Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 26, № 1. С. 140–178
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1889

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

УДК 517.927.4:519.624

Использование псевдоневязок при исследовании сходимости неустойчивых разностных краевых задач для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

В. Н. Маклаков

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

При исследовании краевых задач для неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами рассмотрен предложенный ранее метод численного интегрирования, использующий средства матричного исчисления. Согласно указанному методу при составлении системы разностных уравнений можно выбрать произвольную степень многочлена Тейлора в разложении искомого решения задачи в ряд Тейлора, отказавшись при этом от аппроксимации производных конечными разностями.

Исследованы некоторые аспекты сходимости неустойчивой разностной краевой задачи второго порядка. Для обыкновенного дифференциального уравнения введено понятие псевдоневязки на некотором векторе. На основе точного решения разностной краевой задачи построено приближенное решение, на котором норма псевдоневязки отлична от тривиального значения.

Теоретически установлено, что оценка нормы псевдоневязки уменьшается при увеличении используемой степени многочлена Тейлора и при уменьшении шага дискретизации сетки. Даны определения условной устойчивости и условной сходимости; установлена теоретическая связь между ними. На основе найденного вектора псевдоневязок построено возмущенное решение и вычислена оценка нормы его отклонения от

Научная статья

Образец для цитирования
Маклаков В. Н. Использование псевдоневязок при исследовании сходимости неустойчивых разностных краевых задач для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 1. С. 140–178. EDN: HDFQTC. https://doi.org/10.14498/vsgtu1889.

Сведения об авторе
Владимир Николаевич Маклаков https://orcid.org/0000-0003-1644-7424
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент каф. прикладной математики и информатики

точного решения разностной краевой задачи, позволяющая выявить наличие условной устойчивости. Установлена теоретическая связь между сходимостью и условной сходимостью.

Приведены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, краевые задачи, порядок аппроксимации, численные методы, многочлены Тейлора, невязки.

Получение: 20 октября 2021 г. / Исправление: 1 ноября 2021 г. / Принятие: 24 января 2022 г. / Публикация онлайн: 31 марта 2022 г.

1. Обозначения и постановка задачи. Далее будем придерживаться принятых в [1] обозначений:

1) D — область интегрирования, ограниченная отрезком $[a, b]$, D_h — узлы сетки, определяемые значениями $t_i = t_0 + ih$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n + 1$ — число узлов сетки D_h, $t_0 = a$, $t_n = b$,

$$h = \frac{b-a}{n} \text{ — шаг сетки } D_h; \tag{1}$$

2) $x(t)$ — непрерывная функция, являющаяся точным решением краевой задачи;
3) $[x]_h$ — сеточная функция, совпадающая с точным решением в узлах сетки D_h;
4) $x^{(h)}$ — искомая сеточная функция;
5) для любой функции примем $\varphi(t_i) = \varphi_i$, где t_i — узел сетки D_h.

В дальнейшем опустим индекс h в наименованиях сеточных функций $[x]_h$, $x^{(h)}$ и для внесения ясности будем оговаривать особо случаи, в которых будет использоваться непрерывная функция $x(t)$, являющаяся точным решением.

Пусть дифференциальная краевая задача (ДКЗ) для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (ОДУ2) с граничными условиями первого рода [2, 3]

$$\begin{cases} x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = f(t), \quad t \in [a, b], \\ x_0 = \widetilde{x}_0, \quad x_n = \widetilde{x}_n, \end{cases} \tag{2}$$

где $\widetilde{x}_0$, $\widetilde{x}_n$ — заданные числа; $p(t)$, $q(t)$, $f(t)$ — заданные функции, дифференцируемые нужное число раз; $[a, b]$— отрезок интегрирования; аппроксимирована (неважно каким способом) разностной краевой задачей (РКЗ) второго порядка

$$\begin{cases} a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ x_0 = \widetilde{x}_0, \quad x_n = \widetilde{x}_n. \end{cases} \tag{3}$$

Укажем приведенное в [1]

Определение 1. Будем говорить, что решение РКЗ (3) при измельчении сетки сходится к решению ДКЗ (2), если

$$\|[x] - x\| \to 0 \text{ при } h \to 0. \tag{4}$$

Если сверх того выполнено неравенство

$$\|[x]-x\| \leqslant Ch^k,$$

где $C>0$, $k>0$ — некоторые постоянные, не зависящие от h, то будем говорить, что имеет место сходимость порядка h^k или что РКЗ имеет k-тый порядок точности.

В соответствии с [1–3], если разностная краевая задача аппроксимирует ДКЗ с порядком h^k и устойчива, то РКЗ является сходящейся с k-тым порядком точности.

Отметим, что устойчивость является достаточным условием сходимости. В [4, 5] приведены примеры неустойчивых РКЗ, но для которых отсутствуют основания отвергнуть их сходимость в силу практического совпадения сеточных функций $[x]$ и x при конечных n.

Поставим целью при исследовании неустойчивой РКЗ (3) построение характеристики, позволяющей при заданном числе n разбиения отрезка интегрирования $[a,b]$ в той или иной мере оценить различия между сеточными функциями $[x]$ и x независимо от существования или отсутствия аналитического решения ДКЗ (2).

2. Некоторые замечания о хорошей обусловленности и об устойчивости РКЗ второго порядка. Перечислим приведенные в [1] определения.

Определение 2. Будем говорить, что РКЗ (3) с ограниченными в совокупности коэффициентами $|a_i|$, $|b_i|$, $|c_i|<K$, $i=1,2,\ldots,n-1$, хорошо обусловлена, если при всех достаточно больших n она имеет одно и только одно решение x_i, $i=0,1,\ldots,n$, при произвольных $\widetilde{x}_0$, $\widetilde{x}_n$, f_1, f_2, $\ldots$, f_{n-1} и если значения x_i, $i=0,1,\ldots,n$, образующие решение, удовлетворяют оценке

$$|x_i| \leqslant M \max\bigl(|\widetilde{x}_0|,|\widetilde{x}_n|,|f_1|,|f_2|,\ldots,|f_{n-1}|\bigr), \quad i=0,1,\ldots,n, \tag{5}$$

где M — некоторое число, не зависящее от n.

Определение 3. Будем называть РКЗ (3) устойчивой, если при любой правой части $F=(\widetilde{x}_0,\widetilde{x}_n,f_1,f_2,\ldots,f_{n-1})$ она имеет единственное решение x, причем

$$\|x\| \leqslant M_1\|F\|, \tag{6}$$

где M_1 — некоторое число, не зависящее от h.

Вопрос выбора вида нормы $\|\cdot\|$ обсужден в [1].

Выбор нормы вектора в форме максимума модулей его компонентов приведет к совпадению неравенств (5) и (6) — в этом случае определения 2 и 3 совпадают.

Далее норму вектора выберем в форме максимума его компонентов. Именно такая норма рекомендована в [1] для использования.

В [1] доказан критерий, согласно которому для хорошей обусловленности РКЗ (3) необходимо и достаточно, чтобы корни q_1 и q_2 характеристического уравнения

$$c_iq^2+b_iq+a_i=0, \quad i=1,2,\ldots,n-1,$$

были по модулю один больше, а другой меньше единицы:

$$|q_1|<1-\theta/2, \quad |q_2^{-1}|<1-\theta/2, \quad \theta>0, \tag{7}$$

при условии гладкости коэффициентов

$$|a_l - a_j| \leqslant P\left|\frac{l-j}{n}\right|^m, \quad |b_l - b_j| \leqslant P\left|\frac{l-j}{n}\right|^m,$$
$$|c_l - c_j| \leqslant P\left|\frac{l-j}{n}\right|^m, \quad P > 0, \quad m > 0,$$

где θ, P, m — некоторые числа, не зависящие от номера уравнения i и значения n; $l \neq j$, $l < n$, $j < n$.

Возможность контроля выполнения критерия (7) при выполнении численного эксперимента (ЧЭ) делает его использование довольно привлекательным в силу того, что значения критерия выражены через коэффициенты разностного уравнения, а не дифференциального.

3. Матричный метод численного интегрирования краевых задач для ОДУ2. Согласно матричному методу численного интегрирования [6], при фиксированных степени многочлена Тейлора k и значении n или, что то же самое, $h = (b-a)/n$, составляется система уравнений, в которую вносят:

1) два многочлена Тейлора степени k ($k \geqslant 2$), полученных из двух разложений в ряд Тейлора искомого точного решения $x(t)$ в окрестностях слева и справа от некоторого внутреннего узла t_i (центрального узла трехточечного шаблона t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, $i = 1, 2, \ldots, n-1$) сетки D_h;
2) уравнения

$$(q_i x_i + p_i x_i' + x_i'')^{(r)} = f_i^{(r)}, \quad r = 0, 1, \ldots, k-2,$$

полученные дифференцированием r раз обеих частей ОДУ2 задачи (2) и записанные в узле t_i.

В итоге будет получена замкнутая система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\begin{cases} x_i - hx_i' + \dfrac{h^2}{2!}x_i'' - \dfrac{h^3}{3!}x_i''' + \dfrac{h^4}{4!}x_i^{(4)} + \cdots + (-1)^k\dfrac{h^k}{k!}x_i^{(k)} = x_{i-1}, \\ x_i + hx_i' + \dfrac{h^2}{2!}x_i'' + \dfrac{h^3}{3!}x_i''' + \dfrac{h^4}{4!}x_i^{(4)} + \cdots + \dfrac{h^k}{k!}x_i^{(k)} = x_{i+1}, \\ q_i x_i + p_i x_i' + x_i'' = f_i, \\ q_i' x_i + (p_i' + q_i)x_i' + p_i x_i'' + x_i''' = f_i', \\ \qquad \ldots \\ q_i^{(k-2)} x_i + \cdots + x_i^{(k)} = f_i^{(k-2)}. \end{cases} \tag{8}$$

В матричной форме СЛАУ (8) принимает вид

$$A^{ki} W^{ki} = G^{ki} \tag{9}$$

в обозначениях

$$A^{ki} = \begin{bmatrix} 1 & -h & \dfrac{h^2}{2!} & -\dfrac{h^3}{3!} & \dots & (-1)^k \dfrac{h^k}{k!} \\ 1 & h & \dfrac{h^2}{2!} & \dfrac{h^3}{3!} & \dots & \dfrac{h^k}{k!} \\ q_i & p_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ q_i' & q_i + p_i' & p_i & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_i^{(k-2)} & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

$$W^{ki} = \left[x_i \; x_i' \; x_i'' \; x_i''' \; x_i^{(4)} \; \cdots \; x_i^{(k)}\right]^\top, \; G^{ki} = \left[x_{i-1} \; x_{i+1} \; f_i \; f_i' \; f_i'' \; \cdots \; f_i^{(k-2)}\right]^\top.$$

Здесь и ниже первый верхний индекс k означает степень используемого многочлена Тейлора, если речь не идет о показателях алгебраических степеней и степенях производных; второй из пары верхних индексов i в наименованиях матриц и их элементов, если таковой присутствует, означает номер центрального узла трехточечного шаблона, в котором записана матрица. Матрицы A^{ki}, как и ранее в [4, 5, 7], будем называть локальными матрицами.

Вычисляя $B^{ki} = (A^{ki})^{-1}$ (обратимость локальной матрицы A^{ki} будет показана ниже), из (9) находим

$$W^{ki} = B^{ki} G^{ki},$$

или в развернутой форме:

$$x_i = b_{11}^{ki} x_{i-1} + b_{12}^{ki} x_{i+1} + b_{13}^{ki} f_i + \sum_{m=4}^{k+1} b_{1m}^{ki} f_i^{(m-3)}, \tag{11}$$

$$x_i' = b_{21}^{ki} x_{i-1} + b_{22}^{ki} x_{i+1} + b_{23}^{ki} f_i + \sum_{m=4}^{k+1} b_{2m}^{ki} f_i^{(m-3)}, \tag{12}$$

$$x_i'' = b_{31}^{ki} x_{i-1} + b_{32}^{ki} x_{i+1} + b_{33}^{ki} f_i + \sum_{m=4}^{k+1} b_{3m}^{ki} f_i^{(m-3)}, \tag{13}$$

$$\dots$$

$$x_i^{(k)} = b_{k+1,1}^{ki} x_{i-1} + b_{k+1,2}^{ki} x_{i+1} + b_{k+1,3}^{ki} f_i + \sum_{m=4}^{k+1} b_{k+1,m}^{ki} f_i^{(m-3)}, \tag{14}$$

где b_{lm}^{ki}, $l = 1, 2, \dots, k+1$, $m = 1, 2, \dots, k+1$, — элементы матрицы B^{ki} в узле t_i. При $k = 2$ последние суммы в соотношениях (11)–(14) отсутствуют.

Из равенств (11), являющихся разностными уравнениями второго порядка [1] для трехточечного шаблона t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, $i = 1, 2, \dots, n-1$, с учетом граничных условий задачи (2), составляется следующая СЛАУ:

$$\begin{cases} x_1 - b_{12}^{k1} x_2 = b_{13}^{k1} f_1 + \sum\limits_{m=4}^{k+1} b_{1m}^{k1} f_1^{(m-3)} + b_{11}^{k1} \widetilde{x}_0, \\ -b_{11}^{ki} x_{i-1} + x_i - b_{12}^{ki} x_{i+1} = b_{13}^{ki} f_i + \sum\limits_{m=4}^{k+1} b_{1m}^{ki} f_i^{(m-3)}, \quad i = 2, 3, \ldots, n-2, \\ -b_{11}^{k,n-1} x_{n-2} + x_{n-1} = b_{13}^{k,n-1} f_{n-1} + \sum\limits_{m=4}^{k+1} b_{1m}^{k,n-1} f_{n-1}^{(m-3)} + b_{12}^{k,n-1} \widetilde{x}_n, \end{cases} \tag{15}$$

которая и является РКЗ, аппроксимирующей ДКЗ (2).

Вопрос оценки порядка аппроксимации (ПА) РКЗ для ОДУ2 и систем ОДУ2 исследован в [4, 7], где показано, что именно значение k определяет ПА РКЗ.

4. Псевдоневязки, точное и псевдоточные решения РКЗ. Далее под РКЗ будем понимать равенства (12)–(14) совместно с системой (15), если под ее решением подразумеваются сеточные значения искомой функции вместе со своими производными вплоть до порядка k. Такое решение назовем полным точным решением РКЗ и обозначим его как

$$\mathbf{x}_h^k = (x_0, x_n) \cup \mathbf{x}_{h,i}^k, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{16}$$

где значения $x_0 = \widetilde{x}_0, x_n = \widetilde{x}_n$ взяты из граничных условий ДКЗ (2) и

$$\mathbf{x}_{h,i}^k = (x_i, x_i', x_i'', \ldots, x_i^{(k)}) \tag{17}$$

в силу того, что соотношения (12)–(14) не позволяют вычислить производные вплоть до порядка k в граничных узлах сетки при найденном решении $(\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_n) \cup x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, РКЗ (15).

Замечание 1. Решение (16) обратит в верные равенства все соотношения системы (8) в силу того, что уравнения РКЗ (12)–(15), связанные посредством элементов матриц $B^{ki} = (A^{ki})^{-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, есть прямое следствие системы (8).

Согласно [1, 4], ДКЗ и РКЗ могут быть записаны в компактной символической форме как

$$Lx = f \tag{18}$$

и

$$L_h^k x = f_h^k \tag{19}$$

соответственно, где L — дифференциальный оператор, L_h^k — линейный оператор, k — степень используемого многочлена Тейлора, h — шаг сетки D_h.

Сеточная функция x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, являющаяся решением РКЗ, при подстановке в уравнения этой РКЗ обратит их в верные равенства. В [1] показано, что подстановка в уравнения задачи (19) значений сеточной функции $[x_i]$, отличающихся от x_i, приведет к некоторому отличию от верных равенств. Эти отличия и характеризует невязка δf_h^k. Иными словами, подстановка $[x]$ в задачу (19) приведет к зависимости

$$L_h^k[x] = f_h^k + \delta f_h^k.$$

ПА РКЗ (19), как показано в [4], определяется оценкой

$$\|\delta f_h^k\| \leqslant \begin{cases} C_1 h^k, & k \text{ — четное}, \\ C_2 h^{k-1}, & k \text{ — нечетное}, \end{cases} \tag{20}$$

где C_1, C_2 — некоторые числа, не зависящие от h.

Попытаемся выполнить аналогичную процедуру, но в качестве уравнения подстановки и вычисления невязки, которую будем далее называть псевдоневязкой, примем задачу (18).

Для ОДУ2 $x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = f(t)$ введем формально понятие псевдоневязки на некотором векторе $\mathbf{x}(t) = \big(x(t), x(t)', x(t)''\big)$ как

$$\delta\mathbf{x}(t) = x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) - f(t). \tag{21}$$

Решение РКЗ (12)–(15) для вычисления псевдоневязок

$$\mathbf{x}_h^k = (\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_n) \cup \mathbf{x}_{h,i}^k, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{22}$$

где

$$\mathbf{x}_{h,i}^k = (x_i, x_i', x_i'') \tag{23}$$

назовем точным решением.

На точном решении (23) в соответствии с (21) окажется

$$\delta\mathbf{x}_{h,i}^k = x_i'' + p_i x_i' + q_i x_i - f_i \equiv 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{24}$$

в силу того, что значения x_i, x_i', x_i'' решения (23) обратят в верное равенство и третье соотношение СЛАУ (8) в соответствии с замечанием 1, откуда следует

$$\|\delta\mathbf{x}_h^k\| \equiv 0.$$

Поставим целью на основе точного решения (22) построение некоторого приближенного решения (псевдоточного решения), на котором норма псевдоневязки отличалась бы от тривиального значения с дальнейшим исследованием ее поведения при изменении величин h и k.

Ряды Тейлора, содержащие только знаки «плюс» между слагаемыми, будем называть *plus*-рядами Тейлора, в противном случае — *minus*-рядами Тейлора; аналогичную терминологию примем и для многочленов Тейлора.

Пусть $\widehat{x}(t)$ есть некоторая неизвестная дифференцируемая нужное число раз функция, разложение которой и ее первой и второй производных в окрестностях слева от некоторого внутреннего узла t_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, сетки D_h запишем с использованием *minus*-рядов Тейлора:

$$\begin{cases} \widehat{x}_{i-1} = \widehat{x}_i - h\widehat{x}_i' + \dfrac{h^2}{2!}\widehat{x}_i'' - \dfrac{h^3}{3!}\widehat{x}_i''' + \dfrac{h^4}{4!}\widehat{x}_i^{(4)} + \cdots + (-1)^k \dfrac{h^k}{k!}\widehat{x}_i^{(k)} + R_{i-1}^k, \\ \widehat{x}_{i-1}' = \widehat{x}_i' - h\widehat{x}_i'' + \dfrac{h^2}{2!}\widehat{x}_i''' - \dfrac{h^3}{3!}\widehat{x}_i^{(4)} + \cdots + (-1)^{k-1} \dfrac{h^{k-1}}{(k-1)!}\widehat{x}_i^{(k)} + R_{i-1}^{k-1}, \\ \widehat{x}_{i-1}'' = \widehat{x}_i'' - h\widehat{x}_i''' + \dfrac{h^2}{2!}\widehat{x}_i^{(4)} - \cdots + (-1)^k \dfrac{h^{k-2}}{(k-2)!}\widehat{x}_i^{(k)} + R_{i-1}^{k-2}, \end{cases} \tag{25}$$

а в окрестностях справа — с использованием *plus*-рядов Тейлора:

$$\begin{cases} \widehat{x}_{i+1} = \widehat{x}_i + h\widehat{x}'_i + \dfrac{h^2}{2!}\widehat{x}''_i + \dfrac{h^3}{3!}\widehat{x}'''_i + \dfrac{h^4}{4!}\widehat{x}^{(4)}_i + \cdots + \dfrac{h^k}{k!}\widehat{x}^{(k)}_i + R^k_{i+1}, \\ \widehat{x}'_{i+1} = \widehat{x}'_i + h\widehat{x}''_i + \dfrac{h^2}{2!}\widehat{x}'''_i + \dfrac{h^3}{3!}\widehat{x}^{(4)}_i + \cdots + \dfrac{h^{k-1}}{(k-1)!}\widehat{x}^{(k)}_i + R^{k-1}_{i+1}, \\ \widehat{x}''_{i+1} = \widehat{x}''_i + h\widehat{x}'''_i + \dfrac{h^2}{2!}\widehat{x}^{(4)}_i + \cdots + \dfrac{h^{k-2}}{(k-2)!}\widehat{x}^{(k)}_i + R^{k-2}_{i+1}, \end{cases} \tag{26}$$

где

$$R^k_{i-1},\ R^k_{i+1} = \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}x^{(k+1)}(\xi) = O(h^{k+1}), \quad \xi \in (t_i,\ t_{i+1}), \tag{27}$$

есть дополнительные члены разложений в ряд Тейлора в форме Лагранжа [8].

Запишем формально многочлены Тейлора, соответствующие рядам (25), (26), но в правых частях которых вместо неизвестных $\widehat{x}_i,\ \widehat{x}'_i,\ \widehat{x}''_i,\ \ldots,\ \widehat{x}^{(k)}_i$ используем найденные значения полного точного решения (17), получим

$$\begin{cases} \widehat{x}_{i-1} = x_i - hx'_i + \dfrac{h^2}{2!}x''_i - \dfrac{h^3}{3!}x'''_i + \dfrac{h^4}{4!}x^{(4)}_i + \cdots + (-1)^k\dfrac{h^k}{k!}x^{(k)}_i, \\ \widehat{x}'_{i-1} = x'_i - hx''_i + \dfrac{h^2}{2!}x'''_i - \dfrac{h^3}{3!}x^{(4)}_i + \cdots + (-1)^{k-1}\dfrac{h^{k-1}}{(k-1)!}x^{(k)}_i, \\ \widehat{x}''_{i-1} = x''_i - hx'''_i + \dfrac{h^2}{2!}x^{(4)}_i - \cdots + (-1)^k\dfrac{h^{k-2}}{(k-2)!}x^{(k)}_i, \end{cases} \tag{28}$$

и

$$\begin{cases} \widehat{x}_{i+1} = x_i + hx'_i + \dfrac{h^2}{2!}x''_i + \dfrac{h^3}{3!}x'''_i + \dfrac{h^4}{4!}x^{(4)}_i + \cdots + \dfrac{h^k}{k!}x^{(k)}_i, \\ \widehat{x}'_{i+1} = x'_i + hx''_i + \dfrac{h^2}{2!}x'''_i + \dfrac{h^3}{3!}x^{(4)}_i + \cdots + \dfrac{h^{k-1}}{(k-1)!}x^{(k)}_i, \\ \widehat{x}''_{i+1} = x''_i + hx'''_i + \dfrac{h^2}{2!}x^{(4)}_i + \cdots + \dfrac{h^{k-2}}{(k-2)!}x^{(k)}_i \end{cases} \tag{29}$$

соответственно и сразу отметим, что правые части первых равенств систем (28), (29) совпадают с левыми частями двух первых равенств СЛАУ (8). Следовательно, в соответствии с замечанием 1

$$\widehat{x}_i = x_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{30}$$

где x_i — элементы точного решения РКЗ (12)–(15), определяемые (22).

Оставшиеся соотношения систем (28), (29) в СЛАУ (8) не входят и их точного выполнения ожидать не приходится; действительно, их правые части совпадают с многочленами Тейлора уже найденных значений $x'_i,\ x''_i$. Следовательно, например, два последних соотношения системы (28) примут вид

$$\begin{cases} \widehat{x}'_{i-1} = x'_i - hx''_i + \dfrac{h^2}{2!}x'''_i - \dfrac{h^3}{3!}x^{(4)}_i + \cdots + (-1)^{k-1}\dfrac{h^{k-1}}{(k-1)!}x^{(k)}_i \approx x'_{i-1}, \\ \widehat{x}''_{i-1} = x''_i - hx'''_i + \dfrac{h^2}{2!}x^{(4)}_i - \cdots + (-1)^k\dfrac{h^{k-2}}{(k-2)!}x^{(k)}_i \approx x''_{i-1}. \end{cases} \tag{31}$$

Ситуация с системой (29) аналогична. Тогда

$$\widehat{x}'_i \approx x'_i, \quad \widehat{x}''_i \approx x''_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{32}$$

где x'_i, x''_i — элементы точного решения (22).

Преобразуем вторые и третьи соотношения систем (28), (29) к виду, удобному для выполнения вычислений в конкретном узле t_i сетки D_h.

Возможно несколько способов реализации такого преобразования.

1. Два $minus$-многочлена в узлах x_0, x_1; в остальных узлах использованы $plus$-многочлены.
2. Два $plus$-многочлена в узлах x_{n-1}, x_n; в остальных узлах использованы $minus$-многочлены.
3. Каждое соотношение системы есть полусумма соответствующих слагаемых многочленов Тейлора, которые расположены в узлах с одинаковыми номерами, двух перечисленных выше способов.
4. В расположенных левее середины отрезка интегрирования $[a, b]$ узлах использованы $minus$-многочлены, правее — $plus$-многочлены.

Отдать предпочтение тому или иному способу проблематично, тем не менее выпишем систему, соответствующую способу 4,

$$\begin{cases} \widehat{x}'_i = x'_{i+1} - hx''_{i+1} + \dfrac{h^2}{2!}x'''_{i+1} - \dfrac{h^3}{3!}x^{(4)}_{i+1} + \cdots + (-1)^{k-1}\dfrac{h^{k-1}}{(k-1)!}x^{(k)}_{i+1}, \\ \widehat{x}''_i = x''_{i+1} - hx'''_{i+1} + \dfrac{h^2}{2!}x^{(4)}_{i+1} - \cdots + (-1)^{k}\dfrac{h^{k-2}}{(k-2)!}x^{(k)}_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, m-1, \\ \widehat{x}'_i = x'_{i-1} + hx''_{i-1} + \dfrac{h^2}{2!}x'''_{i-1} + \dfrac{h^3}{3!}x^{(4)}_{i-1} + \cdots + \dfrac{h^{k-1}}{(k-1)!}x^{(k)}_{i-1}, \\ \widehat{x}''_i = x''_{i-1} + hx'''_{i-1} + \dfrac{h^2}{2!}x^{(4)}_{i+1} + \cdots + \dfrac{h^{k-2}}{(k-2)!}x^{(k)}_{i-1}, \qquad i = m, m+1, \ldots, n, \end{cases} \tag{33}$$

где m есть целая часть дроби $n/2$.

Псевдоточным решением РКЗ (12)–(15) назовем

$$\widehat{\mathbf{x}}^k_h = \cup \widehat{\mathbf{x}}^k_{h,i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{34}$$

где

$$\widehat{\mathbf{x}}^k_{h,i} = (x_i, \widehat{x}'_i, \widehat{x}''_i) \tag{35}$$

и значения $x_0 = \widetilde{x}_0$, $x_n = \widetilde{x}_n$ взяты из граничных условий ДКЗ (2); оставшиеся x_i в соответствии с (30) взяты из точного решения (22) или, что то же самое, вычислены с использованием первых равенств систем (28) и(или) (29); $\widehat{x}'_i$, $\widehat{x}''_i$ есть результат вычисления по системе соотношений одного из способов реализации, например, по (33).

Вычислим меру различий между элементами следующих пар: $(x'_i, \widehat{x}'_i)$ и $(x''_i, \widehat{x}''_i)$. Система (31) и ряды Тейлора

$$\begin{cases} x'_{i-1} = x'_i - hx''_i + \dfrac{h^2}{2!}x'''_i - \dfrac{h^3}{3!}x^{(4)}_i + \cdots + (-1)^{k-1}\dfrac{h^{k-1}}{(k-1)!}x^{(k)}_i + R^{k-1}_{i-1}, \\ x''_{i-1} = x''_i - hx'''_i + \dfrac{h^2}{2!}x^{(4)}_i - \cdots + (-1)^{k}\dfrac{h^{k-2}}{(k-2)!}x^{(k)}_i + R^{k-2}_{i-1}, \end{cases}$$

дают оценки

$$x'_{i-1} - \widehat{x}'_{i-1} = R_{i-1}^{k-1}, \quad x''_{i-1} - \widehat{x}''_{i-1} = R_{i-1}^{k-2},$$

или

$$x'_i - \widehat{x}'_i = R_i^{k-1}, \quad x''_i - \widehat{x}''_i = R_i^{k-2}. \tag{36}$$

Записывая псевдоневязку на псевдоточном решении (35) во всех узлах сетки D_h, получим оценку

$$\delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k = \widehat{x}''_i + p_i\widehat{x}'_i + q_i x_i - f_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{37}$$

ожидать тривиального значения которой в силу (32) в общем случае не приходится.

Вычислим оценку псевдоневязки на векторе $\widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Учитывая тривиальное значение псевдоневязки (24), из (37) с учетом (36) и пренебрегая старшими степенями, имеем

$$\begin{aligned}\delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k = \delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k - \delta\mathbf{x}_{h,i}^k = \widehat{x}''_i + p_i\widehat{x}'_i + q_i x_i - f_i - (x''_i + p_i x'_i + q_i x_i - f_i) = \\ = -(x''_i - \widehat{x}''_i) - p_i(x'_i - \widehat{x}'_i) \approx -R_i^{k-2} - p_i R_i^{k-1} \approx R_i^{k-2}.\end{aligned} \tag{38}$$

Отсюда, положив

$$R^{k-2} = \max\bigl(|R_1^{k-2}|, |R_2^{k-2}|, \ldots, |R_{n-1}^{k-2}|\bigr), \tag{39}$$

получим оценку нормы с порядком $k-1$:

$$\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\| \approx R^{k-2} = O(h^{k-1}) \leqslant Ch^{k-1} \tag{40}$$

($C > 0$ не зависит от h), где в соответствии с принятом выше положением о выборе норм

$$\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\| = \max(|\delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,1}^k|,\ |\delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,2}^k|,\ \ldots,\ |\delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,n-1}^k|) \tag{41}$$

есть норма псевдоневязки, которая, как следует из оценки (40), монотонно убывает и при уменьшении h ($k = \text{const}$), и при увеличении k ($h = \text{const}$). Отметим, что при вычислении нормы (40) не использованы граничные узлы сетки D_h в силу отсутствия компонентов x'_0, x'_n и x''_n, x''_n в полном точном решении (22).

Поставим целью повысить на единицу порядок оценки нормы псевдоневязки. Попытаемся исключить влияние второй производной, как имеющей в соответствии с (36) более низкий порядок в сравнении с первой производной, на оценку нормы. Теперь псевдоточное решение определим из решения (34) путем замены $\widehat{x}''_i$ на значения x''_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, из точного решения (22), оставив прежними значения в граничных узлах:

$$\widehat{\mathbf{x}}_h^k = \cup\widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{42}$$

где

$$\begin{cases}\widehat{\mathbf{x}}_{h,0}^k = (\widetilde{x}_0, \widehat{x}'_0, \widehat{x}''_0), \\ \widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k = (x_i, \widehat{x}'_i, x''_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ \widehat{\mathbf{x}}_{h,n}^k = (\widetilde{x}_n, \widehat{x}'_n, \widehat{x}''_n).\end{cases} \tag{43}$$

На решении (43) вместо (38), как и ранее для всех $i = 1, 2, \ldots, n-1$, получим

$$\delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^{k} = -p_i(x_i' - \widehat{x}_i') \approx R_i^{k-1},$$

откуда следует оценка нормы с порядком k:

$$\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\| \approx R^{k-1} = O(h^k) \leqslant Ch^k, \tag{44}$$

где R^{k-1} определено аналогично (39).

Помимо приведенных двух псевдоточных решений можно построить еще ряд псевдоточных решений, например,

$$\widehat{\mathbf{x}}_h^k = \begin{cases} \widehat{\mathbf{x}}_{h,0}^k = (\widetilde{x}_0, \widehat{x}_0', \widehat{x}_0''), & \widehat{\mathbf{x}}_{h,n}^k = (\widetilde{x}_n, \widehat{x}_n', \widehat{x}_n''), \\ \widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k = (x_i, x_i', \widehat{x}_i''), & i = 1, 2, \ldots, n-1, \end{cases} \tag{45}$$

$$\widehat{\mathbf{x}}_h^k = \begin{cases} \widehat{\mathbf{x}}_{h,0}^k = (\widetilde{x}_0, \widehat{x}_0', \widehat{x}_0''), & \widehat{\mathbf{x}}_{h,n}^k = (\widetilde{x}_n, \widehat{x}_n', \widehat{x}_n''), \\ \widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k = (\widehat{x}_i, \widehat{x}_i', x_i''), & i = 1, 2, \ldots, n-1, \end{cases} \tag{46}$$

$$\widehat{\mathbf{x}}_h^k = \begin{cases} \widehat{\mathbf{x}}_{h,0}^k = (\widetilde{x}_0, \widehat{x}_0', \widehat{x}_0''), & \widehat{\mathbf{x}}_{h,n}^k = (\widetilde{x}_n, \widehat{x}_n', \widehat{x}_n''), \\ \widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k = (\widehat{x}_i, x_i', \widehat{x}_i''), & i = 1, 2, \ldots, n-1, \end{cases} \tag{47}$$

$$\widehat{\mathbf{x}}_h^k = \begin{cases} \widehat{\mathbf{x}}_{h,0}^k = (\widetilde{x}_0, \widehat{x}_0', \widehat{x}_0''), & \widehat{\mathbf{x}}_{h,n}^k = (\widetilde{x}_n, \widehat{x}_n', \widehat{x}_n''), \\ \widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k = (\widehat{x}_i, \widehat{x}_i', \widehat{x}_i''), & i = 1, 2, \ldots, n-1, \end{cases} \tag{48}$$

где значения $\widehat{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, в решениях (46) и (48) дают соотношение (12) своим разрешением относительно искомой функции при уже вычисленных значениях $\widehat{x}_i'$, а в решении (47) дают соотношение (13) при уже вычисленных значениях $\widehat{x}_i''$. Указанное разрешение соотношений (12), (13) относительно искомой функции возможно лишь при нечетных n, что не является существенным ограничением.

Вычислим оценки порядков норм псевдоневязки $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ на перечисленных псевдоточных решениях $\widehat{\mathbf{x}}_h^k$, которые далее будем обозначать как ПНПн$(\,\cdot\,)$, где $(\,\cdot\,)$ — ссылка на обозначение конкретного решения. В частности,

$$\text{ПНПн}(34) = k-1, \quad \text{ПНПн}(42) = k, \quad \text{ПНПн}(45) = k-1. \tag{49}$$

Последняя оценка в (49) непосредственно следует из (38).

Для псевдоточного решения (46) из (12) имеем при уже вычисленных значениях x_i' и $\widehat{x}_i'$:

$$x_i' = b_{21}^{ki} x_{i-1} + b_{22}^{ki} x_{i+1} + b_{23}^{ki} f_i + \sum_{m=4}^{k+1} b_{2m}^{ki} f_i^{(m-3)},$$

$$\widehat{x}_i' = b_{21}^{ki} \widehat{x}_{i-1} + b_{22}^{ki} \widehat{x}_{i+1} + b_{23}^{ki} f_i + \sum_{m=4}^{k+1} b_{2m}^{ki} f_i^{(m-3)},$$

откуда

$$x_i' - \widehat{x}_i' = b_{21}^{ki}(x_{i-1} - \widehat{x}_{i-1}) + b_{22}^{ki}(x_{i+1} - \widehat{x}_{i+1}). \tag{50}$$

Аналогично [4] можно показать справедливость оценок элементов обратной матрицы $B^{ki} = (A^{ki})^{-1}$:

$$b_{lm}^{ki} \approx b_{lm}^{2i}, \quad l = 2, 3, \quad m = 1, 2. \tag{51}$$

Принимая, что порядок меры различий между парами $(x_i, \widehat{x}_i)$, как и ранее между парами $(x_i', \widehat{x}_i')$ и $(x_i'', \widehat{x}_i'')$, не зависит от номера i, из (50) и (51) имеем

$$x_i' - \widehat{x}_i' \approx b_{21}^{2i} R_{i-1}^w + b_{22}^{2i} R_{i+1}^w, \tag{52}$$

где w — порядок меры различий, пока неизвестное число. Непосредственными вычислениями легко убедиться в справедливости следующих формул:

$$b_{21}^{2i} = -\frac{2}{h}, \quad b_{22}^{2i} = \frac{2}{h}. \tag{53}$$

Подстановка (53) в (52) дает

$$\frac{h\,(x_i' - \widehat{x}_i')}{2} \approx -R_{i-1}^w + R_{i+1}^w \approx R_i^w,$$

или, с учетом первого равенства (36),

$$hR_i^{k-1} = R_i^k \approx R_i^w,$$

и окончательно

$$x_i - \widehat{x}_i = R_i^k. \tag{54}$$

На решении (46) с учетом первого равенства (36) и (54) имеем

$$\delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k = -p_i(x_i' - \widehat{x}_i') - q_i(x_i - \widehat{x}_i) = -p_i R_i^{k-1} - q_i R_i^k \approx R_i^{k-1}. \tag{55}$$

Оценка (55) справедлива и для псевдоточного решения (48) за счет наличия компонента $\widehat{x}_i'$ в нем.

На решении (47) по аналогии с вышеизложенным получено

$$\frac{h(x_i'' - \widehat{x}_i'')}{p_i} \approx R_{i-1}^w - R_{i+1}^w \approx R_i^w,$$

$$x_i - \widehat{x}_i = R_i^{k-1},$$

$$\delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k = -\left(x_i'' - \widehat{x}_i''\right) - q_i\left(x_i - \widehat{x}_i\right) = -R_i^{k-2} - q_i R_i^{k-1} \approx R_i^{k-2}. \tag{56}$$

Оценки (55), (56) позволяют окончательно записать

$$\text{ПНПн}(46) = k, \quad \text{ПНПн}(47) = k - 1, \quad \text{ПНПн}(48) = k. \tag{57}$$

Разность и норму на некоторых решениях (точных или псевдоточных) $\mathbf{x}_h^k$ и $\mathbf{v}_h^k$ вида (58):

$$\mathbf{x}_h^k = \cup(x_i, x_i', x_i''), \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{58}$$

определим как

$$\mathbf{x}_h^k - \mathbf{v}_h^k = \cup(x_i - v_i, x_i' - v_i', x_i'' - v_i''), \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{59}$$

$$\|\mathbf{x}_h^k\| = \max(\|x\|, \|x'\|, \|x''\|). \tag{60}$$

Вычислим порядок нормы разности между точным решением $\mathbf{x}_h^k$ (22) и любым из перечисленных выше псевдоточных решений $\widehat{\mathbf{x}}_h^k$ (34), (42), (45)–(48).

Например, на решении (34) в соответствии с (36), (59), (60) имеем

$$\mathbf{x}_h^k - \widehat{\mathbf{x}}_h^k = \cup(x_i - x_i, x_i' - \widehat{x}_i', x_i'' - \widehat{x}_i'') = \cup(0, R_i^{k-1}, R_i^{k-2}), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{61}$$

$$\|\mathbf{x}_h^k - \widehat{\mathbf{x}}_h^k\| = \max(0, R^{k-1}, R^{k-2}) \approx R^{k-2} = O(h^{k-1}) \leqslant Ch^{k-1}, \tag{62}$$

откуда следует оценка нормы разности с порядком $k-1$, совпадающая с приведенной в (49) оценкой ПНПн(34). Отметим: при вычислении нормы разности (61), как и ранее при вычислении ПНПн(34), не использованы граничные узлы сетки D_h в силу отсутствия компонентов x_0', x_n' и x_n'', x_n'' в точном решении (22).

Использование таких операций, как

а) пренебрежение старшими степенями при вычислении псевдоневязок $\delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, согласно, например, (38), (55) или (56) при вычислении ПНПн($\widehat{\mathbf{x}}_h^k$);

б) вычисление $\max(\,\cdot\,)$ согласно (60) при вычислении нормы (62),

приводит на оставшихся псевдоточных решениях $\widehat{\mathbf{x}}_h^k$ (42), (45)–(48) к совпадению оценки ПНПн($\widehat{\mathbf{x}}_h^k$) с оценкой порядка нормы разности между точным $\mathbf{x}_h^k$ и псевдоточным $\widehat{\mathbf{x}}_h^k$ решениями, как это уже оказалось на решении (34).

Соотношение (62) на любом из перечисленных $\widehat{\mathbf{x}}_h^k$ даст

$$\|\mathbf{x}_h^k - \widehat{\mathbf{x}}_h^k\| \to 0 \ \text{ при } h \to 0 \ \text{ или при } k \to \infty,$$

что свидетельствует о стремлении псевдоточного решения $\widehat{\mathbf{x}}_h^k$ к точному решению $\mathbf{x}_h^k$; при этом напомним, что на точном решении всегда $\|\delta\mathbf{x}_h^k\| \equiv 0$, тогда как на псевдоточном наоборот, а именно: $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\| \neq 0$, причем норма на псевдоточном решении монотонно убывает согласно, например, (40).

Анализ оценок (36), (40), (44), (62) приводит к заключению, что порядок нормы разности между точным решением $\mathbf{x}_h^k$ и любым псевдоточным решением $\widehat{\mathbf{x}}_h^k$, как и ПНПн($\widehat{\mathbf{x}}_h^k$), определяет только степень дополнительного члена разложения в ряд Тейлора в форме Лагранжа (27) старшей производной в решении $\widehat{\mathbf{x}}_h^k$ при условии, что эта производная не является компонентом точного решения $\mathbf{x}_h^k$, и этот порядок нормы разности никак не зависит от четности или нечетности k.

Анализ оценок порядков (49) и (57) при выборе формы псевдоточного решения $\widehat{\mathbf{x}}_h^k$ для дальнейшего исследования рассматриваемой задачи отдает предпочтение осуществлению выбора именно среди решений (42), (46), (48) как имеющих максимально возможный ПНПн($\widehat{\mathbf{x}}_h^k$), совпадающий со степенью k используемого многочлена Тейлора и с ПА РКЗ при четном k.

Поэтому псевдоточное решение (42), как не требующее дополнительных расчетов своих компонентов в сравнении с оставшимися решениями (46), (48), будет далее использовано при выполнении численных экспериментов, и именно оно будет далее называться «псевдоточным решением» РКЗ.

Полученные выше результаты будут далее использованы при исследовании устойчивости и сходимости РКЗ.

5. Численные эксперименты (выбор дифференциальных уравнений, терминология, планирование эксперимента). В [5] показано, что классический метод сеток [1], совпадающий при $k = 2$ с матричным методом численного интегрирования [6], приводит к устойчивой в смысле определения 3 РКЗ при

$$q_i < 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{63}$$

где $q(t)$ — входящая в ОДУ2 ДКЗ (2) заданная функция. Именно при условии нарушения неравенств (63) и были выбраны перечисленные ниже ОДУ2, которые вместе со своими общими решениями $x(t)$ взяты из [9, 10]:

$$x'' + x' \operatorname{tg} t + x \cos^2 t = 0, \quad x(t) = C_1 \sin(\sin t) + C_2 \cos(\sin t), \tag{64}$$

$$x'' - x' \operatorname{tg}^{-1} t + x \sin^2 t = 0, \quad x(t) = C_1 \cos(\cos t) + C_2 \sin(\cos t), \tag{65}$$

$$x'' - \frac{3x'}{t} + \frac{4x}{t^2} = \frac{5}{t}, \quad x(t) = 5t + C_1 t^2 + C_2 t^2 \ln|\,t\,|, \tag{66}$$

$$x'' - \frac{(t+1)x'}{t} + \frac{x}{t} = 0, \quad x(t) = C_1(t+1) + C_2 e^t, \ \ t > 0, \tag{67}$$

$$x'' + \frac{x'}{t^2} - \frac{x}{t^3} = 0, \quad x(t) = C_1 t + C_2 t e^{1/t}, \ \ t < 0, \tag{68}$$

$$x'' + \frac{2x'}{t} + x = \frac{1}{t}, \quad x(t) = \frac{C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t) + 1}{t}, \tag{69}$$

$$x'' + \frac{3x'}{t} + \frac{x}{t^2} = \frac{1}{t^3}, \quad x(t) = \frac{0.5 \ln^2 |t| + C_1 + C_2 \ln|\,t\,|}{t}, \tag{70}$$

$$x'' - \frac{2x'}{t} + \frac{(t^2+2)x}{t^2} = \frac{t^2+6}{t^3}, \quad x(t) = \frac{C_1 t^2 \cos t + C_2 t^2 \sin t + 1}{t}, \tag{71}$$

$$x'' + \frac{4tx'}{t^2-1} + \frac{2x}{t^2-1} = \frac{6t}{t^2-1}, \quad x(t) = \frac{C_1}{t+1} + \frac{C_2}{t-1} + t, \ \ t < -1, \ t > 1, \tag{72}$$

$$x'' + \frac{(t-3)x'}{t^2-1} - \frac{x}{t^2-1} = 0, \quad x(t) = C_1(t-3) + \frac{C_2}{t+1}, \ \ -1 < t < 1, \tag{73}$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования.

Отметим следующие особенности выбранных уравнений при конечных t:

1) общие решения ОДУ2 (64)–(67) ограничены;
2) общее решение ОДУ2 (68) имеет ограниченный левосторонний и неограниченный правосторонний пределы в точке $t = 0$; но в области $t < 0$, в которой условие (63) нарушено, общее решение ограничено;
3) общие решения ОДУ2 (69)–(73) имеют неограниченные левосторонний и правосторонний пределы в одной или в двух точках;
4) для всех перечисленных ОДУ2 имеется некоторое значение $\widetilde{t}$, в некоторой окрестности которого хотя бы одна входящая в ОДУ2 функция неограниченна.

Каждый отдельный численный эксперимент (ЧЭ) для РКЗ выполнялся при некоторых фиксированных значениях $n \in [n_{\min}, n_{\max}] = [20, 15\,000]$, $k \in [k_{\min}, k_{\max}] = [2, 9]$ и границах отрезка $[a, b]$. Выбор отрезков изменения величин n, k обусловлен возможностями ПК в смысле накопления компьютерных погрешностей округления [3] и разумными временными затратами на выполнение ЧЭ. Зависимость (1) позволяет найти соответствующий отрезку $[n_{\min}, n_{\max}]$ отрезок для $h \in [h_{\min}, h_{\max}]$. Границы отрезка интегрирования

$[a, b]$ при составлении каждой РКЗ были выбраны, если не оговорено особо, исходя из условия $h_{\max} = 0.2$ при $n = 20$.

В компьютерной программе для вычисления решения РКЗ (15) был реализован метод прогонки [1–3]; расчеты выполнялись с двойной точностью.

Далее примем, если не оговорено особо,

$$\widetilde{t} \notin [a, b]. \tag{74}$$

Введем терминологию и будем различать:

1) совокупность результатов группы ЧЭ, выполненных при увеличении $n \in [n_{\min}, n_{\max}]$ при фиксированных k и $[a, b]$, назовем и обозначим
   а) экспериментом первого типа (Э1), если в достаточно больших окрестностях числа $\widetilde{t}$ не содержатся границы отрезка $[a, b]$; наиболее приближенную к $\widetilde{t}$ границу отрезка будем называть критической границей и обозначать $\overline{a}(\overline{b})$;
   б) Э1$\widetilde{t}$, если в некоторой окрестности числа $\widetilde{t}$ содержится критическая граница $\overline{a}(\overline{b})$;
2) совокупность результатов группы ЧЭ, выполненных при увеличении $k \in [k_{\min}, k_{\max}]$ при фиксированных n и $[a, b]$, назовем и обозначим
   а) экспериментом второго типа (Э2), если в достаточно больших окрестностях числа $\widetilde{t}$ не содержится критическая граница $\overline{a}(\overline{b})$;
   б) Э2$\widetilde{t}$, если в некоторой окрестности числа $\widetilde{t}$ содержится критическая граница $\overline{a}(\overline{b})$.
3) совокупность результатов группы ЧЭ, выполненных при изменении местоположения отрезка $[a, b]$ при фиксированных n и k, назовем и обозначим
   а) экспериментом третьего типа (Э3), если в достаточно больших окрестностях числа $\widetilde{t}$ не содержится критическая граница $\overline{a}(\overline{b})$;
   б) Э3$\widetilde{t}$, если критическая граница $\overline{a}(\overline{b})$, находясь в некоторой окрестности числа $\widetilde{t}$, приближается к нему.

Вычисление оценки порядка нормы псевдоневязки согласно (44) не предполагает использования граничных узлов сетки D_h, поэтому

Замечание 2. Использование различных значений h в группе ЧЭ ставит в эксперименте Э1 значения вычисляемых характеристик $|\delta\widehat{\mathbf{x}}^k_{h,i}|$, $i = 0, 1, \ldots, n$, и нормы $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}^k_h\|$ в зависимость от h. Действительно

1) при изменении h меняются абсолютные значения узлов t_1, t_{n-1}, что приводит к
   а) появлению нефиксированного расстояния от узлов t_1, t_{n-1} до границ;
   б) изменению протяженности области вычисления компонентов вектора $\delta\widehat{\mathbf{x}}^k_h$ соответствующей задачи;
2) вычисление компонентов вектора $\delta\widehat{\mathbf{x}}^k_h$ в фиксированной для всех h области, границы которой определяют узлы t_1, t_{n-1}, соответствующие $h = h_{\max}$, приводит к потере части приграничных узлов для всех задач группы при $h \in [h_{\min}, h_{\max})$.

Из замечания 2 следует, что достоверность результатов эксперимента Э2 несколько превышает достоверность результатов эксперимента Э1.

6. Условно устойчивая РКЗ, условно устойчивое и условно сходящееся решения. Дифференциальной задаче (18) формально придадим вид
$$L[\mathbf{x}] = f, \tag{75}$$
где $[\mathbf{x}] = (x(t), x'(t), x''(t))$ — непрерывная функция, являющаяся полным точным решением ДКЗ (75).

По аналогии с точным решением (22) сеточное решение ДКЗ (75) при фиксированном h определим как
$$[\mathbf{x}_h] = \cup[\mathbf{x}_{h,i}], \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$
где
$$[\mathbf{x}_{h,i}] = ([x_i], [x'_i], [x''_i]),$$
где $[x'_i]$, $[x''_i]$ — сеточные функции, совпадающие с точными значениями производных решения ДКЗ (75) в узлах сетки D_h. Очевидно,
$$[x''_i] + p_i[x'_i] + q_i[x_i] \equiv f_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{76}$$

Пусть в результате реализации эксперимента Э2 для РКЗ (12)–(15) получена группа пар $(\mathbf{x}_h^k,\ \delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k)$, $k \geqslant 2$, $h = \mathrm{const}$.

Определение 4. Группу векторов $\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k$ при произвольных $k \geqslant 2$ будем называть группой векторов псевдовозмущений в эксперименте Э2, если норма $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ каждого вектора, начиная с некоторого $k \geqslant k_0$ монотонно убывает при увеличении k, причем
$$\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\| \to 0 \ \text{ при } k \to \infty. \tag{77}$$

Пусть $\mathbf{x} = (x, x', x'')$ есть пока неизвестное точное сеточное решение РКЗ.

Определение 5. Группу РКЗ
$$L_h^k\mathbf{x} = f_h^k, \quad k \geqslant 2, \tag{78}$$
будем называть условно устойчивой (устойчивой условно) по k, если разностная задача
$$L_h^k\widehat{\mathbf{u}} = f_h^k + \delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k, \tag{79}$$
полученная из каждой задачи группы (78) добавлением к правой части вектора псевдовозмущений $\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k$, начиная с некоторого $k \geqslant k_0$ имеет одно и только одно возмущенное решение $\widehat{\mathbf{u}} = (\widehat{u}, \widehat{u}', \widehat{u}'')$, причем это решение отклоняется от решения $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_h^k$ невозмущенной задачи (78) на сеточную функцию $\widehat{\mathbf{u}} - \mathbf{x}$, удовлетворяющую оценке
$$\|\widehat{\mathbf{u}} - \mathbf{x}\| \leqslant C_k\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|, \tag{80}$$
где C_k — некоторое число, не зависящее от h, или, в соответствии с (60), в развернутой форме:
$$\begin{cases} \|\widehat{u} - x\| \leqslant C_k\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|, \\ \|\widehat{u}' - x'\| \leqslant C_k\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|, \\ \|\widehat{u}'' - x''\| \leqslant C_k\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|. \end{cases} \tag{81}$$

Каждую РКЗ группы (78) назовем условно устойчивой (устойчивой условно) РКЗ, а ее решение — условно устойчивым (устойчивым условно) решением.

Введение термина «условная устойчивость» обусловлено исследованием уже найденного решения $\mathbf{x}_h^k$, соответствующего конкретной правой части РКЗ (12)–(15), тогда как в определении 3 устойчивости РКЗ речь идет о произвольной правой части и, следовательно, о решении, которое еще не найдено.

Определение 6. Будем говорить, что каждое решение группы РКЗ (78) является условно сходящимся (сходящимся условно) по k к решению ДКЗ (75), если при $k \to \infty$

$$\|[\mathbf{x}] - \mathbf{x}\| \to 0,$$

или в развернутой форме:

$$\begin{cases} \|[x] - x\| \to 0, \\ \|[x'] - x'\| \to 0, \\ \|[x''] - x''\| \to 0. \end{cases} \tag{82}$$

Если сверх того выполнено неравенство

$$\|[\mathbf{x}] - \mathbf{x}\| \leqslant M_k h^k,$$

где M_k — некоторое число, не зависящее от h, то будем говорить, что имеет место условная сходимость по k порядка h^k или что РКЗ группы имеет k-тый порядок точности.

Каждое решение РКЗ группы (78) назовем условно сходящимся (сходящимся условно).

Разностные задачи (78), (79) для найденного решения $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_h^k$ и найденного вектора $\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k$, $k \geqslant 2$, дают

$$L_h^k \mathbf{z} = \delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k, \tag{83}$$

где

$$\mathbf{z} = \widehat{\mathbf{u}} - \mathbf{x}, \tag{84}$$

или в форме системы разностных уравнений:

$$\begin{cases} a_i z_{i-1} + b_i z_i + c_i z_{i+1} = \delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ z_0 = \delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,0}^k, \quad z_n = \delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,n}^k, \end{cases} \tag{85}$$

где коэффициенты a_i, b_i, c_i совпадают, очевидно, с аналогичными коэффициентами РКЗ (3).

Подстановка в (84) сеточной функции $\mathbf{z} = (z, z', z'')$, являющейся точным решением РКЗ (83), позволит вычислить возмущенное решение $\widehat{\mathbf{u}} = (\widehat{u}, \widehat{u}', \widehat{u}'')$ при уже найденном решении $\mathbf{x}_h^k$ задачи (78).

Аналогичным образом для эксперимента Э1 введем определения устойчивости условно по h ($k = \text{const}$) и сходимости условно по h ($k = \text{const}$).

Аналогично [1] будет доказана следующая

Теорема 1. *Пусть РКЗ (78) аппроксимирует ДКЗ (75) на решении* $[\mathbf{x}]$ *с порядком (20) и является условно устойчивой по* h *или по* k. *Тогда решение* $\mathbf{x}$ *задачи (78) сходится условно к* $[\mathbf{x}]$, *причем имеет место оценка*

$$\|[\mathbf{x}]-\mathbf{x}\| \leqslant C_k\|\delta f_h^k\| \leqslant \begin{cases} C_k C_1 h^k, & k \text{ — четное},\\ C_k C_2 h^{k-1}, & k \text{ — нечетное}, \end{cases} \tag{86}$$

где C_1, C_2, C_k *— числа, входящие в оценки (20), (80).*

Доказательство. Положим $\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k = \delta f_h^k$, $\widehat{\mathbf{u}} = [\mathbf{x}]$. Тогда неравенство (80) с учетом (20) примет вид

$$\|[\mathbf{x}]-\mathbf{x}\| \leqslant C_k\|\delta f_h^k\| \leqslant \begin{cases} C_k C_1 h^k, & k \text{ — четное},\\ C_k C_2 h^{k-1}, & k \text{ — нечетное}. \end{cases}$$

□

Теорема 2. *Пусть каждое решение группы РКЗ (78) сходится условно по* h *или по* k *к решению ДКЗ (75). Тогда каждое такое решение является условно устойчивым.*

Доказательство. Пусть

$$\|[\mathbf{x}]-\mathbf{x}\| \to 0 \ \text{ при } h\to 0 \ \text{ или при } k\to\infty. \tag{87}$$

На псевдоточном решении (43) в соответствии с (21) имеем

$$x_i'' + p_i\widehat{x}_i' + q_i x_i = f_i + \delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k, \quad i=0,1,\ldots,n. \tag{88}$$

Вычитая равенство (76) из (88), получим

$$(x_i''-[x_i'']) + p_i(\widehat{x}_i'-[x_i']) + q_i(x_i-[x_i]) = \delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k, \quad i=0,1,\ldots,n. \tag{89}$$

Подстановка первой оценки (36) в (89) дает

$$\begin{aligned} \delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k &= (x_i''-[x_i'']) + p_i(\widehat{x}_i'-[x_i']) + q_i(x_i-[x_i]) = \\ &= (x_i''-[x_i'']) + p_i(x_i'+R_i^{k-1}-[x_i']) + q_i(x_i-[x_i]) = \\ &= (x_i''-[x_i'']) + p_i x_i' + p_i R_i^{k-1} - p_i[x_i'] + q_i(x_i-[x_i]) \approx \\ &\approx (x_i''-[x_i'']) + p_i(x_i'-[x_i']) + q_i(x_i-[x_i]). \end{aligned} \tag{90}$$

Выполнение (87) приводит соотношения (90) к (77) или с учетом условной сходимости по h к

$$\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\| \to 0 \ \text{ при } h\to 0 \ \text{ или при } k\to\infty. \tag{91}$$

Условие (91) превращает оценку (80) в

$$\|\widehat{\mathbf{u}}-\mathbf{x}\| \to 0 \ \text{ при } h\to 0 \ \text{ или при } k\to\infty,$$

что равносильно наличию условной устойчивости. □

Из теорем 1 и 2 следует, что условная устойчивость является необходимым и достаточным условием условной сходимости.

Первое неравенство (81) с учетом (44) и первый компонент соотношения (86) в соответствии с (60) запишем как

$$\|\widehat{u}-x\| \leqslant C_k C h^k, \tag{92}$$

где C — число, входящее в оценку (44), и

$$\|[x]-x\| \leqslant \begin{cases} C_k C_1 h^k, & k \text{ — четное,} \\ C_k C_2 h^{k-1}, & k \text{ — нечетное.} \end{cases} \tag{93}$$

При наличии условной сходимости оценки (92), (93) приводят к эквивалентности (в смысле бесконечно малых величин [8]) норм $C_1\|\widehat{u}-x\|$, $C\|\,[x]-x\|$ при четном k, и норм $C_2\|\widehat{u}-x\|$, $Ch\|[x]-x\|$ при нечетном k, или

$$\|[x]-x\| \sim \begin{cases} \dfrac{C_1}{C}\|\widehat{u}-x\|, & k \text{ — четное,} \\ \dfrac{C_2}{Ch}\|\widehat{u}-x\|, & k \text{ — нечетное.} \end{cases} \tag{94}$$

Выражение (94) устанавливает некоторую связь, по крайней мере при четном k, между сходимостью (в традиционном понимании в соответствии с определением 1) и условной сходимостью, а само выражение (94) позволяет оценить меру различий с точностью до константы между сеточными функциями $[x]$ и x независимо от существования или отсутствия аналитического решения соответствующей ДКЗ в силу того, что норма в правой части выражения (94) есть не что иное, как максимум модулей значений решения РКЗ (85).

Аналогичные (94) оценки мер различий между первой и второй производными сеточных функций $[x]$ и x непосредственно следуют из (81) и (86).

Замечание 3. Наличие условной сходимости по k в соответствии с определением 6 предполагает выполнение одновременно трех условий (82). Нарушение хотя бы одного из упомянутых трех условий приводит к отсутствию условной сходимости, в силу чего отсутствие условной сходимости еще не гарантирует наличия значительных отличий между сеточными функциями $[x]$ и x, например в случае, когда первое условие (82) имеет место в ЧЭ, а хотя бы одно из двух оставшихся — нет.

Замечание 3 позволяет заключить, что определение условной сходимости по h является более «сильным» или более «требовательным» в сравнении со сходимостью в традиционном понимании (см. определение 1), где предполагается выполнение только одного условия (4).

Иллюстрация замечания 3 будет дана ниже.

7. Выбор норм для оценки погрешностей, формирование схемы исследования. При проведении каждого ЧЭ выполнялось следующее.

1. Для оценки абсолютной [1–3] и относительной [4], которую можно трактовать как некий аналог коэффициента вариации в статистике, характеризующий меру разброса в процентах [11] погрешностей, были использованы следующие нормы:

   а) между сеточными функциями $[x]$, x:

$$[E_h^k] = \max|[x_i]-x_i|, \quad i=0,1,\ldots,n, \tag{95}$$

$$[D_h^k] = \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^n ([x_i] - x_i)^2}}{\sum_{i=0}^n |[x_i]|} \cdot 100\,\%; \tag{96}$$

б) между сеточными функциями $\widehat{u}$, x:

$$\widehat{E}_h^k = \max|\widehat{u}_i - x_i| = \max|z_i|, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{97}$$

$$\widehat{D}_h^k = \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^n (\widehat{u}_i - x_i)^2}}{\sum_{i=0}^n |x_i|} \cdot 100\,\% = \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^n (z_i)^2}}{\sum_{i=0}^n |x_i|} \cdot 100\,\%; \tag{98}$$

в) между сеточными функциями $\widehat{u}$, $[x]$:

$$[\widehat{E}_h^k] = \max|\widehat{u}_i - [x_i]|, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{99}$$

$$[\widehat{D}_h^k] = \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^n (\widehat{u}_i - [x_i])^2}}{\sum_{i=0}^n |[x_i]|} \cdot 100\,\%. \tag{100}$$

2. Контролировались значения норм (95)–(100) для сеточных функций $[x]$, x, $\widehat{u}$ и их первой и второй производных.
3. Контролировалось выполнение критерия хорошей обусловленности (7) в каждом уравнении РКЗ.

При вычислении погрешностей между производными соответствующих функций в нормах (95)–(100) значения функций были заменены на значения своих производных.

Нормами (95), (96) и (99), (100) можно воспользоваться лишь при наличии сеточной функции $[x]$, что не предполагается в общем случае, следовательно, наибольший интерес представляют нормы (97), (98), не содержащие в себе значений $[x_i]$.

Перечислим некоторые результаты, полученные при исследовании краевых задач для ОДУ2 (64)–(73) при выполнении условия (74).

1. Отдельный ЧЭ:
   а) при достаточном удалении границы $\overline{a}(\overline{b})$ от $\widetilde{t}$ отдельные значения модулей псевдоневязок $|\delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k|$, $i = 0, 1, \ldots, n$, оказывались достаточно равномерно распределенными по величине относительно узлов сетки, но тем не менее наблюдалось некоторое преобладание значений модулей (по величине) в граничных узлах, особенно в границе $\overline{a}(\overline{b})$;
   б) по мере приближения критической границы $\overline{a}(\overline{b})$ к $\widetilde{t}$ в узлах некоторой ее окрестности начинали увеличиваться модули отдельных значений псевдоневязок, особенно значительно на самой границе $\overline{a}(\overline{b})$; вне упомянутой окрестности модули псевдоневязок претерпевали довольно умеренные изменения; в итоге значение нормы $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ определяло значение модуля псевдоневязки в преобладающем узле, а именно в границе $\overline{a}(\overline{b})$, что находит объяснение в (37) — в силу значительного роста входящих в ОДУ2 (64)–(73) функций $p(t)$ или $p(t)$ и $q(t)$ одновременно.
2. Эксперимент Э2:
   а) зависимость $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ оказывалась монотонно убывающей функцией k;

б) зависимости $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$, $|\delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k|$, $i = 0, 1, \ldots, n$, имели совпадающий характер монотонности, причем значения оценок $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$, $|\delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k|$ оказывались сравнимыми между собой по величине.

3. Эксперимент Э$2\widetilde{t}$:

а) зависимость $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ оказывалась либо монотонно убывающей функцией k, либо практически постоянной, либо имела локальный минимум, причем значения $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ во всех трех случаях достигали значительных величин (в несколько десятков порядков);

б) в случае $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\| \approx \mathrm{const}$ в некоторой окрестности $\overline{a}(\overline{b})$ при фиксированном номере i во внутренних узлах сетки значения $|\delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k|$, $i = 0, 1, \ldots, n$, также оказывались практически постоянными (постоянные значения оказывались зависимыми от i), но по мере удаления узла с номером i от границы $\overline{a}(\overline{b})$ преобладающим становился монотонный характер, причем отдельные значения модулей псевдоневязок $|\delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k|$ становились сравнимыми с результатами эксперимента Э2;

в) при наличии локального минимума в некоторой окрестности $\overline{a}(\overline{b})$ при фиксированном номере i во внутренних узлах сетки значения $|\delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k|$ также имели локальный минимум, причем по мере удаления узла с номером i от $\overline{a}(\overline{b})$ преобладающим становился монотонный характер.

Анализ перечисленных результатов после выполнения Э2 (или Э$2\widetilde{t}$) позволит сделать первоначальный вывод о том, насколько правомерно можно признать вектор $\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k$ в качестве вектора псевдовозмущений в соответствии с определением 4.

Действительно, после выполнения Э$2\widetilde{t}$ при ответе на вопрос о правомерности признания группы векторов $\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k$, $k = 2, 3, \ldots, 9$, в качестве группы векторов псевдовозмущений проблема кроется именно в довольно больших значениях норм псевдоневязок $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$, а не в наличии или отсутствии их монотонности в силу того, что наличие или отсутствие монотонности проблематично оценить при довольно больших значениях норм $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ и довольно ограниченных $k \in [2, 9]$. Причина в наличии довольно больших значений норм $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ выяснена выше.

После выполнения Э2 ситуация оказалась противоположной — нормы псевдоневязок $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ оказались довольно ограниченными и не превосходили величин в два порядка во всех исследованных РКЗ.

Исследуем теоретически полученную РКЗ (85). Напомним упомянутые ранее факты:

1) значение модуля псевдоневязки в одной из границ задачи определяет значение нормы псевдоневязки $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ всей задачи;
2) оба граничных условия задачи содержат в себе компоненты вектора псевдовозмущений $\delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,0}^k$ и $\delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,n}^k$, которые не используются при вычислении порядка нормы $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ согласно оценке (44).

Компоненты вектора псевдовозмущений $\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k$ в граничных узлах t_0, t_n сетки D_h могут трактоваться как начало накопления погрешностей в решении РКЗ (85) тем больше, чем больше сами значения правых частей в граничных условиях задачи. Анализ решения задачи (85) позволит выявить степень влияния псевдовозмущений в граничных условиях на накопление погрешностей в возмущенном решении $\widehat{u}$ и принять первоначальное суждение о наличии или отсутствии условной устойчивости — ситуацию назовем начальным этапом анализа рассматриваемой задачи установления условной устойчивости РКЗ.

Напомним, на начальном этапе анализа невозможно воспользоваться оценкой порядка нормы псевдоневязки в силу того, что ее вычисление согласно (44) не предполагает использования граничных узлов t_0, t_n сетки. Требуется следующий (назовем его «финальным») этап анализа.

Исключение из рассмотрения граничных узлов сетки на финальном этапе анализа вопроса о наличии условной устойчивости:

а) приведет к возможности вычисления оценки порядка согласно (44);

б) позволит избавиться от погрешностей в возмущенном решении $\widehat{u}$, накопления которых обусловлены граничными условиями РКЗ (85), что особенно актуально именно при выполнении Э2$\widetilde{t}$; для чего достаточно в задаче в качестве граничных условий положить

$$\delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,0}^{k} = z_0 = \widehat{u}_0 - x_0 = 0, \quad \delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,n}^{k} = z_n = \widehat{u}_n - x_n = 0. \tag{101}$$

Из граничных условий (101) следует, что исключение из исследования граничных узлов приведет к совпадению точного x и возмущенного $\widehat{u}$ решений в граничных узлах сетки D_h; указанный факт проблематично признать серьезным ограничением для возмущенного решения.

Заметим, в случае тривиальных значений одновременно всех псевдоневязок $\delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^{k} = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$, РКЗ (85) превращается в однородную задачу, откуда непосредственно следует условная устойчивость РКЗ.

Исследование результатов на начальном и финальном этапах позволит:

1) выявить наличие условной устойчивости задачи путем анализа норм $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_{h}^{k}\|$ и $\widehat{E}_h^k$, $\widehat{D}_h^k$ на этих этапах;

2) определить при наличии условной устойчивости некоторую условную границу $\bar{t}$ перехода от Э3 к Э3$\widetilde{t}$ как значение, при котором результаты расчетов на начальном и финальном этапах не имели бы существенных различий при фиксированных $n\,(h)$, k.

Ранее в способе построения псевдоточного решения (42) с целью повышения порядка нормы псевдоневязки на единицу предполагалось исключить влияние второй производной (как имеющей, что следует из (36), более низкий порядок в сравнении с первой производной) на значение нормы $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_{h}^{k}\|$, но удалось достичь цели лишь во внутренних узлах сетки D_h. Поэтому на начальном этапе анализа в соответствии с (43) оказалось учтенным влияние как первой, так и второй производной (за счет использования границ t_0, t_n сетки) на накопление погрешностей в возмущенном решении $\widehat{u}$, несмотря на достигнутую цель способа построения псевдоточного решения (42). Исключить влияние второй производной на накопление погрешностей удалось только на финальном этапе.

8. Численные эксперименты Э1, Э2, Э3. Исследования выполнены в соответствии с принятой выше схемой, состоящей из двух этапов.

Во всех исследованных РКЗ критерий хорошей обусловленности (7) оказался нарушенным.

Все РКЗ для ОДУ2 (64)–(72) при выполнении экспериментов Э1, Э2, Э3 оказались условно устойчивыми. Результаты расчетов на начальном и финальном этапах имели различия, которые нельзя признать существенными.

Однако во всех исследованных РКЗ для ОДУ2 (73) не удалось выделить область изменения аргумента t, соответствующую Э1, Э2, Э3, возможно, вследствие довольно узкой области $t \in (-1, 1)$, где условие (63) нарушено, в которой выполнялись исследования. Для ОДУ2 (73) оказалось возможным выполнение только экспериментов Э1$\widetilde{t}$, Э2$\widetilde{t}$, Э3$\widetilde{t}$.

Ниже, если не оговорено особо, в таблицах будут приведены оценки погрешностей решений РКЗ, а оценки погрешностей первой и второй производных решений будут опущены в силу их

а) несущественных различий по абсолютной величине от оценок погрешностей решений РКЗ;

б) практически аналогичной динамики изменения в сравнении с оценками погрешностей решений РКЗ.

Полученные на финальном этапе результаты экспериментов Э1, Э2 при исследовании РКЗ, аппроксимирующих ДКЗ

$$\begin{cases} x'' + \dfrac{4tx'}{t^2-1} + \dfrac{2x}{t^2-1} = \dfrac{6t}{t^2-1}, \quad t \in [1.5, 5.5], \\ x_0 = 8.300000, \quad x_n = 6.474359, \end{cases} \tag{102}$$

приведены в табл. 1, 2; результаты эксперимента Э3 при использовании ОДУ2 (72), входящего в ДКЗ (102), — в табл. 3.

9. Численные эксперименты Э1$\widetilde{t}$, Э2$\widetilde{t}$, Э3$\widetilde{t}$: ОДУ2 с ограниченными общими решениями. Исследования выполнены в соответствии с принятой выше схемой, состоящей из двух этапов.

Во всех исследованных РКЗ критерий хорошей обусловленности (7) оказался нарушенным.

Все РКЗ для ОДУ2 (64), (65), (67) при выполнении экспериментов Э1$\widetilde{t}$, Э2$\widetilde{t}$, Э3$\widetilde{t}$ оказались условно устойчивыми в области изменения своих аргументов.

В эксперименте Э2$\widetilde{t}$ при исследовании РКЗ, аппроксимирующих ДКЗ, в которой использовано ОДУ2 (64)

$$\begin{cases} x'' + x' \operatorname{tg} t + x\cos^2 t = 0, \quad t \in (-\pi/2, -\pi/2 + 4], \\ x_0 = -1.443808, \quad x_n = 3.411995, \end{cases} \tag{103}$$

число π было вычислено с точностью до четырнадцатого знака, что привело к наименьшему отклонению $\widetilde{t}$ от критической границы $\overline{a}(\overline{b})$ на величину порядка 10^{-14}. В РКЗ для ОДУ2 (65), (67) аналогичные наименьшие отклонения оставались неустановленными и определялись только возможностями компьютера.

В ДКЗ (103) интервал интегрирования $(a, b]$ выбран с нарушением условия (74).

В табл. 4, 5 приведены результаты исследования РКЗ, аппроксимирующих ДКЗ (103), на начальном и финальном этапах.

Отметим, в случае отсутствия сеточной функции $[x]$ действительно информативными в табл. 4, 5 окажутся только данные первой строки для $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ и третьей строки для $\widehat{D}_h^k$.

Таблица 1

Нормы псевдоневязок и относительные погрешности численных решений ДКЗ (102) при $k = 4$; эксперимент Э1, финальный этап [Norms of pseudoresiduals and relative errors of numerical solutions differential boundary value problem (102) for $k = 4$; experiment E1, final stage]

n	20	100	300	500	1 000	3 000	8 000	15 000
$\lVert\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\rVert$	$2.98 \cdot 10^{-1}$	$5.12 \cdot 10^{-3}$	$1.09 \cdot 10^{-4}$	$1.58 \cdot 10^{-5}$	$1.08 \cdot 10^{-6}$	$1.41 \cdot 10^{-8}$	$2.96 \cdot 10^{-10}$	$6.54 \cdot 10^{-11}$
$[D_h^k]$,%	$2.33 \cdot 10^{-3}$	$2.19 \cdot 10^{-6}$	$1.61 \cdot 10^{-8}$	$1.62 \cdot 10^{-9}$	$7.21 \cdot 10^{-11}$	$1.58 \cdot 10^{-11}$	$2.16 \cdot 10^{-11}$	$1.75 \cdot 10^{-11}$
$\widehat{D}_h^k$,%	$2.14 \cdot 10^{-2}$	$4.03 \cdot 10^{-5}$	$3.45 \cdot 10^{-7}$	$3.59 \cdot 10^{-8}$	$1.63 \cdot 10^{-9}$	$1.19 \cdot 10^{-11}$	$1.57 \cdot 10^{-13}$	$1.85 \cdot 10^{-14}$
$[\widehat{D}_h^k]$,%	$2.34 \cdot 10^{-2}$	$4.24 \cdot 10^{-5}$	$3.61 \cdot 10^{-7}$	$3.76 \cdot 10^{-8}$	$1.71 \cdot 10^{-9}$	$1.13 \cdot 10^{-11}$	$2.17 \cdot 10^{-11}$	$1.75 \cdot 10^{-11}$

Таблица 2

Нормы псевдоневязок и относительные погрешности численных решений ДКЗ (102) при $n = 100$; эксперимент Э2, финальный этап [Norms of pseudoresiduals and relative errors of numerical solutions differential boundary value problem (102) for $n = 100$; experiment E2, final stage]

k	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lVert\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\rVert$	$6.59 \cdot 10^{-1}$	$2.25 \cdot 10^{-2}$	$5.12 \cdot 10^{-3}$	$2.21 \cdot 10^{-4}$	$3.37 \cdot 10^{-5}$	$1.57 \cdot 10^{-6}$	$2.04 \cdot 10^{-7}$	$9.75 \cdot 10^{-9}$
$[D_h^k]$,%	$1.12 \cdot 10^{-3}$	$3.39 \cdot 10^{-3}$	$2.19 \cdot 10^{-6}$	$8.01 \cdot 10^{-6}$	$6.48 \cdot 10^{-9}$	$2.57 \cdot 10^{-8}$	$2.37 \cdot 10^{-11}$	$9.67 \cdot 10^{-11}$
$\widehat{D}_h^k$,%	$1.22 \cdot 10^{-2}$	$2.79 \cdot 10^{-4}$	$4.03 \cdot 10^{-5}$	$1.37 \cdot 10^{-6}$	$1.55 \cdot 10^{-7}$	$6.16 \cdot 10^{-9}$	$6.45 \cdot 10^{-10}$	$2.77 \cdot 10^{-11}$
$[\widehat{D}_h^k]$,%	$1.33 \cdot 10^{-2}$	$3.03 \cdot 10^{-3}$	$4.24 \cdot 10^{-5}$	$6.37 \cdot 10^{-6}$	$1.61 \cdot 10^{-7}$	$1.85 \cdot 10^{-8}$	$6.68 \cdot 10^{-10}$	$6.48 \cdot 10^{-11}$

На начальном этапе предварительный вывод о наличии условной устойчивости проблематично сделать на основании данных первой и третьей строк табл. 4, которые

а) не позволяют сделать вывод о наличии монотонности норм $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ в силу их довольно больших значений; при условии, что наличие монотонности норм является необходимым условием в соответствии с определением 4;

б) свидетельствуют о существенном влиянии псевдовозмущения в левой границе РКЗ (85) на накопление погрешностей в возмущенном решении $\widehat{u}$ и, следовательно, на накопление погрешностей в решении РКЗ, что делает неправомерными данные третьей строки таблицы на начальном этапе.

Исключение на финальном этапе значений псевдовозмущений в граничных узлах РКЗ (85) при исследовании ДКЗ (103) привело к приемлемым (в сравнении с начальным этапом) результатам, что нашло подтверждение в первой и третьей строках и косвенное подтверждение во второй и четвертой строках табл. 5.

Анализ расчетов решения задачи (103) на финальном этапе показал, что оценка нормы $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ была определена значением модуля псевдоневязки не в узле t_1, расстояние от которого до левой границы $t_0 \approx -\pi/2$ равно $h = 0.2$, а в узле t_{16}, расстояние от которого до точки $\pi/2 \in (-\pi/2, -\pi/2+4]$ оказалось равным $5.84 \cdot 10^{-2}$. Использование интервала интегрирования $(-\pi/2, -\pi/2+2.5]$, которому не принадлежит значение $t = \pi/2$, что соответствует выполнению условия (74), в задаче

$$\begin{cases} x'' + x' \operatorname{tg} t + x\cos^2 t = 0, \quad t \in (-\pi/2, -\pi/2+2.5], \\ x_0 = -1.443808, \quad x_n = 3.546230 \end{cases} \tag{104}$$

привело к указанным в табл. 6 результатам.

Результаты начального этапа исследования РКЗ, аппроксимирующих ДКЗ

$$\begin{cases} x'' + x' \operatorname{tg} t + x\cos^2 t = 0, \; t \in [-\pi/2 + 5\cdot 10^{-3}, -\pi/2 + 5\cdot 10^{-3} + 2.5], \\ x_0 = -1.443807, \quad x_n = 3.411113, \end{cases} \tag{105}$$

приведены в табл. 7, данные которой не имеют существенных отличий от данных табл. 6; поэтому значение $\overline{t} = -\pi/2 + 5\cdot 10^{-3}$ можно принять в качестве условной границы между Э3 и Э3$\widetilde{t}$ при $n = 20$ $(h = 0.2)$, $k \in [2, 9]$.

Результаты исследований всех РКЗ для ОДУ2 (65), (67) не имели существенных отличий от рассмотренных выше РКЗ для ОДУ2 (64).

Не все РКЗ для ОДУ2 (66), (68) при выполнении экспериментов Э1$\widetilde{t}$, Э2$\widetilde{t}$, Э3$\widetilde{t}$ оказались условно устойчивыми в области изменения своих аргументов: были обнаружены области, в которых условная устойчивость не имела места.

При исследовании РКЗ для ОДУ2 (66) при выявлении возможности признать вектор $\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k$ в качестве вектора псевдовозмущений при $n = 20$ $(h = 0.2)$, $k \in [2, 9]$ была выявлена точка $T \in (\widetilde{t}, \overline{t}]$, $T = 0.01$, порождающая две области: $(\widetilde{t}, T]$ и $(T, \overline{t}]$, в первой из которых РКЗ не являлись условно устойчивыми, во второй — являлись.

Подробнее опишем ситуацию в области $(\widetilde{t}, T]$.

Таблица 3

Нормы псевдоневязок и относительные погрешности решений РКЗ для ОДУ2 (72) при $n = 100$, $k = 4$; эксперимент Э3, финальный этап [Norms of pseudoresiduals and relative errors of numerical solutions differential boundary value problem for ODE2 (72) for $n = 100$, $k = 4$; experiment E3, final stage]

$[a, b]$	[1.8, 5.8]	[1.7, 5.7]	[1.6, 5.6]	[1.5, 5.5]	[1.4, 5.4]	[1.3, 5.3]	[1.2, 5.2]	[1.1, 5.1]
$\lVert\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\rVert$	$2.72\cdot10^{-4}$	$6.33\cdot10^{-4}$	$1.66\cdot10^{-3}$	$5.12\cdot10^{-3}$	$1.98\cdot10^{-2}$	$1.07\cdot10^{-1}$	1.04	33.0
$[D_h^k]$,%	$3.20\cdot10^{-7}$	$5.59\cdot10^{-7}$	$1.05\cdot10^{-6}$	$2.19\cdot10^{-6}$	$5.28\cdot10^{-6}$	$1.59\cdot10^{-5}$	$7.19\cdot10^{-5}$	$8.13\cdot10^{-4}$
$\widehat{D}_h^k$,%	$5.05\cdot10^{-6}$	$9.19\cdot10^{-6}$	$1.82\cdot10^{-5}$	$4.03\cdot10^{-5}$	$1,05\cdot10^{-4}$	$3.49\cdot10^{-4}$	$1.79\cdot10^{-3}$	$2.40\cdot10^{-2}$
$[\widehat{D}_h^k]$,%	$5.36\cdot10^{-6}$	$9.74\cdot10^{-6}$	$1.92\cdot10^{-5}$	$4.24\cdot10^{-5}$	$1.10\cdot10^{-4}$	$3.64\cdot10^{-4}$	$1.86\cdot10^{-3}$	$2.47\cdot10^{-2}$

Таблица 4

Нормы псевдоневязок и относительные погрешности численных решений ДКЗ (103) при $n = 20$; эксперимент Э2$\widetilde{t}$, начальный этап [Norms of pseudoresiduals and relative errors of numerical solutions differential boundary value problem (103) for $n = 20$; experiment E2$\widetilde{t}$, initial stage]

k	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lVert\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\rVert$	$3.53\cdot10^{13}$	$4.35\cdot10^{12}$	$1.13\cdot10^{13}$	$2.57\cdot10^{12}$	$1.56\cdot10^{11}$	$2.58\cdot10^{10}$	$1.68\cdot10^{8}$	$6.18\cdot10^{7}$
$[D_h^k]$,%	$3.91\cdot10^{-1}$	$3.36\cdot10^{-1}$	$5.20\cdot10^{-3}$	$2.20\cdot10^{-3}$	$1.20\cdot10^{-5}$	$4.83\cdot10^{-6}$	$5.59\cdot10^{-7}$	$1.31\cdot10^{-7}$
$\widehat{D}_h^k$,%	$1.92\cdot10^{14}$	$2.36\cdot10^{13}$	$6.13\cdot10^{13}$	$1.39\cdot10^{13}$	$8.48\cdot10^{11}$	$1.40\cdot10^{11}$	$9.13\cdot10^{8}$	$3.35\cdot10^{8}$
$[\widehat{D}_h^k]$,%	$1.92\cdot10^{14}$	$2.36\cdot10^{13}$	$6.13\cdot10^{13}$	$1.39\cdot10^{13}$	$8.48\cdot10^{11}$	$1.40\cdot10^{11}$	$9.13\cdot10^{8}$	$3.35\cdot10^{8}$

Таблица 5

Нормы псевдоневязок и относительные погрешности численных решений ДКЗ (103) при $n = 20$; эксперимент Э$2\widetilde{t}$, финальный этап [Norms of pseudoresiduals and relative errors of numerical solutions differential boundary value problem (103) for $n = 20$; experiment E$2\widetilde{t}$, final stage]

k	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lVert\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\rVert$	$4.42\cdot10^{-1}$	$4.17\cdot10^{-1}$	$8.49\cdot10^{-3}$	$3.62\cdot10^{-3}$	$9.47\cdot10^{-5}$	$5.87\cdot10^{-6}$	$1.57\cdot10^{-6}$	$2.84\cdot10^{-7}$
$[D_h^k]$,%	$3.91\cdot10^{-1}$	$3.36\cdot10^{-1}$	$5.20\cdot10^{-3}$	$2.20\cdot10^{-3}$	$1.20\cdot10^{-5}$	$4.83\cdot10^{-6}$	$5.58\cdot10^{-7}$	$1.31\cdot10^{-7}$
$\widehat{D}_h^k$,%	$4.79\cdot10^{-1}$	1.91	$9.37\cdot10^{-2}$	$6.49\cdot10^{-2}$	$7.33\cdot10^{-4}$	$3.22\cdot10^{-4}$	$1.52\cdot10^{-4}$	$7.03\cdot10^{-5}$
$[\widehat{D}_h^k]$,%	$8.39\cdot10^{-1}$	2.22	$9.87\cdot10^{-2}$	$6.69\cdot10^{-2}$	$7.43\cdot10^{-4}$	$3.26\cdot10^{-4}$	$1.53\cdot10^{-4}$	$7.05\cdot10^{-5}$

Таблица 6

Нормы псевдоневязок и относительные погрешности численных решений ДКЗ (104) при $n = 20$; эксперимент Э$2\widetilde{t}$, финальный этап [Norms of pseudoresiduals and relative errors of numerical solutions differential boundary value problem (104) for $n = 20$; experiment E$2\widetilde{t}$, final stage]

k	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lVert\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\rVert$	$3.14\cdot10^{-2}$	$2.70\cdot10^{-3}$	$1.09\cdot10^{-3}$	$7.85\cdot10^{-5}$	$5.89\cdot10^{-6}$	$3.80\cdot10^{-7}$	$9.15\cdot10^{-9}$	$6.47\cdot10^{-10}$
$[D_h^k]$,%	$5.11\cdot10^{-2}$	$2.90\cdot10^{-2}$	$1.30\cdot10^{-4}$	$8.66\cdot10^{-5}$	$5.25\cdot10^{-7}$	$2.19\cdot10^{-7}$	$1.04\cdot10^{-9}$	$4.74\cdot10^{-10}$
$\widehat{D}_h^k$,%	$8.86\cdot10^{-2}$	$3.19\cdot10^{-3}$	$2.35\cdot10^{-4}$	$1.51\cdot10^{-5}$	$2.32\cdot10^{-6}$	$4.92\cdot10^{-8}$	$6.46\cdot10^{-9}$	$1.33\cdot10^{-10}$
$[\widehat{D}_h^k]$,%	$1.33\cdot10^{-1}$	$2.66\cdot10^{-2}$	$3.44\cdot10^{-4}$	$8.73\cdot10^{-5}$	$2.77\cdot10^{-6}$	$2.41\cdot10^{-7}$	$7.30\cdot10^{-9}$	$5.25\cdot10^{-10}$

Таблица 7

Нормы псевдоневязок и относительные погрешности численных решений ДКЗ (105) при $n = 20$; эксперимент Э$2\widetilde{t}$, начальный этап [Norms of pseudoresiduals and relative errors of numerical solutions differential boundary value problem (105) for $n = 20$; experiment E$2\widetilde{t}$, initial stage]

k	2	3	4	5	6	7	8	9
$\Vert\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\Vert$	$7.96 \cdot 10^{-1}$	$4.23 \cdot 10^{-1}$	$1.56 \cdot 10^{-1}$	$3.51 \cdot 10^{-2}$	$2.26 \cdot 10^{-3}$	$3.71 \cdot 10^{-4}$	$2.79 \cdot 10^{-6}$	$1.08 \cdot 10^{-6}$
$[D_h^k]$,%	$4.14 \cdot 10^{-1}$	$3.65 \cdot 10^{-1}$	$5.51 \cdot 10^{-3}$	$2.38 \cdot 10^{-3}$	$1.31 \cdot 10^{-5}$	$5.06 \cdot 10^{-6}$	$6.04 \cdot 10^{-7}$	$1.43 \cdot 10^{-7}$
$\widehat{D}_h^k$,%	7.01	2.27	$9.94 \cdot 10^{-1}$	$2.05 \cdot 10^{-1}$	$1.33 \cdot 10^{-2}$	$2.17 \cdot 10^{-3}$	$8.88 \cdot 10^{-5}$	$5.42 \cdot 10^{-5}$
$[\widehat{D}_h^k]$,%	7.41	2.64	$9.97 \cdot 10^{-1}$	$2.06 \cdot 10^{-1}$	$1.33 \cdot 10^{-2}$	$2.17 \cdot 10^{-3}$	$8.94 \cdot 10^{-4}$	$5.43 \cdot 10^{-5}$

Таблица 8

Погрешности решений РКЗ для ОДУ2 (66) при $n = 20$, $k \in [2, 9]$ в области изменения границы $a \in [10^{-45}, 0.01]$; эксперимент Э$3\widetilde{t}$, финальный этап [Errors in the solutions of the difference boundary value problem for ODE2 (66) for $n = 20$, $k \in [2, 9]$ in the region of boundary variation $a \in [10^{-45}, 0.01]$; experiment E$3\widetilde{t}$, final stage]

quotient of derivative, m	0	1	2
$[E_h^k]_{x^{(m)}}$	8.82	10.3	9.26
$[D_h^k]_{x^{(m)}}$,%	3.81	3.77	8.32

На начальном этапе значения норм псевдоневязок $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ в эксперименте

а) Э2$\widetilde{t}$ практически не изменяясь, оставались довольно значительными по абсолютной величине;

б) Э3$\widetilde{t}$ увеличивались.

На финальном этапе значения норм псевдоневязок $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ в эксперименте

а) Э2$\widetilde{t}$ практически не изменяясь, оставались довольно малыми по абсолютной величине;

б) Э3$\widetilde{t}$ уменьшались.

Довольно значительные по абсолютной величине нормы $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ на начальном этапе и нарушение условия монотонности норм $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ на двух этапах не позволили признать возможным использование вектора $\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k$ в качестве вектора псевдовозмущений в области $(\widetilde{t}, T]$.

Результаты исследования РКЗ для ОДУ2 (66) приведены в табл. 8, где перечислены значения погрешностей решений $[E_h^k]_x$, $[D_h^k]_x$ и погрешности первой и второй производных решения $[E_h^k]_{x'}$, $[E_h^k]_{x''}$, $[D_h^k]_{x'}$, $[D_h^k]_{x''}$ при $n = 20$, $k \in [2, 9]$ и $a \in (\widetilde{t}, T] \approx [10^{-45}, 0.01]$, где a — левая граница сетки D_h.

Несмотря на то, что T, $\bar{t}$, определяемые только по результатам экспериментов Э2$\widetilde{t}$, Э3$\widetilde{t}$, являются довольно условными границами, отметим, что их значения оказывались зависимыми от значения $n\,(h)$ — при увеличении n точки T, $\bar{t}$ имели тенденцию к смещению влево.

Ситуация с ОДУ2 (68) в области $t < 0$, в которой условие (63) нарушено, оказалась практически аналогичной в сравнении с изложенной для ОДУ2 (66).

10. Численные эксперименты Э1$\widetilde{t}$, Э2$\widetilde{t}$, Э3$\widetilde{t}$: ОДУ2 с неограниченными общими решениями. Исследования выполнены в соответствии с принятой выше схемой, состоящей из двух этапов.

Во всех исследованных РКЗ критерий хорошей обусловленности (7) оказался нарушенным.

Все РКЗ для ОДУ2 (69)–(73) при выполнении экспериментов Э1$\widetilde{t}$, Э2$\widetilde{t}$, Э3$\widetilde{t}$ обнаружили наличие областей $(\widetilde{t}, T]$ и $(T, \bar{t}]$.

В области $(T, \bar{t}]$ результаты исследования всех РКЗ для перечисленных ОДУ2 с неограниченными общими решениями не имели существенных отличий от результатов исследования рассмотренных выше РКЗ для ОДУ2 с ограниченными общими решениями.

В области $(\widetilde{t}, T]$ все РКЗ для перечисленных ОДУ2 с неограниченными общими решениями

а) на начальном этапе имели практически схожие свойства с рассмотренными выше на начальном этапе РКЗ для ОДУ2 (66), (68) с ограниченными общими решениями;

б) на финальном этапе поведение норм $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ практически полностью совпало с поведением норм на начальном этапе с тем лишь отличием, что значения $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ на финальном этапе оказывались всегда на несколько порядков ниже соответствующих порядков норм на начальном этапе.

Довольно значительные по абсолютной величине значения норм $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ и нарушение условия монотонности норм $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ на двух этапах не позволили признать возможным использование вектора $\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k$ в качестве вектора псевдовозмущений в области $(\widetilde{t}, T]$.

Проиллюстрируем сформулированное выше замечание 3.

Результаты выполнения эксперимента Э2$\widetilde{t}$ при исследовании РКЗ, аппроксимирующих ДКЗ, в которой использовано ОДУ2 (69)

$$\begin{cases} x'' + 2x't^{-1} + x = t^{-1}, \quad t \in [0.01, 4.01], \\ x_0 = 302.989950, \quad x_n = -0.643887, \end{cases} \tag{106}$$

приведены в табл. 9, где указаны оценки норм (95) и (97), согласованные с нормами $\|[x] - x\|$ и $\|\widehat{u} - x\|$ соответственно.

Проанализируем данные табл. 9.

1. Данные первой строки таблицы свидетельствуют об отсутствии условной устойчивости по k группы РКЗ, аппроксимирующих ДКЗ (106).
2. Данные второй строки таблицы при четных k не позволяют усомниться в выполнении первого соотношения (82), тогда как при нечетных k данные второй строки свидетельствуют о невыполнении упомянутого соотношения.
3. Данные трех последних строк таблицы согласовываются с данными первой строки и решением $\mathbf{z} = (z, z', z'')$ РКЗ (83) — значительные величины псевдоневязок $\delta\widehat{\mathbf{x}}^k_{h,i}$, пусть даже не для всех $i = 1, 2, \ldots, n-1$, в правых частях (85) привели к существенным различиям между возмущенным $\widehat{\mathbf{u}}$ и точным $\mathbf{x}$ решениями РКЗ, что и привело к оценкам норм, указанным в трех последних строках таблицы.

Условная сходимость по k разностной задачи, аппроксимирующей ДКЗ (106), имела место начиная примерно со значения $n = 4000$ ($h = 0.001$); условная сходимость по h имела место при любом $k \in [2, 9]$.

Заметим, что не следует ожидать условной сходимости по k разностных задач, аппроксимирующих ДКЗ (106), при $n = 20$ ($h = 0.2$) и при увеличении $k = 2m$ ($k > 9$), m — натуральное число.

Действительно, при увеличении k оценки x_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, могут претерпеть либо незначительные, либо значительные изменения.

Изменения x_i в первом случае приведут к незначительным отличиям

а) оценок $[E^k_{0.2}]_x$ от $[E^8_{0.2}]_x = 2.96 \cdot 10^{-12}$ (табл. 9) в силу (95);

б) оценок $[E^k_{0.2}]_{x'}$, $[E^k_{0.2}]_{x''}$ от $[E^8_{0.2}]_{x'} = 1.43 \cdot 10^2$, $[E^8_{0.2}]_{x''} = 1.36 \cdot 10^3$ (табл. 9) в силу (12), (13), (95).

В этом случае не следует ожидать существенных отличий значений норм $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}^k_h\|$ от приведенных в таблице при $k < 9$, откуда следует истинность замечания в силу определения 4.

Истинность замечания во втором случае очевидна.

Указанная особенность наличия или отсутствия условной сходимости не наблюдалась в остальных задачах, рассмотренных выше.

11. Замечания об одном некорректном алгоритме вычисления обратной матрицы. Известно, что определитель матрицы равен нулю, если он содержит строку (столбец) нулевых элементов, или две одинаковые строки (столбца), или две пропорциональные строки (столбца), или одна из строк (один из столбцов) есть линейная комбинация его других строк (столбцов) [12].

Обратимся к локальной матрице A^{ki} (10) и перечислим очевидные замечания для нее.

Таблица 9

Нормы псевдоневязок и абсолютные погрешности численных решений ДКЗ (106) при $n = 20$; эксперимент Э2$\widetilde{t}$, финальный этап [Norms of pseudoresiduals and absolute errors of numerical solutions of differential boundary value problem (106) for $n = 20$; experiment E2$\widetilde{t}$, final stage]

k	2	3	4	5	6	7	8	9
$\Vert\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\Vert$	$6.53\cdot10^{3}$	$1.51\cdot10^{3}$	$3.10\cdot10^{3}$	$1.53\cdot10^{3}$	$1.94\cdot10^{3}$	$1.27\cdot10^{3}$	$1.37\cdot10^{3}$	$1.02\cdot10^{3}$
$[E_h^k]_x$	$6.94\cdot10^{-3}$	$1.00\cdot10^{2}$	$9.33\cdot10^{-6}$	63.3	$6.67\cdot10^{-9}$	45.6	$2.96\cdot10^{-12}$	35.0
$[E_h^k]_{x'}$	$6.64\cdot10^{2}$	$2.63\cdot10^{2}$	$3.17\cdot10^{2}$	$1.81\cdot10^{2}$	$2.01\cdot10^{2}$	$1.33\cdot10^{2}$	$1.43\cdot10^{2}$	$1.03\cdot10^{2}$
$[E_h^k]_{x''}$	$6.32\cdot10^{3}$	$2.40\cdot10^{3}$	$3.02\cdot10^{3}$	$1.66\cdot10^{3}$	$1.91\cdot10^{3}$	$1.22\cdot10^{3}$	$1.36\cdot10^{3}$	$9.44\cdot10^{2}$
$\widehat{E}_h^k\vert_x$	$2.14\cdot10^{2}$	31.9	$1.00\cdot10^{2}$	36.9	62.6	33.0	44.3	27.9
$\widehat{E}_h^k\vert_{x'}$	$4.55\cdot10^{2}$	69.8	$1.75\cdot10^{2}$	81.8	$1.08\cdot10^{2}$	72.8	81.0	60.9
$\widehat{E}_h^k\vert_{x''}$	$4.66\cdot10^{3}$	$8.57\cdot10^{2}$	$1.66\cdot10^{3}$	$7.62\cdot10^{2}$	$9.25\cdot10^{2}$	$5.84\cdot10^{2}$	$6.12\cdot10^{2}$	$4.46\cdot10^{2}$

1. Ни одна из строк (столбцов) не состоит из нулевых элементов хотя бы в силу наличия ненулевых элементов на главной диагонали матрицы.
2. Две одинаковые строки (столбца) отсутствуют.
3. Пропорциональность первых двух строк невозможна в силу противоположности знаков элементов в столбцах с четными номерами и равенства модулей соответствующих элементов этих строк.
4. Первая и вторая строки не могут быть пропорциональны оставшимся строкам, кроме последней, в силу наличия различного количества ненулевых элементов на этих строках.
5. Пропорциональность второй и последней строк, имеющих одинаковое количество элементов, приведет к соотношениям

$$q_i^{(k-2)} = \frac{p_i^{(k-2)} + (k-2)q_i^{(k-3)}}{h} = \cdots = \frac{k!}{h^k},$$

   выполнение которых точно одновременно во всех узлах сетки при любом h практически невозможно. Ситуация с первой и последней строками аналогична.
6. Пропорциональность первого и второго, второго и третьего столбцов невозможна в силу противоположности знаков и равенства модулей соответствующих элементов этих столбцов в первых двух строках.
7. Первый, второй и третий столбцы не могут быть пропорциональны оставшимся столбцам в силу наличия различного количества ненулевых элементов на этих столбцах.
8. Пропорциональность первого и третьего столбцов, имеющих одинаковое количество элементов, приведет к соотношениям

$$q_i = \frac{q_i'}{p_i} = \frac{q_i''}{2p_i' + q_i} = \cdots = \frac{2!}{h^2},$$

   выполнение которых точно одновременно во всех узлах сетки при любом h практически невозможно.
   9. Приведенные замечания не оставляют возможности допустить наличие представления строки (столбца) в форме линейной комбинации оставшихся строк (столбцов).

Перечисленные замечания позволяют сделать вывод об обратимости локальной матрицы (10).

Далее метод Гаусса вычисления обратной матрицы [3], не требующий вычисления определителя матрицы, будем называть корректным алгоритмом.

Алгоритм вычисления обратной матрицы средствами `MS EXCEL`, который реализован функцией `MINVERSE()`, предполагает использование значения определителя матрицы. Выяснить особенности используемых в `MS EXCEL` алгоритмов вычисления определителя матрицы и обратной матрицы не представилось возможным. Однако следует заметить, что эти алгоритмы нельзя признать корректными; для подтверждения замечания достаточно запрограммировать вычисления обратной матрицы (с использованием функции `MINVERSE()`) от локальной матрицы A^{ki}, определителя матрицы (с использованием реализованной в `MS EXCEL` функции `MDETERM()`) и обратиться к конкретной ДКЗ.

Положим в РКЗ, аппроксимирующих ДКЗ (103), $n = 175$.

В узле t_1 при $k = 7$ функция MDETERM( ) вернула результат $\det A^{7,1} = 0.028571111 \neq 0$, а при $k = 8$ вернула $\det A^{8,1} = 0$. Однако разложение определителя матрицы $A^{8,1}$ по последнему столбцу [12] приводит к обратному: $\det A^{8,1} \neq 0$. Далее при $k = 8$ функция MINVERSE( ) вернула не обратную матрицу, а сообщение об ошибке.

Заметим, что если положить равными нулю два верхних элемента последнего столбца матрицы $A^{8,1}$, модули которых равны $4.30225 \cdot 10^{-20}$, все равно функция MDETERM( ) вернет результат $\det A^{8,1} = 0$. Однако при таком допущении, очевидно, из разложения по последнему столбцу матрицы $A^{8,1}$ следует неверное соотношение $0 = \det A^{8,1} = (-1)^{9+9} \cdot 1 \cdot \det A^{7,1} = \det A^{7,1} = 0.028571111$. В этом случае также очевидно, что значения элементов последней строки матрицы $A^{8,1}$, кроме последнего элемента, не могут влиять на значение определителя $\det A^{8,1}$ и могут быть произвольными. Однако изменение на ту или иную величину первого из них и оставшихся с четными номерами столбцов приводило к $\det A^{8,1} \neq 0$. Следовательно, функция MDETERM( ) не всегда возвращает верное значение определителя матрицы, а функция MINVERSE( ) не всегда возвращает верную обратную матрицу.

Далее метод вычисления обратной матрицы средствами MS EXCEL будем называть некорректным алгоритмом. Очевидно, что в случае обратимости любой матрицы A нарушение известного равенства [12]

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1 \tag{107}$$

может быть вызвано как некорректностью алгоритмов методов вычисления, так и наличием вычислительных погрешностей компьютера при нахождении A^{-1}, $\det A^{-1}$, $\det A$.

Перечислим абсолютные погрешности между левой и правой частями соотношения (107):

$$\Delta^{k1} = |1 - \det A^{k1} \cdot \det(A^{k1})^{-1}|,$$

полученные при использовании различных методов:

а) при использовании метода LU-разложения для вычисления определителя [3], реализация которого не предполагает вычисления алгебраических дополнений элементов матрицы, и метода Гаусса для вычисления обратной матрицы (корректный алгоритм) [3] были получены значения $\Delta^{k1} = 0$, $k = 2, 3, \ldots, 9$;

б) при использовании функций (некорректные алгоритмы) MDETERM( ), MINVERSE( ) был получен следующий набор значений:

$$\Delta^{k1} = \{0, 0, 1.15 \cdot 10^{-9}, 6.79 \cdot 10^{-9}, 3.67 \cdot 10^{-5}, 8.86 \cdot 10^{-6}\}$$

при $k = 2, 3, \ldots, 7$ соответственно; значения $\Delta^{8,1}$, $\Delta^{9,1}$ указанными функциями возвращены не были.

Отметим, при нахождении численного решения ДКЗ (103) при $n = 150$ корректный и некорректный алгоритмы вернули практически совпадающие обратные матрицы от локальных матриц только при $k = 2, 3$, что приводит лишь к частичному совпадению приведенных ниже результатов расчетов (см. соответствующие $k = 2, 3$ столбцы в табл. 10, 11).

Таблица 10

Погрешности численных решений ДКЗ (104) и нормы псевдоневязок на псевдоточном (42) и точном (22) решениях; $n = 150$; некорректный алгоритм вычисления обратной матрицы; эксперимент Э$2\widetilde{t}$, финальный этап [Errors in numerical solutions of differential boundary value problem (104) and norms of pseudoresiduals on pseudoexact (42) and exact (22) solutions; $n = 150$; incorrect algorithm for calculating the inverse matrix; experiment E$2\widetilde{t}$, final stage]

k	2	3	4	5	6	7	8	9
$[D_h^k]$,%	$1.47 \cdot 10^{-3}$	$1.06 \cdot 10^{-3}$	$1.34 \cdot 10^{-4}$	$9.45 \cdot 10^{-5}$	5.14	$6.37 \cdot 10^{-1}$	9.72	9.75
$[E_h^k]$,%	$7.94 \cdot 10^{-4}$	$5.55 \cdot 10^{-4}$	$5.31 \cdot 10^{-5}$	$3.84 \cdot 10^{-5}$	2.09	$2.74 \cdot 10^{-1}$	3.95	3.96
$\lVert\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\rVert$	$1.18 \cdot 10^{-2}$	$8.85 \cdot 10^{-3}$	$2.75 \cdot 10^{-4}$	$2.06 \cdot 10^{-4}$	11.2	1.50	$1.14 \cdot 10^{4}$	$2.32 \cdot 10^{3}$
$\lVert\delta\mathbf{x}_h^k\rVert$	$1.34 \cdot 10^{-14}$	$1.39 \cdot 10^{-14}$	$1.56 \cdot 10^{-14}$	$5.16 \cdot 10^{-14}$	$1.31 \cdot 10^{-11}$	$4.22 \cdot 10^{-11}$	$2.48 \cdot 10^{-8}$	$5.41 \cdot 10^{-8}$
$\lVert\Delta_h^k\rVert$	$4.44 \cdot 10^{-16}$	$7.77 \cdot 10^{-16}$	$1.68 \cdot 10^{-8}$	$9.56 \cdot 10^{-9}$	$7.71 \cdot 10^{-3}$	$9.35 \cdot 10^{-4}$	$1.23 \cdot 10^{10}$	$1.24 \cdot 10^{7}$

Таблица 11

Погрешности численных решений ДКЗ (104) и нормы псевдоневязок на псевдоточном (42) и точном (22) решениях, $n = 150$, корректный алгоритм вычисления обратной матрицы; эксперимент Э$2\widetilde{t}$, финальный этап [Errors in numerical solutions of differential boundary value problem (104) and norms of pseudoresiduals on pseudoexact (42) and exact (22) solutions; $n = 150$; correct algorithm for calculating the inverse matrix; experiment E$2\widetilde{t}$, final stage]

k	2	3	4	5	6	7	8	9
$[D_h^k]$,%	$1.47 \cdot 10^{-3}$	$1.06 \cdot 10^{-3}$	$3.32 \cdot 10^{-7}$	$1.22 \cdot 10^{-7}$	$2.72 \cdot 10^{-11}$	$1.26 \cdot 10^{-11}$	$9.00 \cdot 10^{-11}$	$7.44 \cdot 10^{-10}$
$[E_h^k]$,%	$7.94 \cdot 10^{-4}$	$5.55 \cdot 10^{-4}$	$1.56 \cdot 10^{-7}$	$6.70 \cdot 10^{-8}$	$1.07 \cdot 10^{-11}$	$6.80 \cdot 10^{-12}$	$3.66 \cdot 10^{-11}$	$3.03 \cdot 10^{-10}$
$\lVert\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\rVert$	$1.18 \cdot 10^{-2}$	$8.85 \cdot 10^{-3}$	$4.08 \cdot 10^{-6}$	$1.42 \cdot 10^{-6}$	$5.61 \cdot 10^{-10}$	$2.22 \cdot 10^{-10}$	$9.96 \cdot 10^{-11}$	$9.85 \cdot 10^{-10}$
$\lVert\delta\mathbf{x}_h^k\rVert$	$9.12 \cdot 10^{-15}$	$1.59 \cdot 10^{-14}$	$1.66 \cdot 10^{-14}$	$1.80 \cdot 10^{-14}$	$1.73 \cdot 10^{-14}$	$2.16 \cdot 10^{-14}$	$2.21 \cdot 10^{-14}$	$2.10 \cdot 10^{-14}$
$\lVert\Delta_h^k\rVert$	$4.44 \cdot 10^{-16}$	$1.11 \cdot 10^{-15}$	$1.33 \cdot 10^{-15}$	$2.66 \cdot 10^{-15}$	$1.33 \cdot 10^{-15}$	$1.05 \cdot 10^{-14}$	$1.43 \cdot 10^{-13}$	$6.53 \cdot 10^{-13}$

Для отдельных Δ^{ki}, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, введем в соответствии с обозначением (41) норму

$$\|\Delta_h^k\| = \max(|\Delta_{h,1}^k|,\ |\Delta_{h,2}^k|,\ \ldots,\ |\Delta_{h,n-1}^k|),$$

где, например, $\Delta_{h,1}^k = \Delta^{k1}$.

Обозначим систему разностных уравнений (15) как $\boldsymbol{P}\mathbf{x} = \boldsymbol{f}$. В силу того, что левые и правые части уравнений системы (15) содержат элементы обратной матрицы от локальной матрицы (10), использование некорректного алгоритма приводит к появлению погрешностей (возмущений):

1) в матрице $\boldsymbol{P}$ (речь идет о коэффициентной устойчивости, когда возмущается только матрица $\boldsymbol{P}$, а правая часть $\boldsymbol{f}$ остается неизменной [3]);
2) в правой части $\boldsymbol{f}$ (речь идет об устойчивости по правой части, когда возмущается только правая часть $\boldsymbol{f}$, а матрица $\boldsymbol{P}$ остается неизменной [3]).

Вопрос возмущения коэффициентов матрицы $\boldsymbol{P}$ исследован в [1].

Заметим, преобразование РКЗ (15) к РКЗ (3) по форме отдаст предпочтение появлению погрешностей именно в коэффициентах матрицы $\boldsymbol{P}$.

Вычисление отдельных Δ^{ki}, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, и $\|\Delta_h^k\|$ в процессе выполнения ЧЭ позволяет контролировать наличие погрешностей (возмущений) в коэффициентах каждого разностного уравнения и всей задачи (15) в целом.

12. Численные эксперименты Э2$\widetilde{t}$: ОДУ2 с ограниченными общими решениями — некорректный алгоритм вычисления обратной матрицы. При исследовании РКЗ для ОДУ2 (64), (65) при использовании в эксперименте Э2$\widetilde{t}$ некорректного алгоритма проявились следующие результаты.

1. Оценки $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ имели локальный минимум.
2. В некоторой окрестности границы $\overline{a}(\overline{b})$ при фиксированном номере i во внутренних узлах сетки значения $|\delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k|$ также имели локальный минимум; причем по мере удаления узла с номером i от $\overline{a}(\overline{b})$ преобладающим становился монотонный характер.
3. Нормы $\|\delta\mathbf{x}_h^k\|$ переставали быть тривиальными и имели возрастающий участок, начало которого практически совпадало с точкой локального минимума оценок $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$.
4. В некоторой окрестности границы $\overline{a}(\overline{b})$ при фиксированном номере i во внутренних узлах сетки значения $|\delta\mathbf{x}_{h,i}^k|$ также имелся возрастающий участок, в котором эти значения отличались от тривиальных, причем по мере удаления узла с номером i от границы $\overline{a}(\overline{b})$ оценки $|\delta\mathbf{x}_{h,i}^k|$ в области возрастания уменьшались вплоть до тривиальных значений.
5. При использовании некорректного алгоритма вычисления обратной матрицы нормы $\|\Delta_h^k\|$, $k = 2, 3, \ldots, 9$, оказались тривиальными не для всех k.

Результаты эксперимента Э2$\widetilde{t}$ для РКЗ, аппроксимирующих ДКЗ (104), на финальном этапе при использовании некорректного алгоритма вычисления обратной матрицы приведены в табл. 10; при использовании корректного алгоритма — в табл. 11.

Данные табл. 10 свидетельствуют, что имеет место чувствительность норм $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ и $\|\delta\mathbf{x}_h^k\|$ к погрешностям (возмущениям) в коэффициентах РКЗ.

Характер изменения норм $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ в табл. 10 не позволил признать возможным использование $\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k$ в качестве вектора псевдовозмущений, что привело к отсутствию условной сходимости, тогда как данные табл. 11 свидетельствуют о наличии условной сходимости.

Результаты исследования РКЗ для ОДУ2 (65) в отрезке интегрирования $[10^{-45}, 10^{-45}+2.5]$ оказались незначительно отличными от приведенных данных в табл. 10, 11.

Исследования РКЗ для оставшихся ОДУ2 не выявили существенного влияния некорректного алгоритма вычисления обратной матрицы на результаты.

Выводы

1. На основе точного сеточного решения $\mathbf{x}_h^k$ разностной краевой задачи построено приближенное сеточное решение (псевдоточное решение) $\widehat{\mathbf{x}}_h^k$.
2. Введено понятие псевдоневязки для обыкновенного дифференциального уравнения и вычислена оценка порядка нормы псевдоневязки $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ на псевдоточном решении $\widehat{\mathbf{x}}_h^k$. Теоретически показан монотонно убывающий характер поведения этой нормы при увеличении используемой степени многочлена Тейлора k и уменьшении шага дискретизации h сетки.
3. Установлена теоретическая связь между порядком нормы псевдоневязки $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ и порядком нормы разности между точным решением $\mathbf{x}_h^k$ и псевдоточным решением $\widehat{\mathbf{x}}_h^k$.
4. Показано стремление псевдоточного решения $\widehat{\mathbf{x}}_h^k$ к точному решению $\mathbf{x}_h^k$ при увеличении используемой степени многочлена Тейлора k и уменьшении шага дискретизации h сетки.
5. Даны определения условной устойчивости и условной сходимости группы РКЗ; установлена теоретическая связь между ними.
6. На основе найденного вектора $\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k$ построено возмущенное решение и вычислена оценка нормы его отклонения от точного решения РКЗ, позволяющая выявить наличие или отсутствие условной устойчивости.
7. Установлена теоретическая связь между сходимостью (в традиционном понимании) и условной сходимостью группы РКЗ. Получено соотношение, позволяющее оценить меру различий с точностью до константы между искомой сеточной функцией x и сеточной функцией $[x]$, совпадающей с точным решением $x(t)$ ДКЗ в узлах сетки D_h, значения которого в общем случае неизвестны.
8. Показана обратимость локальной матрицы.
9. Исследована содержащая погрешности (возмущения) в своих коэффициентах группа РКЗ, в которой выявлено отсутствие условной устойчивости и, как следствие, отсутствие условной сходимости.
10. Приведены результаты исследований с использованием псевдоневязок неустойчивых в традиционном понимании групп РКЗ, для которых отсутствуют основания отвергнуть их сходимость в силу практического совпадения сеточных функций $[x]$ и x при конечных n.

Библиографический список

1. Самарский А. А. *Теория разностных схем.* М.: Наука, 1977. 656 с.
2. Формалеев В. Ф., Ревизников Д. Л. *Численные методы.* М.: Физматлит, 2004. 400 с.
3. Самарский А. А., Гулин А. В. *Численные методы.* М.: Наука, 1973. 432 с.
4. Маклаков В. Н. Оценка порядка аппроксимации матричного метода численного интегрирования краевых задач для систем линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Сообщение 2. Краевые задачи с граничными условиями второго и третьего рода // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 1. С. 55–79. https://doi.org/10.14498/vsgtu1528.
5. Сходимость матричного метода численного интегрирования краевых задач для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 3. С. 559–577. https://doi.org/10.14498/vsgtu1426.
6. Радченко В. П., Усов А. А. Модификация сеточных методов решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами на основе тейлоровских разложений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008. № 2(17). С. 60–65. https://doi.org/10.14498/vsgtu646.
7. Маклаков В. Н. Оценка порядка аппроксимации матричного метода численного интегрирования краевых задач для систем линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Сообщение 1. Краевые задачи с граничными условиями первого рода // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 3. С. 389–409. https://doi.org/10.14498/vsgtu1511.
8. Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Т. 1. М.: Наука, 1970. 608 с.
9. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1976. 576 с.
10. Филиппов А. Ф. *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Либроком, 2013. 208 с.
11. Закс Л. *Статистическое оценивание.* М.: Статистика, 1976. 598 с.
12. Курош А. Г. *Курс высшей алгебры.* М.: Наука, 1975. 431 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 1, pp. 140–178
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1889

MSC: 34B99

The use of pseudoresiduals in the study of convergence of unstable difference boundary value problems for linear nonhomogeneous ordinary second-order differential equations

V. N. Maklakov

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

The paper considers the previously proposed method of numerical integration using the matrix calculus in the study of boundary value problems for nonhomogeneous linear ordinary differential equations of the second order with variable coefficients. According to the indicated method, when compiling a system of difference equations, an arbitrary degree of the Taylor polynomial in expanding the unknown solution of the problem into a Taylor series can be chosen while neglecting the approximation of the derivatives by finite differences.

Some aspects of the convergence of an unstable second-order difference boundary value problem are investigated. The concept of a pseudo-residual on a certain vector is introduced for an ordinary differential equation. On the basis of the exact solution of the difference boundary value problem, an approximate solution has been built, where the norm of pseudo-residuals is different from the trivial value.

It has been established theoretically that the estimate of the pseudo-residual norm decreases with an increase in the used degree of the Taylor polynomial and with a decrease in the mesh discretization step. The definitions of conditional stability and conditional convergence are given; a theoretical connection between them is established. The perturbed solution has been built on the basis of the found vector of pseudo-residuals, the estimate of the norm of its deviation from the exact solution of the difference boundary value problem has been calculated, which allows one to identify the presence of conditional stability. A theoretical relationship between convergence and conditional convergence is established.

The results of numerical experiments are presented.

Research Article

Please cite this paper in press as:
Maklakov V. N. The use of pseudoresiduals in the study of convergence of unstable difference boundary value problems for linear nonhomogeneous ordinary second-order differential equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 1, pp. 140–178. https://doi.org/10.14498/vsgtu1889 (In Russian).

Author's Details:
Vladimir N. Maklakov https://orcid.org/0000-0003-1644-7424
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics and Computer Science

Keywords: ordinary differential equations, boundary value problems, approximation order, numerical methods, Taylor polynomials, residuals.

Received: 20th October, 2021 / Revised: 1st November, 2021 /
Accepted: 24th January, 2022 / First online: 31st March, 2022

References

1. Samarskii A. A. *Teoriia raznostnykh skhem* [The Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1977, 656 pp. (In Russian)
2. Formaleev V. F., Reviznikov D. L. *Chislennye metody* [Numerical Methods]. Moscow, Fizmatlit, 2004, 400 pp. (In Russian)
3. Samarskii A. A., Gulin A. V. *Chislennye metody* [Numerical Methods]. Moscow, Nauka, 1973 (In Russian).
4. Maklakov V. N. The evaluation of the order of approximation of the matrix method for numerical integration of the boundary value problems for systems of linear nonhomogeneous ordinary differential equations of the second order with variable coefficients. Message 2. Boundary value problems with boundary conditions of the second and third kind, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 1, pp. 55–79 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1528.
5. Maklakov V. N. Convergence of the matrix method of numerical integration of the boundary value problems for linear nonhomogeneous ordinary differential second order equations with variable coefficients, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 3, pp. 559–577 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1426.
6. Radchenko V. P., Usov A. A. Modified grid method for solving linear differential equation equipped with variable coefficients based on Taylor series, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2008, no. 2(17), pp. 60–65 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu646.
7. Maklakov V. N. The evaluation of the order of approximation of the matrix method for numerical integration of the boundary value problems for systems of linear non-homogeneous ordinary differential equations of the second order with variable coefficients. Message 1. Boundary value problems with boundary conditions of the first kind, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 3, pp. 389–409 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1511.
8. Fichtenholz G. M. *Differential- und Integralrechnung.* I [Differential and integral calculus. I], Hochschulbücher für Mathematik [University Books for Mathematics], vol. 61. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1986, xiv+572 pp. (In German)
9. Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniiam* [Manual of ordinary differential equations]. Moscow, Nauka, 1976, 576 pp. (In Russian)
10. Filippov A. F. *Sbornik zadach po differentsial'nym uravneniiam* [Collection of Problems on Differential Equations]. Moscow, Librokom, 2013, 208 pp.
11. Zaks L. *Statisticheskoe otsenivanie* [Statistical estimation]. Moscow, Statistika, 1976, 598 pp. (In Russian)
12. Kurosh A. G. *Kurs vysshei algebry* [A Course of Higher Algebra]. Moscow, Nauka, 1975, 431 pp. (In Russian)