}}{C_{1(i_1,i_2)} - A_{1(i_1,i_2)}\alpha_{i_1,i_2}},$$

$$\beta_{2,i_1+1,i_2} = \frac{A_{1(i_1,i_2)}\beta_{2,i_1,i_2} - d_{1_1(i_1,i_2)} x^+_{i_{1_1}}}{C_{1(i_1,i_2)} - A_{1(i_1,i_2)}\alpha_{i_1,i_2}}$$

$$\beta_{3,i_1+1,i_2} = \frac{A_{1(i_1,i_2)}\beta_{3,i_1,i_2} - d_{1_2(i_1,i_2)} x^-_{i_{1_2}}}{C_{1(i_1,i_2)} - A_{1(i_1,i_2)}\alpha_{i_1,i_2}},$$

$$\beta_{4,i_1+1,i_2} = \frac{A_{1(i_1,i_2)}\beta_{4,i_1,i_2} - d_{1_2(i_1,i_2)} x^+_{i_{1_2}}}{C_{1(i_1,i_2)} - A_{1(i_1,i_2)}\alpha_{i_1,i_2}},$$

Выразим неизвестные y_{i_1,i_2}, $i_1 = \overline{0, N_1}$, через $y_{i_{1_1}}$, $y_{i_{1_2}}$, $y_{i_{1_1}+1}$, $y_{i_{1_2}+1}$ следующим образом:

$$y_{i_1,i_2} = H_{1,i_1,i_2} y_{i_{1_1}} + H_{2,i_1,i_2} y_{i_{1_1}+1} + H_{3,i_1,i_2} y_{i_{1_2}} + H_{4,i_1,i_2} y_{i_{1_2}+1} + \Phi_{i_1,i_2}. \tag{58}$$

$$H_{1,N_1,i_2} = \frac{\varkappa_{12}\beta_{1,N_1,i_2} + \varkappa^1_{12_1}}{1 - \varkappa_{12}\alpha_{N_1,i_2}}, \quad H_{2,N_1,i_2} = \frac{\varkappa_{12}\beta_{2,N_1,i_2} + \varkappa^2_{12_1}}{1 - \varkappa_{12}\alpha_{N_1,i_2}},$$

$$H_{3,N_1,i_2} = \frac{\varkappa_{12}\beta_{3,N_1,i_2} + \varkappa^1_{12_2}}{1 - \varkappa_{12}\alpha_{N_1,i_2}}, \quad H_{4,N_1,i_2} = \frac{\varkappa_{12}\beta_{4,N_1,i_2} + \varkappa^2_{12_2}}{1 - \varkappa_{12}\alpha_{N_1,i_2}},$$

$$\Phi_{i_1,N_2} = \frac{\varkappa_{12}\delta_{N_1,i_2} + \mu_{12}}{1 - \varkappa_{12}\alpha_{N_1,i_2}}.$$

Найдем теперь H_{k,i_1,i_2}, $k = 1, 2, 3, 4$, Φ_{i_1,i_2}. Тогда, подставляя (58) в (57), получим

$$H_{k,i_1,i_2} = \alpha_{i_1+1,i_2} H_{k,i_1+1,i_2} + \beta_{k,i_1+1,i_2},$$

$$\Phi_{i_1,i_2} = \alpha_{i_1+1,i_2}\Phi_{i_1+1,i_2} + \delta_{i_1+1,i_2}, \quad i_1 = \overline{N_1 - 1, 0}. \tag{59}$$

Выразим $y_{i_{1_1}}$, $y_{i_{1_2}}$, $y_{i_{1_1}+1}$, $y_{i_{1_2}+1}$ через H_{k,i_1,i_2}, $k=1,2,3,4$, Φ_{i_1,i_2}. Для этого рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} y_{i_{1_1},i_2} = H_{1,i_{1_1},i_2}y_{i_{1_1}} + H_{2,i_{1_1},i_2}y_{i_{1_1}+1} + \\ \qquad\qquad + H_{3,i_{1_1},i_2}y_{i_{1_2}} + H_{4,i_{1_1},i_2}y_{i_{1_2}+1} + \Phi_{i_{1_1},i_2}, \\ y_{i_{1_2},i_2} = H_{1,i_{1_2},i_2}y_{i_{1_1}} + H_{2,i_{1_2},i_2}y_{i_{1_1}+1} + \\ \qquad\qquad + H_{3,i_{1_2},i_2}y_{i_{1_2}} + H_{4,i_{1_2},i_2}y_{i_{1_2}+1} + \Phi_{i_{1_2},i_2}, \\ y_{i_{1_1}+1,i_2} = H_{1,i_{1_1}+1,i_2}y_{i_{1_1}} + H_{2,i_{1_1}+1,i_2}y_{i_{1_1}+1} + \\ \qquad\qquad + H_{3,i_{1_1}+1,i_2}y_{i_{1_2}} + H_{4,i_{1_1}+1,i_2}y_{i_{1_2}+1} + \Phi_{i_{1_1}+1,i_2}, \\ y_{i_{1_2}+1,i_2} = H_{1,i_{1_2}+1,i_2}y_{i_{1_1}} + H_{2,i_{1_2}+1,i_2}y_{i_{1_1}+1} + \\ \qquad\qquad + H_{3,i_{1_2}+1,i_2}y_{i_{1_2}} + H_{4,i_{1_2}+1,i_2}y_{i_{1_2}+1} + \Phi_{i_{1_2}+1,i_2}, \end{cases}$$

решая которую, находим значения следующих функций:

$$y_{i_{1_1},i_2}, \quad y_{i_{1_2},i_2}, \quad y_{i_{1_1}+1,i_2}, \quad y_{i_{1_2}+1,i_2}.$$

Подставляя полученные значения в (58), с учетом (59) находим решение y_{i_1,i_2} системы (56).

На втором этапе находим решение y_{i_1,i_2}^{j+1}. Для этого, как и в первом случае, при каждом значении $i_1=\overline{1,N_1-1}$ решается задача

$$A_{2(i_1,i_2)}y_{i_1,i_2-1}^{j+1} - C_{2(i_1,i_2)}y_{i_1,i_2}^{j+1} + B_{2(i_1,i_2)}y_{i_1,i_2+1}^{j+1} - \\ - \sum_{s=1}^{2} d_{s_2}(y_{i_{2s}}^{(2)}x_{i_{2s}}^{-} + y_{i_{2s}+1}^{(2)}x_{i_{2s}}^{+}) = -F_{2(i_1,i_2)}^{j+1}, \quad 0<i_2<N_2, \quad (60)$$

$$y_{i_1,0}^{j+1} = \varkappa_{21}(i_1h_1,t_{j+1})y_{i_1,1}^{j+1} + \varkappa_{21_1}^{1}(i_1h_1,t_{j+1})y_{i_1,i_{2_1}}^{j+1} + \varkappa_{21_2}^{1}(i_1h_1,t_{j+1})y_{i_1,i_{2_2}}^{j+1} + \\ + \varkappa_{21_1}^{2}(i_1h_1,t_{j+1})y_{i_1,i_{2_1}+1}^{j+1} + \varkappa_{21_2}^{2}(i_1h_1,t_{j+1})y_{i_1,i_{2_2}+1}^{j+1} + \mu_{21}(i_1h_1,t_{j+1}),$$

$$y_{i_1,N_2}^{j+1} = \varkappa_{22}(i_1h_1,t_{j+1})y_{i_1,N_2-1}^{j+1} + \varkappa_{22_1}^{1}(i_1h_1,t_{j+1})y_{i_1,i_{2_1}}^{j+1} + \varkappa_{22_2}^{1}(i_1h_1,t_{j+1})y_{i_1,i_{2_2}}^{j+1} + \\ + \varkappa_{22_1}^{2}(i_1h_1,t_{j+1})y_{i_1,i_{2_1}+1}^{j+1} + \varkappa_{22_2}^{2}(i_1h_1,t_{j+1})y_{i_1,i_{2_2}+1}^{j+1} + \mu_{22}(i_1h_1,t_{j+1}),$$

$$A_{2(i_1,i_2)} = \frac{(\varkappa_2)_{i_1,i_2}(a_2)_{i_1,i_2}}{h_2^2} - \frac{(b_2^-)_{i_1,i_2}(a_2)_{i_1,i_2}}{h_2},$$

$$B_{2(i_1,i_2)} = \frac{(\varkappa_2)_{i_1,i_2}(a_2)_{i_1,i_2+1}}{h_2^2} + \frac{(b_2^+)_{i_1,i_2}(a_2)_{i_1,i_2+1}}{h_2},$$

$$C_{2(i_1,i_2)} = A_{2(i_1,i_2)} + B_{2(i_1,i_2)} + \frac{1}{\tau}, \quad F_{2(i_1,i_2)}^{j+1/2} = \frac{1}{\tau}y_{i_1,i_2}^{j} + \varphi_{2(i_1,i_2)}.$$

$$\varkappa_{21}(i_1h_1,t_{j+1}) = \frac{\frac{(\varkappa_{-2}a_2)_{i_1,1}}{h_2}}{\frac{(\varkappa_{-2}a_2)_{i_1,1}}{h_2} + \beta_{-2,i_1}^{j+1} + \frac{0.5h_2}{\tau}},$$

$$\varkappa_{22}(i_1h_1,t_{j+1})=\frac{\frac{(\varkappa_{+2}a_2)_{i_1,N_2}}{h_2}}{\frac{(\varkappa_{+2}a_2)_{i_1,N_2}}{h_2}+\beta^{j+1}_{+2,i_1}+\frac{0.5h_2}{\tau}},$$

$$\varkappa^1_{21_s}(i_1h_1,t_{j+1})=\frac{-\frac{1}{2}h_2d^{(0)}_{s_2}x^-_{i_{2_s}}}{\frac{(\varkappa_{-2}a_2)_{i_1,1}}{h_2}+\beta^{j+1}_{-2,i_1}+\frac{0.5h_2}{\tau}},$$

$$\varkappa^1_{22_s}(i_1h_1,t_{j+1})=\frac{-\frac{1}{2}h_2d^{(N_2)}_{s_2}x^-_{i_{2_s}}}{\frac{(\varkappa_{+2}a_2)_{i_1,N_2}}{h_2}+\beta^{j+1}_{+2,i_1}+\frac{0.5h_2}{\tau}},$$

$$\varkappa^2_{21_s}(i_1h_1,t_{j+1})=\frac{-\frac{1}{2}h_2d^{(0)}_{s_2}x^+_{i_{2_s}}}{\frac{(\varkappa_{-2}a_2)_{i_1,1}}{h_2}+\beta^{j+1}_{-2,i_1}+\frac{0.5h_2}{\tau}},$$

$$\varkappa^2_{22_s}(i_1h_1,t_{j+1})=\frac{-\frac{1}{2}h_2d^{(N_2)}_{s_2}x^+_{i_{2_s}}}{\frac{(\varkappa_{+2}a_2)_{i_1,N_2}}{h_2}+\beta^{j+1}_{+2,i_1}+\frac{0.5h_2}{\tau}},$$

$$\mu_{21}(i_1h_1,t_{j+1})=\frac{\bar\mu_{-2}(i_1h_1,t_{j+1})+\frac{0.5h_2}{\tau}y^j_0}{\frac{(\varkappa_{-2}a_2)_{i_1,1}}{h_2}+\beta^{j+1}_{-2,i_1}+\frac{0.5h_2}{\tau}},$$

$$\mu_{22}(i_1h_1,t_{j+1})=\frac{\bar\mu_{+2}(i_1h_1,t_{j+1})+\frac{0.5h_2}{\tau}y^j_{N_2}}{\frac{(\varkappa_{+2}a_2)_{i_1,N_2}}{h_2}+\beta^{j+1}_{+2,i_1}+\frac{0.5h_2}{\tau}}.$$

Решение системы (60) будем искать в виде

$$y_{i_1,i_2}=\alpha_{i_1,i_2+1}y_{i_1,i_2+1}+\beta_{1,i_1,i_2+1}y_{i_{2_1}}+\beta_{2,i_1,i_2+1}y_{i_{2_1}+1}+\beta_{3,i_1,i_2+1}y_{i_{2_2}}+$$
$$+\beta_{4,i_1,i_2+1}y_{i_{2_2}+1}+\delta_{i_1,i_2+1},\quad i_2=\overline{0,N_2-1}.\tag{61}$$

Найдем теперь α_{i_1,i_2}, β_{k,i_1,i_2}, $k=1,2,3,4$, $i_2=\overline{1,N_2}$. Из (61) следует, что

$$\alpha_{i_1,1}=\varkappa_{21},\quad \beta_{1,i_1,1}=\varkappa^1_{21_1},\quad \beta_{2,i_1,1}=\varkappa^2_{21_1},$$

$$\beta_{3,i_1,1}=\varkappa^1_{21_2},\quad \beta_{4,i_1,1}=\varkappa^2_{21_2},\quad \delta_{i_1,1}=\mu_{21}.$$

Подставляя

$$y_{i_1,i_2}=\alpha_{i_1,i_2+1}y_{i_1,i_2+1}+\beta_{1,i_1,i_2+1}y_{i_{2_1}}+\beta_{2,i_1,i_2+1}y_{i_{2_1}+1}+$$
$$+\beta_{3,i_1,i_2+1}y_{i_{2_2}}+\beta_{4,i_1,i_2+1}y_{i_{2_2}+1}+\delta_{i_1,i_2+1},$$

$$y_{i_1,i_2-1}=\alpha_{i_1,i_2}y_{i_1,i_2}+\beta_{1,i_1,i_2}y_{i_{2_1}}+\beta_{2,i_1,i_2}y_{i_{2_1}+1}+$$
$$+\beta_{3,i_1,i_2}y_{i_{2_2}}+\beta_{4,i_1,i_2}y_{i_{2_2}+1}+\delta_{i_1,i_2}$$

в (61), получим

$$\alpha_{i_1,i_2+1}=\frac{B_{2(i_1,i_2)}}{C_{2(i_1,i_2)}-A_{2(i_1,i_2)}\alpha_{i_1,i_2}},\quad \delta_{i_1,i_2+1}=\frac{F^j_{2(i_1,i_2)}+A_{2(i_1,i_2)}\delta_{i_1,i_2}}{C_{2(i_1,i_2)}-A_{2(i_1,i_2)}\alpha_{i_1,i_2}}.$$

$$\beta_{1,i_1,i_2+1} = \frac{A_{2(i_1,i_2)}\beta_{1,i_1,i_2} - d_{2_1(i_1,i_2)}x^-_{i_{2_1}}}{C_{2(i_1,i_2)} - A_{2(i_1,i_2)}\alpha_{i_1,i_2}},$$

$$\beta_{2,i_1,i_2+1} = \frac{A_{2(i_1,i_2)}\beta_{2,i_1,i_2} - d_{2_1(i_1,i_2)}x^+_{i_{2_1}}}{C_{1(i_1,i_2)} - A_{2(i_1,i_2)}\alpha_{i_1,i_2}},$$

$$\beta_{3,i_1,i_2+1} = \frac{A_{2(i_1,i_2)}\beta_{3,i_1,i_2} - d_{2_2(i_1,i_2)}x^-_{i_{2_2}}}{C_{2(i_1,i_2)} - A_{2(i_1,i_2)}\alpha_{i_1,i_2}},$$

$$\beta_{4,i_1,i_2+1} = \frac{A_{2(i_1,i_2)}\beta_{4,i_1,i_2} - d_{2_2(i_1,i_2)}x^+_{i_{2_2}}}{C_{2(i_1,i_2)} - A_{2(i_1,i_2)}\alpha_{i_1,i_2}},$$

Выразим неизвестные y_{i_1,i_2}, $i_2 = \overline{0, N_2}$, через $y_{i_{2_1}}$, $y_{i_{2_2}}$, $y_{i_{2_1}+1}$, $y_{i_{2_2}+1}$ следующим образом:

$$y_{i_1,i_2} = H_{1,i_1,i_2}y_{i_{2_1}} + H_{3,i_1,i_2}y_{i_{2_2}} + H_{2,i_1,i_2}y_{i_{2_1}+1} + H_{4,i_1,i_2}y_{i_{2_2}+1} + \Phi_{i_1,i_2}. \qquad (62)$$

$$H_{1,i_1,N_2} = \frac{\varkappa_{22}\beta_{1,i_1,N_2} + \varkappa^1_{22_1}}{1 - \varkappa_{22}\alpha_{i_1,N_2}}, \quad H_{2,i_1,N_2} = \frac{\varkappa_{22}\beta_{2,i_1,N_2} + \varkappa^2_{22_1}}{1 - \varkappa_{22}\alpha_{i_1,N_2}},$$

$$H_{3,i_1,N_2} = \frac{\varkappa_{22}\beta_{3,i_1,N_2} + \varkappa^1_{22_2}}{1 - \varkappa_{22}\alpha_{i_1,N_2}}, \quad H_{4,i_1,N_2} = \frac{\varkappa_{22}\beta_{4,i_1,N_2} + \varkappa^2_{22_2}}{1 - \varkappa_{22}\alpha_{i_1,N_2}},$$

$$\Phi_{i_1,N_2} = \frac{\varkappa_{22}\delta_{i_1,N_2} + \mu_{22}}{1 - \varkappa_{22}\alpha_{i_1,N_2}}.$$

Найдем теперь H_{k,i_1,i_2}, $k = 1, 2, 3, 4$, Φ_{i_1,i_2}. Тогда, подставляя (62) в (61), получим

$$H_{k,i_1,i_2} = \alpha_{i_1,i_2+1}H_{k,i_1,i_2+1} + \beta_{k,i_1,i_2+1},$$

$$\Phi_{i_1,i_2} = \alpha_{i_1,i_2+1}\Phi_{i_1,i_2+1} + \delta_{i_1,i_2+1}, \quad i_2 = \overline{N_2 - 1, 0}. \qquad (63)$$

Выразим $y_{i_{2_1}}$, $y_{i_{2_2}}$, $y_{i_{2_1}+1}$, $y_{i_{2_2}+1}$ через H_{k,i_1,i_2}, $k = 1, 2, 3, 4$, Φ_{i_1,i_2}. Для этого рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} y_{i_1,i_{2_1}} = H_{1,i_1,i_{2_1}}y_{i_{2_1}} + H_{2,i_1,i_{2_1}}y_{i_{2_1}+1} + H_{3,i_1,i_{2_1}}y_{i_{2_2}} + \\ \qquad + H_{4,i_1,i_{2_1}}y_{i_{2_2}+1} + \Phi_{i_1,i_{2_1}}, \\ y_{i_1,i_{2_2}} = H_{1,i_1,i_{2_2}}y_{i_{2_1}} + H_{2,i_1,i_{2_2}}y_{i_{2_1}+1} + H_{3,i_1,i_{2_2}}y_{i_{2_2}} \\ \qquad + H_{4,i_1,i_{2_2}}y_{i_{2_2}+1} + \Phi_{i_1,i_{2_2}}, \\ y_{i_1,i_{2_1+1}} = H_{1,i_1,i_{2_1+1}}y_{i_{2_1}} + H_{2,i_1,i_{2_1+1}}y_{i_{2_1}+1} + H_{3,i_1,i_{2_1+1}}y_{i_{2_2}} + \\ \qquad + H_{4,i_1,i_{2_1+1}}y_{i_{2_2}+1} + \Phi_{i_1,i_{2_1+1}}, \\ y_{i_1,i_{2_2+1}} = H_{1,i_1,i_{2_2+1}}y_{i_{2_1}} + H_{2,i_1,i_{2_2+1}}y_{i_{2_1}+1} + H_{3,i_1,i_{2_2+1}}y_{i_{2_2}} + \\ \qquad + H_{4,i_1,i_{2_2+1}}y_{i_{2_2}+1} + \Phi_{i_1,i_{2_2+1}}, \end{cases}$$

решая которую, находим значения следующих функций:

$$y_{i_1,i_{2_1}}, \quad y_{i_1,i_{2_2}}, \quad y_{i_1,i_{2_1+1}}, \quad y_{i_1,i_{2_2+1}}.$$

Подставляя полученные значения в (62), с учетом (63) находим решение y_{i_1,i_2} системы (60).

Каждая из задач (56), (60) решается, как видно, методом параметрической прогонки (см. [11, с. 131]).

7. Тестовая задача и численные результаты. Коэффициенты уравнения и граничных условий исходной дифференциальной задачи (1)–(3) подбираются таким образом, чтобы точным решением при $p = 2$ была функция $u(x, t) = t^3(x_1^4 - l_1x_1^3)(x_2^4 - l_2x_2^3)$.

Ниже в табл. 1, 2 при уменьшении размера сетки приведены максимальное значение погрешности ($z = y - u$) и вычислительный порядок сходимости (ПС) в нормах $\|\cdot\|_{L_2(w_{h\tau})}$ и $\|\cdot\|_{C(w_{h\tau})}$, где $\|y\|_{C(w_{h\tau})} = \max\limits_{(x_i,t_j)\in w_{h\tau}} |y|$, когда $\bar{h} = h_1 = h_2 = \sqrt{\tau}$. Погрешность уменьшается в соответствии с порядком аппроксимации $O(h^2 + (\sqrt{\tau})^2)$.

Вычислительный порядок сходимости определяется по следующей формуле:

$$\text{ВПС} = \log_{\frac{\bar{h}_1}{\bar{h}_2}} \frac{||z_1||}{||z_2||} = \log_2 \frac{||z_1||}{||z_2||},$$

где z_i — погрешность, соответствующая $\bar{h}_i$.

Таблица 1

Изменение погрешности в норме $\|\cdot\|_{L_2(\bar{w}_{h\tau})}$ при уменьшении размера сетки на $t = 1$, когда $\bar{h} = h_1 = h_2 = \sqrt{\tau}$ [The maximum value of the error ($z = y - u$) and the computational order of convergence (CO) in the norm $\|\cdot\|_{L_2(\bar{w}_{h\tau})}$ when the grid size is reduced by $t = 1$, if $\bar{h} = h_1 = h_2 = \sqrt{\tau}$]

$\bar{h}$	$\max\limits_{0<j<m} \|z^j\|_{L_2(\bar{w}_{h\tau})}$	CO in $\|\cdot\|_{L_2(\bar{w}_{h\tau})}$
1/20	0.001858105	
1/40	0.000592952	1.6478
1/80	0.000163636	1.8574
1/160	0.000044111	1.8913

Таблица 2

Изменение погрешности в норме $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$ при уменьшении размера сетки на $t = 1$, когда $\bar{h} = h_1 = h_2 = \sqrt{\tau}$. [The maximum value of the error ($z = y - u$) and the computational order of convergence (CO) in the norm $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$ when the grid size is reduced by $t = 1$, if $\bar{h} = h_1 = h_2 = \sqrt{\tau}$]

$\bar{h}$	$\|z\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$	CO in $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$
1/20	0.007805524	
1/40	0.002882977	1.4369
1/80	0.000857080	1.7501
1/160	0.000226344	1.9209

Конкурирующие интересы. В публикации статьи отсутствуют конкурирующие финансовые или нефинансовые интересы.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их приложения // *Диффер. уравн.*, 1983. Т. 19, № 1. С. 86–94.
2. Дьяконов Е. Г. Разностные схемы с расщепляющимся оператором для нестационарных уравнений // *Докл. АН СССР*, 1962. Т. 144, № 1. С. 29–32.
3. Самарский А. А. paper Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1962. Т. 2, № 5. С. 787–811.
4. Самарский А. А. Локально-одномерные разностные схемы на неравномерных сетках // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1963. Т. 3, № 3. С. 431–466.
5. Будак В. М., Искендеров А. Д. Об одном классе обратных краевых задач с неизвестными коэффициентами // *Докл. АН СССР*, 1967. Т. 176, № 1. С. 20–23.
6. Krall A. M. The development of general differential and general differential boundary systems // *Rocky Mountain J. Math.*, 1975. vol. 5, no. 4. pp. 493–542. https://doi.org/10.1216/RMJ-1975-5-4-493.
7. Ладыженская О. А. *Краевые задачи математической физики.* М.: Наука, 1973. 407 с.
8. Самарский А. А. *Теория разностных схем.* М.: Наука, 1983. 616 с.
9. Андреев В. Б. О сходимости разностных схем, аппроксимирующих вторую и третью краевые задачи для эллиптических уравнений // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1968. Т. 8, № 6. С. 1218–1231.
10. Самарский А. А., Гулин А. В. *Устойчивость разностных схем.* М.: Наука, 1973. 415 с.
11. Воеводин А. Ф., Шугрин С. М. *Численные методы расчета одномерных систем.* Новосибирск: Наука, 1981. 208 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 1, pp. 7–35
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1908

MSC: 35K20, 65N06, 65N12

Numerical method for solving an initial-boundary value problem for a multidimensional loaded parabolic equation of a general form with conditions of the third kind

Z. V. Beshtokova[1,2]

[1] North-Caucasus Center for Mathematical Research,
North-Caucasus Federal University,
1, Pushkin str., Stavropol, 355017, Russian Federation.
[2] Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov,
173, Chernyshevsky str., Nalchik, 360004, Russian Federation.

Abstract

An initial-boundary value problem is studied for a multidimensional loaded parabolic equation of general form with boundary conditions of the third kind. For a numerical solution, a locally one-dimensional difference scheme by A.A. Samarskii with order of approximation $O(h^2 + \tau)$ is constructed. Using the method of energy inequalities, we obtain a priori estimates in the differential and difference interpretations, which imply uniqueness, stability, and convergence of the solution of the locally one-dimensional difference scheme to the solution of the original differential problem in the L_2 norm at a rate equal to the order of approximation of the difference scheme. An algorithm for the computational solution is constructed and numerical calculations of test cases are carried out, illustrating the theoretical calculations obtained in this work.

Keywords: parabolic equation, loaded equation, difference schemes, locally one-dimensional scheme, a priori estimate, stability, convergence, multidimensional problem.

Received: 11th February, 2022 / Revised: 18th March, 2022 /
Accepted: 21st March, 2022 / First online: 31st March, 2022

Competing interests. There are no financial or non-financial competing interests in the publication of the paper.

Authors' contributions and responsibilities. I take full responsibility for submit the final manuscript to print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. Not applicable.

Research Article

Please cite this article in press as:
Beshtokova Z. V. Numerical method for solving an initial-boundary value problem for a multidimensional loaded parabolic equation of a general form with conditions of the third kind, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 1, pp. 7–35. https://doi.org/10.14498/vsgtu1908 (In Russian).

Author's Details:
Zaryana V. Beshtokova https://orcid.org/0000-0001-8020-4406
Researcher; Dept. of Computational Methods[1]; Postgraduate Student[2];
e-mail: zarabaeva@yandex.ru

References

1. Nakhushev A. M. Loaded equations and their applications, *Differ. Uravn.*, 1983, vol. 19, no. 1, pp. 86–94 (In Russian).
2. Dyakonov E. G. Difference schemes with a splitting operator for nonstationary equations, *Sov. Math., Dokl.*, 1962, vol. 3, no. 1, pp. 645–648.
3. Samarskii A. A. On an economical difference method for the solution of a multidimensional parabolic equation in an arbitrary region, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1963, vol. 2, no. 5, pp. 894–926. https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90504-4.
4. Samarskii A. A. Local one dimensional difference schemes on non-uniform nets, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1963, vol. 3, no. 3, pp. 572–619. https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90290-8.
5. Budak V. M., Iskenderov A. D. A class of inverse boundary value problems with unknown coefficients, *Sov. Math., Dokl.*, 1967, vol. 8, no. 1, pp. 1026–1030.
6. Krall A. M. The development of general differential and general differential boundary systems, *Rocky Mountain J. Math.*, 1975, vol. 5, no. 4, pp. 493–542. https://doi.org/10.1216/RMJ-1975-5-4-493.
7. Ladyzhenskaya O. A. *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics*, Applied Mathematical Sciences, vol. 49. New York, Springer, 1985, xxx+322 pp. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4317-3.
8. Samarskii A. A. *Teoriia raznostnykh skhem* [Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1983, 616 pp. (In Russian)
9. Andreev V. B. On the convergence of difference schemes approximating the second and third boundary value problems for elliptic equations, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1968, vol. 8, no. 6, pp. 44–62. https://doi.org/10.1016/0041-5553(68)90092-X.
10. Samarskii A. A., Gulin A. B. *Ustoichivost' raznostnykh skhem* [Stability of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1973, 415 pp. (In Russian)
11. Voevodin A. F., Shugrin S. M. *Chislennye metody rascheta odnomernykh sistem* [Numerical Methods for Calculating One-Dimensional Systems]. Novosibirsk, Nauka, 1981, 208 pp. (In Russian)