Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 26, № 3. С. 446–479
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1932
EDN: NIORFC

УДК 517.968.4

Вопросы существования и единственности решения одного класса нелинейных интегральных уравнений на всей прямой

Х. А. Хачатрян[1,3]***, А. С. Петросян***[2,3]

[1] Ереванский государственный университет,
Армения, 0025, Ереван, ул. А. Манукяна, 1.
[2] Национальный аграрный университет Армении,
Армения, 0009, Ереван, ул. Маршала Теряна, 74.
[3] Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Россия, 119992, Москва, Ленинские горы, 1.

Аннотация

Исследуется класс нелинейных интегральных уравнений со стохастическим и симметричным ядром на всей прямой. При определенных частных представлениях ядра и нелинейности уравнения вышеуказанного характера возникают во многих разделах математического естествознания. В частности, такие уравнения встречаются в теории p-адических струн, в кинетической теории газов, в математической биологии и в теории переноса излучения. Доказываются конструктивные теоремы существования неотрицательных нетривиальных и ограниченных решений при различных ограничениях на функцию, описывающую нелинейность уравнений. При дополнительных ограничениях на ядро и на нелинейность доказывается также теорема единственности в определенном классе ограниченных и неотрицательных функций, имеющих конечный предел в $\pm\infty$. В конце приводятся конкретные прикладные примеры ядра и нелинейности, удовлетворяющие всем ограничениям доказанных утверждений.

Ключевые слова: монотонность, последовательные приближения, сходимость, ограниченное решение, предел решения, условие Каратеодори.

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Научная статья

Образец для цитирования
Хачатрян Х. А., Петросян А. С. Вопросы существования и единственности решения одного класса нелинейных интегральных уравнений на всей прямой // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 3. С. 446–479. EDN: NIORFC. DOI: 10.14498/vsgtu1932.

Сведения об авторах

Хачатур Агавардович Хачатрян https://orcid.org/0000-0002-4835-943X
доктор физико-математических наук, профессор; зав. кафедрой теории функций и дифференциальных уравнений[1]; основной исполнитель гранта Российского научного фонда (проект № 19–11–00223)[3]; e-mail: khachatur.khachatryan@ysu.am

Айкануш Самвеловна Петросян https://orcid.org/0000-0002-7172-4730
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент каф. высшей математики и физики[2]; исполнитель гранта Российского научного фонда (проект № 19–11–00223)[3];
e-mail: haykuhi25@mail.ru

Получение: 26 мая 2022 г. / Исправление: 8 августа 2022 г. /
Принятие: 11 августа 2022 г. / Публикация онлайн: 5 сентября 2022 г.

1. Введение

1.1. Постановка задачи и основная цель работы

Рассмотрим следующий класс нелинейных интегральных уравнений на всей прямой:

$$B(x) = \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)G(t,B(t))dt, \quad x \in \mathbb{R} := (-\infty, +\infty) \tag{1}$$

относительно искомой измеримой неотрицательной и ограниченной функции $B(x)$. В уравнении (1) ядро $K(x,t)$ удовлетворяет следующим ограничениям:

1) (*условие симметрии и стохастичности*)

$$K(x,t) = K(t,x) > 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)dt = 1, \quad x \in \mathbb{R};$$

2) (*условие миноранты*)
существуют измеримые на $\mathbb{R}^2$ функции $\{K_j(x,t)\}_{j=1,2}$ со свойствами

$$K_j(x,t) \geqslant 0, \quad K_j(x,t) \not\equiv 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad j = 1,2, \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{x} K_1(x,t)dt \leqslant \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \int_{t}^{\infty} K_1(x,t)dx \leqslant \frac{1}{2}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

$$\int_{x}^{\infty} K_2(x,t)dt \leqslant \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{t} K_2(x,t)dx \leqslant \frac{1}{2}, \quad t \in \mathbb{R}; \tag{4}$$

существуют числа $r_j > 0$, $j = 1,2$, при которых

$$\varepsilon_1 := \inf_{x \in \mathbb{R}^-} \int_{r_1}^{\infty} K_1(x+y,x)dy > 0, \tag{5}$$

$$\varepsilon_2 := \inf_{x \in \mathbb{R}^+} \int_{r_2}^{\infty} K_2(x-y,x)dy > 0, \quad \mathbb{R}^+ := [0,+\infty), \quad \mathbb{R}^- := \mathbb{R} \backslash \mathbb{R}^+, \tag{6}$$

$$m^-(\gamma_1) := \int_{-\infty}^{0} (-x)\gamma_1(x)dx < +\infty, \quad m^+(\gamma_2) := \int_{0}^{\infty} x\gamma_2(x)dx < +\infty, \tag{7}$$

где

$$\gamma_1(x) := \frac{1}{2} - \int_{-\infty}^{x} K_1(x,t)dt, \quad \gamma_2(x) := \frac{1}{2} - \int_{x}^{\infty} K_2(x,t)dt, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

такие, что ядро $K(x,t)$ удовлетворяет следующей оценке снизу:

$$K(x,t) \geqslant \begin{cases} K_1(x,t), & \text{если} \quad x \geqslant t, \\ K_2(x,t), & \text{если} \quad x < t, \end{cases} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2. \tag{9}$$

Относительно функции $\lambda(x)$ предположим выполнение следующих условий:

a) $\lambda \in C(\mathbb{R}), \quad 0 \leqslant \lambda(x) \leqslant 1, \quad \lambda(x) \not\equiv 1, \quad x \in \mathbb{R},$

b) $x(1-\lambda(x)) \in L_1(\mathbb{R})$.

Нелинейность $G(t,u)$ определена на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, принимает вещественные значения, удовлетворяет условию «критичности»

$$G(t,0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

и некоторым другим условиям (см. ниже).

Основной целью настоящей работы является построение неотрицательных нетривиальных и ограниченных решений при различных ограничениях на $G(t,u)$, а также изучение вопроса единственности построенного решения в том или ином классе ограниченных функций.

1.2. История вопроса

Отметим, что при определенных частных представлениях ядра K, функции λ и нелинейности G уравнение (1) имеет приложения во многих разделах математической физики и математической биологии. В частности, уравнения такого характера (когда ядро K зависит от разности своих аргументов либо мажорируется таким ядром) встречаются в динамической теории p-адических открыто-замкнутых струн для скалярного поля тахионов, в кинетической теории газов (в исследованиях кинетического уравнения Больцмана в рамках модифицированной модели Бхатнагара—Гросса—Крука), в теории переноса излучения в неоднородных средах и в математической теории пространственно-временного распространения пандемии в рамках модели Дикмана—Капера (см. [1–12] и ссылки в них).

Следует отметить, что для ядерных функций K, зависящих от разности своих аргументов уравнение (1) исследовано в работах [2, 9–21] при различных ограничениях на $G(t,u)$. Например, в том частном случае, когда $\lambda(x) \equiv 1$, $K(x,t) = K(x-t)$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $K(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$, а $G(t,u) = \sqrt[p]{u}$, $u \in \mathbb{R}$ ($p > 2$ — нечетное число), уравнение (1) достаточно подробно изучено в работах [2, 11–13].

Для общих четных и консервативных ядер вида $K(x,t) = K(x-t)$ при различных ограничениях на G и λ в работах [14–19] обсуждены вопросы существования и единственности нетривиальных неотрицательных (в некоторых случаях и знакопеременных) и ограниченных (или линейно растущих) решений уравнения (1). В несимметричном случае, когда $K(x,t) = K(x-t)$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda(x) \equiv 1$, $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xK(x)dx > 0$ и $K(x)$ экспоненциально возрастает на отрицательной части числовой оси, а $G(t,u) \equiv G_0(u)$, $G_0(u) \uparrow$ по u на $\mathbb{R}^+$, $G_0'(0)u - cu^{1+\varepsilon} \leqslant G_0(u) \leqslant G_0'(0)u$, $u \in \mathbb{R}^+$, c, $\varepsilon > 0$, $1 < G_0'(0) < +\infty$, $G_0(\eta) = \eta$, $\eta > 0$, в работах [9, 10, 20] доказаны теоремы существования и единственности положительных монотонных и ограниченных решений. В несимметричном случае исследованы также соответствующие квазилинейные варианты уравнения (1) и построены однопараметрические семейства неотрицательных (в некоторых случаях монотонных) и ограниченных решений (см. [21]). В работе [21] проведены также исследования по асимптотическому поведению построенных решений на $\pm\infty$ и разработаны численные методы нахождения приближенных решений.

1.3. Сводка основных результатов

В настоящей работе при условиях 1), 2), a), b) и при различных ограничениях на функцию $G(t,u)$ будут доказаны конструктивные теоремы существования нетривиальных неотрицательных и ограниченных решений. Будут исследованы асимптотическое поведение построенных решений на $\pm\infty$ и вопрос единственности решения в определенном классе ограниченных и неотрицательных функций. Полученные результаты будут применены на конкретных задачах прикладного характера из теории p-адических открыто-замкнутых струн, а также на задачах из математической теории пространственно-временного распространения пандемии в рамках модифицированной модели Дикмана—Капера. Следует отметить, что доказанные результаты настоящей работы обобщают и дополняют соответствующие утверждения работ [14–16].

2. Обозначения и вспомогательные факты

2.1. О суммируемых и ограниченных решениях вспомогательных линейных неоднородных интегральных уравнений типа Вольтерра

Рассмотрим следующее вспомогательное линейное интегральное уравнение типа Вольтерра с переменным верхним пределом:

$$\varphi(x) = \tilde{\gamma}_1(x) + \lambda(x) \int_{-\infty}^{x} \tilde{K}_1(x,t)\varphi(t)dt, \quad x \in \mathbb{R} \tag{10}$$

относительно искомой измеримой функции $\varphi(x)$, где

$$\tilde{\gamma}_1(x) := 1 - \lambda(x) + 2\lambda(x)\gamma_1(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

$$\tilde{K}_1(x,t) := 2K_1(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2. \tag{12}$$

Ниже убедимся в достоверности следующего утверждения.

Лемма 1. *При условиях* (2), (3), (5), a), b), *если* $m^-(\gamma_1) < +\infty$, *то уравнение* (10) *имеет неотрицательное ограниченное решение* $\varphi(x)$, *причем* $\varphi(x) \leqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$ *и* $\varphi \in L_1(-\infty, 0)$.

Доказательство. Рассмотрим следующие последовательные приближения для уравнения (10):

$$\begin{gathered} \varphi_{n+1}(x) = \tilde{\gamma}_1(x) + \lambda(x) \int_{-\infty}^{x} \tilde{K}_1(x,t)\varphi_n(t)dt, \\ \varphi_0(x) = \tilde{\gamma}_1(x), \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad x \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{13}$$

Исходя из условий (2), (3) и a) индукцией по n легко можно убедиться, что

$$\varphi_n(x) \uparrow \text{ по } n, \quad \varphi_n(x) \text{ измеримы на } \mathbb{R}, \quad n = 0,1,2,\ldots. \tag{14}$$

Учитывая (2), (3), (11) и (12), несложно также проверить, что

$$\varphi_n(x) \leqslant 1, \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Докажем, что
$$\varphi_n \in L_1(-\infty, 0), \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{16}$$

Действительно, в случае $n = 0$ данное включение сразу следует из условий a), b) и $m^-(\gamma_1) < +\infty$, ибо

$$0 \leqslant \int_{-\infty}^{0} \tilde{\gamma}_1(x)dx \leqslant 1 + \int_{-\infty}^{-1} (-x)\tilde{\gamma}_1(x)dx \leqslant \int_{-\infty}^{-1} (-x)(1-\lambda(x))dx +$$
$$+ 2\int_{-\infty}^{-1} (-x)\gamma_1(x)dx + 1 \leqslant m^-(1-\lambda) + 2m^-(\gamma_1) + 1 < +\infty.$$

Предположим, что $\varphi_n \in L_1(-\infty, 0)$ для некоторого натурального n. Докажем, что тогда
$$\int_{-\infty}^{x} \tilde{K}_1(x,t)\varphi_n(t)dt \in L_1(-\infty, 0). \tag{17}$$

Пусть $l < 0$ — произвольное число. Учитывая (2), (3) и индукционное предположение, в силу теоремы Фубини (см. [22]) будем иметь

$$0 \leqslant \int_{l}^{0} \int_{-\infty}^{x} \tilde{K}_1(x,t)\varphi_n(t)dtdx = \int_{l}^{0} \int_{-\infty}^{l} \tilde{K}_1(x,t)\varphi_n(t)dtdx +$$
$$+ \int_{l}^{0} \int_{l}^{x} \tilde{K}_1(x,t)\varphi_n(t)dtdx = \int_{-\infty}^{l} \varphi_n(t) \int_{l}^{0} \tilde{K}_1(x,t)dxdt +$$
$$+ \int_{l}^{0} \varphi_n(t) \int_{t}^{0} \tilde{K}_1(x,t)dxdt \leqslant \int_{-\infty}^{l} \varphi_n(t) \int_{t}^{0} \tilde{K}_1(x,t)dxdt +$$
$$+ \int_{l}^{0} \varphi_n(t) \int_{t}^{0} \tilde{K}_1(x,t)dxdt \leqslant \int_{-\infty}^{0} \varphi_n(t) \int_{t}^{\infty} \tilde{K}_1(x,t)dxdt \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-\infty}^{0} \varphi_n(t)dt < +\infty.$$

Устремляя число $l \to -\infty$, приходим к включению (17). Из (11), b), неравенства $m^-(\gamma_1) < +\infty$, (13) и (17) следует, что $\varphi_{n+1} \in L_1(-\infty, 0)$.

Пусть теперь $a \leqslant 0$ — произвольное число. Тогда, интегрируя обе части (13) в пределах от $-\infty$ до a и при этом учитывая a), b), (2), (3), (11), (12), (14), согласно теореме Фубини получим

$$\int_{-\infty}^{a} \varphi_{n+1}(x)dx \leqslant \int_{-\infty}^{a} \tilde{\gamma}_1(x)dx + \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{x} \tilde{K}_1(x,t)\varphi_{n+1}(t)dtdx =$$
$$= \int_{-\infty}^{a} \tilde{\gamma}_1(x)dx + \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{0} \tilde{K}_1(x,x+y)\varphi_{n+1}(x+y)dydx =$$
$$= \int_{-\infty}^{a} \tilde{\gamma}_1(x)dx + \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{a} \tilde{K}_1(x,x+y)\varphi_{n+1}(x+y)dxdy =$$
$$= \int_{-\infty}^{a} \tilde{\gamma}_1(x)dx + \int_{-\infty}^{-r_1} \int_{-\infty}^{a} \tilde{K}_1(x,x+y)\varphi_{n+1}(x+y)dxdy +$$

$$+\int_{-r_1}^{0}\int_{-\infty}^{a}\tilde K_1(x,x+y)\varphi_{n+1}(x+y)dxdy=$$

$$=\int_{-\infty}^{a}\tilde\gamma_1(x)dx+\int_{-\infty}^{-r_1}\int_{-\infty}^{a+y}\tilde K_1(t-y,t)\varphi_{n+1}(t)dtdy+$$

$$+\int_{-r_1}^{0}\int_{-\infty}^{a+y}\tilde K_1(t-y,t)\varphi_{n+1}(t)dtdy\leqslant$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{a}\tilde\gamma_1(x)dx+\int_{-\infty}^{-r_1}\int_{-\infty}^{a-r_1}\tilde K_1(t-y,t)\varphi_{n+1}(t)dtdy+$$

$$+\int_{-r_1}^{0}\int_{-\infty}^{a}\tilde K_1(t-y,t)\varphi_{n+1}(t)dtdy=$$

$$=\int_{-\infty}^{a}\tilde\gamma_1(x)dx+\int_{-\infty}^{a-r_1}\int_{-\infty}^{a-r_1}\tilde K_1(t-y,t)\varphi_{n+1}(t)dtdy+$$

$$+\int_{a-r_1}^{-r_1}\int_{-\infty}^{a-r_1}\tilde K_1(t-y,t)\varphi_{n+1}(t)dtdy+$$

$$+\int_{-\infty}^{a}\varphi_{n+1}(t)\int_{-r_1}^{0}\tilde K_1(t-y,t)dydt=$$

$$=\int_{-\infty}^{a}\tilde\gamma_1(x)dx+\int_{-\infty}^{a-r_1}\varphi_{n+1}(t)\int_{-\infty}^{a-r_1}\tilde K_1(t-y,t)dydt+$$

$$+\int_{-\infty}^{a-r_1}\varphi_{n+1}(t)\int_{a-r_1}^{-r_1}\tilde K_1(t-y,t)dydt+$$

$$+\int_{-\infty}^{a}\varphi_{n+1}(t)\int_{-r_1}^{0}\tilde K_1(t-y,t)dydt=$$

$$=\int_{-\infty}^{a}\tilde\gamma_1(x)dx+\int_{-\infty}^{a-r_1}\varphi_{n+1}(t)\int_{-\infty}^{-r_1}\tilde K_1(t-y,t)dydt+$$

$$+\int_{-\infty}^{a}\varphi_{n+1}(t)\int_{-r_1}^{0}\tilde K_1(t-y,t)dydt=$$

$$=\int_{-\infty}^{a}\tilde\gamma_1(x)dx+\int_{-\infty}^{a-r_1}\varphi_{n+1}(t)\int_{-\infty}^{0}\tilde K_1(t-y,t)dydt+$$

$$+\int_{a-r_1}^{a}\varphi_{n+1}(t)\int_{-r_1}^{0}\tilde K_1(t-y,t)dydt=$$

$$=\int_{-\infty}^{a}\tilde\gamma_1(x)dx+\int_{-\infty}^{a-r_1}\varphi_{n+1}(t)\int_{t}^{\infty}\tilde K_1(\tau,t)d\tau dt+$$

$$+\int_{a-r_1}^{a}\varphi_{n+1}(t)\int_{t}^{t+r_1}\tilde K_1(\tau,t)d\tau dt,$$

откуда следует, что

$$0\leqslant\int_{a-r_1}^{a}\varphi_{n+1}(t)dt\leqslant\int_{-\infty}^{a}\tilde\gamma_1(x)dx+\int_{a-r_1}^{a}\varphi_{n+1}(t)\int_{t}^{t+r_1}\tilde K_1(\tau,t)d\tau dt. \qquad (18)$$

Оценим теперь следующую разность, имея в виду (3) и (5):

$$1-\int_t^{t+r_1}\tilde{K}_1(\tau,t)d\tau=2\biggl(\frac{1}{2}-\int_t^{t+r_1}K_1(\tau,t)d\tau\biggr)\geqslant$$
$$\geqslant 2\biggl(\int_t^{\infty}K_1(\tau,t)d\tau-\int_t^{t+r_1}K_1(\tau,t)d\tau\biggr)=$$
$$=2\int_{t+r_1}^{\infty}K_1(\tau,t)d\tau=2\int_{r_1}^{\infty}K_1(t+y,t)dy\geqslant 2\varepsilon_1>0\quad\text{для}\quad t\in\mathbb{R}^-.$$

Итак, в силу последнего неравенства из (18) получаем, что

$$0\leqslant\int_{a-r_1}^{a}\varphi_{n+1}(t)dt\leqslant\frac{1}{2\varepsilon_1}\int_{-\infty}^{a}\tilde{\gamma}_1(x)dx,\quad a\leqslant 0.\tag{19}$$

Интегрируем теперь обе части (19) по a в пределах от R до 0 (где $R<0$ — произвольное число). Тогда, учитывая b), $m^-(\gamma_1)<+\infty$ и (11), из (19) в силу теоремы Фубини будем иметь

$$0\leqslant\int_R^0\int_{a-r_1}^{a}\varphi_{n+1}(t)dtda\leqslant\frac{1}{2\varepsilon_1}\int_R^0\int_{-\infty}^{a}\tilde{\gamma}_1(x)dxda=$$
$$=\frac{1}{2\varepsilon_1}\int_R^0\int_{-\infty}^{R}\tilde{\gamma}_1(x)dxda+\frac{1}{2\varepsilon_1}\int_R^0\int_R^{a}\tilde{\gamma}_1(x)dxda=$$
$$=\frac{1}{2\varepsilon_1}\int_{-\infty}^{R}\tilde{\gamma}_1(x)(-R)dx+\frac{1}{2\varepsilon_1}\int_R^0\tilde{\gamma}_1(x)(-x)dx\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2\varepsilon_1}\biggl(\int_{-\infty}^{R}\tilde{\gamma}_1(x)(-x)dx+\int_R^0\tilde{\gamma}_1(x)(-x)dx\biggr)=$$
$$=\frac{1}{2\varepsilon_1}\int_{-\infty}^{0}\tilde{\gamma}_1(x)(-x)dx\leqslant\frac{1}{2\varepsilon_1}\biggl(\int_{-\infty}^{0}(1-\lambda(x))(-x)dx+2m^-(\gamma_1)\biggr)<+\infty.$$

Устремляя число $R\to-\infty$, получаем, что функции

$$\int_{a-r_1}^{a}\varphi_{n+1}(t)dt\in L_1(-\infty,0),\quad n=0,1,2,\ldots.$$

Следовательно,

$$0\leqslant\int_{-\infty}^{0}\int_{a-r_1}^{a}\varphi_{n+1}(t)dtda\leqslant\frac{1}{2\varepsilon_1}(m^-(1-\lambda)+2m^-(\gamma_1)),\quad n=0,1,2,\ldots$$

или

$$0\leqslant\int_{-\infty}^{0}\int_{-r_1}^{0}\varphi_{n+1}(a+\tau)d\tau da\leqslant\frac{1}{2\varepsilon_1}(m^-(1-\lambda)+2m^-(\gamma_1)),\quad n=0,1,2,\ldots,$$

откуда следует, что

$$0\leqslant\int_{-r_1}^{0}\int_{-\infty}^{\tau}\varphi_{n+1}(y)dyd\tau\leqslant\frac{1}{2\varepsilon_1}(m^-(1-\lambda)+2m^-(\gamma_1)),\quad n=0,1,2,\ldots.\tag{20}$$

Из (20), в частности, следует, что

$$0 \leqslant \int_{-\infty}^{-r_1} \varphi_{n+1}(y)dy \leqslant \frac{1}{2\varepsilon_1 r_1}(m^-(1-\lambda)+2m^-(\gamma_1)), \quad n=0,1,2,\dots. \tag{21}$$

С другой стороны, в силу (15) имеем

$$0 \leqslant \int_{-r_1}^{0} \varphi_{n+1}(y)dy \leqslant r_1, \quad n=0,1,2,\dots. \tag{22}$$

Комбинируя (21) и (22), приходим к оценке

$$0 \leqslant \int_{-\infty}^{0} \varphi_{n+1}(y)dy \leqslant$$
$$\leqslant r_1 + \frac{1}{2\varepsilon_1 r_1}(m^-(1-\lambda)+2m^-(\gamma_1)) < +\infty, \quad n=0,1,2,\dots. \tag{23}$$

Итак, на основании (14)–(16) и (23) заключаем, что последовательность измеримых на $\mathbb{R}$ функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ имеет поточечный предел, когда $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x),$$

причем

$$\tilde{\gamma}_1(x)\leqslant\varphi(x)\leqslant 1, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Согласно теореме Б. Леви (см. [22]), предельная функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (10), а также следующей оценке:

$$0 \leqslant \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)dx \leqslant r_1 + \frac{1}{2\varepsilon_1 r_1}(m^-(1-\lambda)+2m^-(\gamma_1)) < +\infty.$$

Итак, $\varphi\in L_1(-\infty,0)$. Таким образом, лемма полностью доказана. □

Рассмотрим теперь второе вспомогательное линейное интегральное уравнение типа Вольтерра уже с переменным нижним пределом:

$$\psi(x)=\tilde{\gamma}_2(x)+\lambda(x)\int_x^{\infty}\tilde{K}_2(x,t)\psi(t)dt, \quad x\in\mathbb{R} \tag{24}$$

относительно искомой измеримой функции $\psi(x)$, где

$$\tilde{\gamma}_2(x):=1-\lambda(x)+2\lambda(x)\gamma_2(x), \quad x\in\mathbb{R},$$

$$\tilde{K}_2(x,t):=2K_2(x,t), \quad (x,t)\in\mathbb{R}^2.$$

Повторяя рассуждения, аналогичные доказательству леммы 1, приходим к следующему утверждению относительно уравнения (24).

Лемма 2. *При условиях* (2), (4), (6), a), b), *если* $m^+(\gamma_2)<+\infty$, *то уравнение* (24) *имеет неотрицательное ограниченное решение* $\psi(x)$, *причем* $\psi(x)\leqslant 1$, $x\in\mathbb{R}$ *и* $\psi\in L_1(0,+\infty)$.

Замечание 1. Небезынтересно отметить, что

A) если дополнительно $K_1 \in L_\infty(\mathbb{R}^2)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \lambda(x) = 1$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} \gamma_1(x) = 0$, то

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = 0,$$

B) если дополнительно $K_2 \in L_\infty(\mathbb{R}^2)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \lambda(x) = 1$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} \gamma_2(x) = 0$, то

$$\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = 0.$$

Действительно, вышеприведенные предельные соотношения следуют из доказанных лемм 1 и 2 с учетом следующих простых неравенств:

$$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1 - \lambda(x) + 2\gamma_1(x) + 2 \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^2} (K_1(x,t)) \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt,$$

$$0 \leqslant \psi(x) \leqslant 1 - \lambda(x) + 2\gamma_2(x) + 2 \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^2} (K_2(x,t)) \int_{x}^{\infty} \psi(t)dt.$$

2.2. Существование нетривиальных и ограниченных решений однородных линейных интегральных уравнений типа Вольтерра. Асимптотическое поведение построенных решений на $\pm\infty$

Сначала рассмотрим следующее однородное интегральное уравнение Вольтерра с переменным верхним пределом:

$$\Phi(x) = \lambda(x) \int_{-\infty}^{x} \tilde{K}_1(x,t)\Phi(t)dt, \quad x \in \mathbb{R} \tag{25}$$

относительно искомой функции $\Phi(x)$.

Имеет место следующая

Лемма 3. *При условиях леммы 1 уравнение (25) обладает нетривиальным неотрицательным ограниченным решением $\Phi(x)$, причем $0 \leqslant 1 - \Phi \in L_1(-\infty, 0)$. Более того, при дополнительном ограничении A) данное решение удовлетворяет следующему предельному соотношению:*

$$\lim_{x\to-\infty} \Phi(x) = 1. \tag{26}$$

Доказательство. Наряду с уравнением (25) рассмотрим неоднородное интегральное уравнение (10). Прямой проверкой можно убедиться, что функция $\varphi_{\mathrm{tr}}(x) \equiv 1$ является решением уравнения (10). С другой стороны, согласно лемме 1 уравнение (10) кроме такого тривиального решения обладает неотрицательным ограниченным решением $\varphi(x) : \varphi(x) \leqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$, $\varphi \in L_1(-\infty, 0)$. Очевидно, что функция $\Phi(x) := 1 - \varphi(x) \geqslant 0$, $\Phi(x) \not\equiv 0$ является ограниченным решением однородного уравнения (25), причем $1 - \Phi \in L_1(-\infty, 0)$. В силу замечания 1 при дополнительном условии A) будет выполняться предельное соотношение (26). Лемма доказана. □

Аналогично доказывается

Лемма 4. *При условиях леммы 2 однородное уравнение*

$$F(x) = \lambda(x) \int_x^\infty \tilde{K}_2(x,t)F(t)dt, \quad x \in \mathbb{R} \tag{27}$$

обладает нетривиальным неотрицательным ограниченным решением $F(x)$, *причем* $0 \leqslant 1 - F \in L_1(0,+\infty)$. *Более того, при дополнительном ограничении B) данное решение удовлетворяет следующему предельному соотношению*:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$$

2.3. Единственность решений соответствующих линейных однородных уравнений на множествах $\mathbb{R}^\pm$

Рассмотрим теперь однородные интегральные уравнения (25) и (27) соответственно на множествах $\mathbb{R}^-$ и $\mathbb{R}^+$:

$$\tilde{\Phi}(x) = \lambda(x) \int_{-\infty}^x \tilde{K}_1(x,t)\tilde{\Phi}(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^-, \tag{28}$$

$$\tilde{F}(x) = \lambda(x) \int_x^\infty \tilde{K}_2(x,t)\tilde{F}(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{29}$$

Ниже при дополнительных ограничениях на $\lambda(x)$ докажем, что уравнения (28) и (29) соответственно в следующих классах ограниченных функций:

$$\mathfrak{M}_- := \{f_-(x) : 0 \leqslant f_-(x) \leqslant 1, \quad x \in \mathbb{R}^-, \quad 1 - f_- \in L_1(-\infty,0)\},$$

$$\mathfrak{M}_+ := \{f_+(x) : 0 \leqslant f_+(x) \leqslant 1, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad 1 - f_+ \in L_1(0,+\infty)\}$$

не могут иметь более одного решения.

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 5. *Пусть выполняются все условия леммы 3. Тогда, если*

$$\mathrm{mes}((-\infty,0] \setminus \mathrm{supp}\{(1-\lambda(x))\theta(-x)\}) = 0,$$

$$\lambda \downarrow \text{ на } (-\infty,0],$$

($\theta(x)$ *— известная функция Хевисайда), то уравнение* (28) *в классе* $\mathfrak{M}_-$ *не может иметь более одного решения.*

Лемма 6. *Пусть выполняются все условия леммы 4. Тогда, если*

$$\mathrm{mes}([0,+\infty) \setminus \mathrm{supp}\{(1-\lambda(x))\theta(x)\}) = 0, \tag{30}$$

$$\lambda \uparrow \text{ на } [0,+\infty), \tag{31}$$

то уравнение (29) *в классе* $\mathfrak{M}_+$ *не может иметь более одного решения.*

Докажем, например, лемму 6. Доказательство леммы 5 проводится аналогичными рассуждениями.

Доказательство леммы 6. Предположим, что уравнение (29) имеет два решения $\tilde{F}$ и $\tilde{F}^*$ из класса $\mathfrak{M}_+$. Тогда очевидно, что $\tilde{F}-\tilde{F}^* \in L_1(0,+\infty)$, и из (29) в силу (2), (4), a), (31) и теоремы Фубини будем иметь

$$\int_0^\infty |\tilde{F}(x) - \tilde{F}^*(x)|dx \leqslant \int_0^\infty \lambda(x) \int_x^\infty \tilde{K}_2(x,t)|\tilde{F}(t) - \tilde{F}^*(t)|dtdx =$$
$$= \int_0^\infty |\tilde{F}(t) - \tilde{F}^*(t)| \int_0^t \lambda(x)\tilde{K}_2(x,t)dxdt \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^\infty |\tilde{F}(t) - \tilde{F}^*(t)|\lambda(t) \int_0^t \tilde{K}_2(x,t)dxdt \leqslant \int_0^\infty |\tilde{F}(t) - \tilde{F}^*(t)|\lambda(t)dt,$$

откуда

$$\int_0^\infty |\tilde{F}(t) - \tilde{F}^*(t)|(1-\lambda(t))dt \leqslant 0. \tag{32}$$

Из (32) с учетом (30) следует, что $\tilde{F}(t) = \tilde{F}^*(t)$ почти всюду на $\mathbb{R}^+$. Лемма доказана. □

Замечание 2. К сожалению, вопрос единственности решений однородных уравнений (25) и (27) в определенных классах ограниченных на $\mathbb{R}$ функций пока остается открытой проблемой.

3. Разрешимость уравнения (1)

3.1. Существование неотрицательного нетривиального и ограниченного решения уравнения (1), когда нелинейность G не зависит от переменной t

Рассмотрим уравнение (1) в случае, когда $G(t,u) \equiv G_0(u)$, $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^+$:

$$\tilde{B}(x) = \lambda(x) \int_{-\infty}^\infty K(x,t)G_0(\tilde{B}(t))dt, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{33}$$

где $G_0(u)$ — определенная и непрерывная на множестве $\mathbb{R}^+$ функция, удовлетворяющая следующим условиям:

g_1) существуют положительные числа η и ξ, $\xi < \eta$ такие, что $G_0(\xi) = 2\xi$, $G_0(\eta) = \eta$;

g_2) $G_0(0) = 0$, $y = G_0(u) \uparrow$ по u на $\mathbb{R}^+$;

g_3) $y = G_0(u)$ строго выпукла вверх на $\mathbb{R}^+$ (см. рис. 1).

Имеет место

Теорема 1. *Пусть выполняются условия 1), 2), a), b) и g_1)–g_3). Тогда уравнение (33) имеет неотрицательное нетривиальное и ограниченное решение $\tilde{B}(x)$, причем $\tilde{B}(x) \leqslant \eta$, $x \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Рассмотрим следующие последовательные приближения:

$$\begin{aligned} &\tilde{B}_{n+1}(x) = \lambda(x) \int_{-\infty}^\infty K(x,t)G_0(\tilde{B}_n(t))dt, \\ &\tilde{B}_0(x) = \eta\lambda(x), \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{34}$$

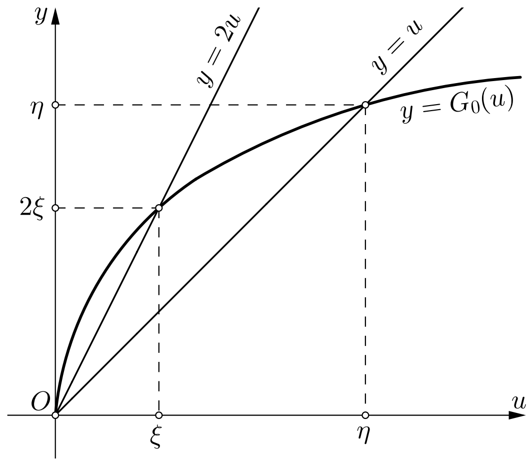

Рис. 1. [Figure 1]

Учитывая условия 1), a), g_1) и g_2), методом математической индукции несложно проверить, что

$$\tilde{B}_n(x) \quad \text{измеримы на} \quad \mathbb{R}, \quad n=0,1,2,\ldots, \tag{35}$$

$$\tilde{B}_n(x) \geqslant 0, \quad n=0,1,2,\ldots, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{36}$$

$$\tilde{B}_n(x)\downarrow \text{ по } n, \quad x\in\mathbb{R}. \tag{37}$$

Докажем следующую оценку снизу для последовательности измеримых функций $\{\tilde{B}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$:

$$\tilde{B}_n(x) \geqslant \max\{\xi\Phi(x), \xi F(x)\}, \quad x\in\mathbb{R}, \quad n=0,1,2,\ldots. \tag{38}$$

Действительно, во-первых, в силу доказанных лемм 3 и 4

$$0\leqslant \Phi(x)\leqslant 1, \quad 0\leqslant F(x)\leqslant 1, \quad x\in\mathbb{R}. \tag{39}$$

Учитывая (2) и (39), из (25) и (27) будем иметь

$$\Phi(x)\leqslant \lambda(x)\int_{-\infty}^{x}\tilde{K}_1(x,t)dt\leqslant\lambda(x), \tag{40}$$

$$F(x)\leqslant \lambda(x)\int_{x}^{\infty}\tilde{K}_2(x,t)dt\leqslant\lambda(x), \quad x\in\mathbb{R}. \tag{41}$$

Так как $\eta>\xi$ (см. условие g_1)), с учетом (40), (41) получаем, что

$$\tilde{B}_0(x)\geqslant\xi\lambda(x)\geqslant\xi\Phi(x), \quad \tilde{B}_0(x)\geqslant\xi\lambda(x)\geqslant\xi F(x), \quad x\in\mathbb{R}.$$

Следовательно, $\tilde{B}_0(x)\geqslant\max\{\xi\Phi(x),\xi F(x)\}$, $x\in\mathbb{R}$.

Предположим, что (38) выполняется при некотором $n\in\mathbb{N}$. Тогда, имея в виду неравенства (39), (9) и условия 1), 2), g_1)–g_3), из (34) получим

$$\tilde{B}_{n+1}(x) \geqslant \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t) G_0(\xi\Phi(t))dt \geqslant \lambda(x) \int_{-\infty}^{x} K(x,t) G_0(\xi\Phi(t))dt \geqslant$$
$$\geqslant 2\xi\lambda(x) \int_{-\infty}^{x} K(x,t)\Phi(t)dt \geqslant 2\xi\lambda(x) \int_{-\infty}^{x} K_1(x,t)\Phi(t)dt =$$
$$= \xi\lambda(x) \int_{-\infty}^{x} \tilde{K}_1(x,t)\Phi(t)dt = \xi\Phi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\tilde{B}_{n+1}(x) \geqslant \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t) G_0(\xi F(t))dt \geqslant \lambda(x) \int_{x}^{\infty} K(x,t) G_0(\xi F(t))dt \geqslant$$
$$\geqslant 2\xi\lambda(x) \int_{x}^{\infty} K(x,t)F(t)dt \geqslant 2\xi\lambda(x) \int_{x}^{\infty} K_2(x,t)F(t)dt =$$
$$= \xi\lambda(x) \int_{x}^{\infty} \tilde{K}_2(x,t)F(t)dt = \xi F(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, $\tilde{B}_{n+1}(x) \geqslant \max\{\xi\Phi(x), \xi F(x)\}$, $x \in \mathbb{R}$. Таким образом, в силу (35)–(38) можем утверждать, что последовательность измеримых функций $\{\tilde{B}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ имеет поточечный предел, когда $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{B}_n(x) = \tilde{B}(x),$$

причем $\tilde{B}(x)$ удовлетворяет двойному неравенству

$$\max\{\xi\Phi(x), \xi F(x)\} \leqslant \tilde{B}(x) \leqslant \eta\lambda(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{42}$$

Так как $G_0 \in C(\mathbb{R}^+)$, $\lambda \in C(\mathbb{R})$ и K — измеримая функция, в силу теоремы Б. Леви $\tilde{B}(x)$ удовлетворяет уравнению (33). Теорема доказана. □

3.2. Асимптотическое поведение решения (33) на $\pm\infty$

Имеет место

Теорема 2. *При условиях теоремы 1, если выполняются условия A) и B), то решение уравнения (33), построенное при помощи последовательных приближений (34), обладает следующей интегральной асимптотикой:* $\eta - \tilde{B} \in L_1(\mathbb{R})$.

Доказательство. Во-первых, используя (34), (37), (38) и условия 1), g_1)–g_3), индукцией по n легко можно убедиться, что

$$0 \leqslant \eta - \tilde{B}_n \in L_1(\mathbb{R}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{43}$$

С другой стороны, заметим, что в силу лемм 3 и 4 существуют числа $\delta_1 < 0$ и $\delta_2 > 0$ такие, что

$$\text{при } x \leqslant \delta_1 \quad \text{имеет место} \quad \Phi(x) \geqslant \frac{\xi}{2}, \tag{44}$$

$$\text{при } x \geqslant \delta_2 \quad \text{имеет место} \quad F(x) \geqslant \frac{\xi}{2}.$$

Следовательно, в силу (38) можем утверждать, что когда $x \in (-\infty, \delta_1] \cup [\delta_2, +\infty)$, то

$$\tilde{B}_n(x) \geqslant \frac{\xi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

В силу условия 1) с учетом (37) последовательные приближения (34) можно записать в следующем виде:

$$0 \leqslant \eta - \tilde{B}_{n+1}(x) = \eta(1 - \lambda(x)) + \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)(\eta - G_0(\tilde{B}_n(t)))dt, \qquad (45)$$
$$\tilde{B}_0(x) = \eta\lambda(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что когда $t \in (-\infty, \delta_1] \cup [\delta_2, +\infty)$, существует число $\alpha_0 \in (0, 1)$ такое, что

$$0 \leqslant \eta - G_0(\tilde{B}_n(t)) \leqslant \alpha_0(\eta - \tilde{B}_n(t)), \quad n = 0, 1, 2, \dots. \qquad (46)$$

Действительно, из выпуклости вверх функции $y = G_0(u)$ следует, что

$$\frac{\eta - G_0(u_0)}{\eta - u_0} \leqslant \frac{\eta - G_0(\xi/2)}{\eta - \xi/2} := \alpha_0, \quad u_0 \in [\xi/2, \eta), \quad \alpha_0 \in (0, 1)$$

ибо $G_0(\xi/2) > \xi/2$, $0 < \xi < \eta$, $G_0(\eta) = \eta$ (см. рис. 2).

В тех точках t, в которых $\tilde{B}_n(t) = \eta$, неравенства (46) превращаются в равенства, поскольку $G_0(\eta) = \eta$. Учитывая условия 1), a), g_1), g_2) и неравенства (46), в силу (37) из (45) будем иметь

$$0 \leqslant \eta - \tilde{B}_{n+1}(x) \leqslant \eta(1 - \lambda(x)) + \alpha_0\lambda(x) \int_{-\infty}^{\delta_1} K(x,t)(\eta - \tilde{B}_n(t))dt +$$
$$+ \alpha_0\lambda(x) \int_{\delta_2}^{\infty} K(x,t)(\eta - \tilde{B}_n(t))dt + \eta\lambda(x) \int_{\delta_1}^{\delta_2} K(x,t)dt \leqslant \eta(1 - \lambda(x)) +$$
$$+ \alpha_0\left(\int_{-\infty}^{\delta_1} K(x,t)(\eta - \tilde{B}_{n+1}(t))dt + \int_{\delta_2}^{\infty} K(x,t)(\eta - \tilde{B}_{n+1}(t))dt\right) +$$

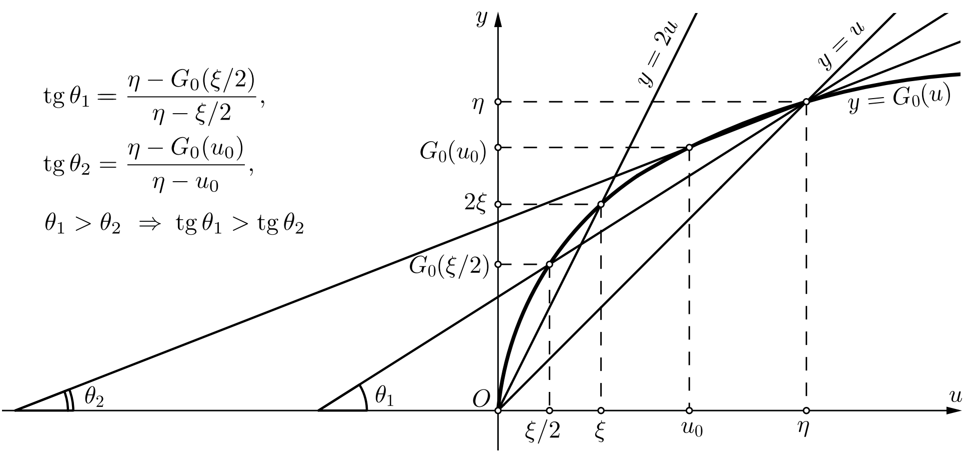

Рис. 2. [Figure 2]

$$+\eta\int_{\delta_1}^{\delta_2}K(x,t)dt,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Имея в виду 1), a), b) и (43), после интегрирования последнего неравенства получим

$$0\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}(\eta-\tilde{B}_{n+1}(x))dx\leqslant\eta\int_{-\infty}^{\infty}(1-\lambda(x))dx+\eta\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\delta_1}^{\delta_2}K(x,t)dtdx+$$
$$+\alpha_0\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\delta_1}K(x,t)(\eta-\tilde{B}_{n+1}(t))dtdx+$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\delta_2}^{\infty}K(x,t)(\eta-\tilde{B}_{n+1}(t))dtdx\Big)=$$
$$=\eta\int_{-\infty}^{\infty}(1-\lambda(x))dx+\eta(\delta_2-\delta_1)+\alpha_0\int_{-\infty}^{\delta_1}(\eta-\tilde{B}_{n+1}(t))dt+$$
$$+\alpha_0\int_{\delta_2}^{\infty}(\eta-\tilde{B}_{n+1}(t))dt\leqslant$$
$$\leqslant\eta\int_{-\infty}^{\infty}(1-\lambda(x))dx+\eta(\delta_2-\delta_1)+\alpha_0\int_{-\infty}^{\infty}(\eta-\tilde{B}_{n+1}(t))dt,$$

откуда следует, что

$$0\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}(\eta-\tilde{B}_{n+1}(t))dt\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\eta(\delta_2-\delta_1)}{1-\alpha_0}+\frac{\eta}{1-\alpha_0}\int_{-\infty}^{\infty}(1-\lambda(x))dx,\quad n=0,1,2,\ldots.\tag{47}$$

Из (47) в силу теоремы Б. Леви заключаем, что $0\leqslant\eta-\tilde{B}\in L_1(\mathbb{R})$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\eta-\tilde{B}(x))dx\leqslant\frac{\eta(\delta_2-\delta_1)}{1-\alpha_0}+\frac{\eta}{1-\alpha_0}\int_{-\infty}^{\infty}(1-\lambda(x))dx.$$

Таким образом, теорема доказана. □

Замечание 3. Следует отметить, что доказанные теоремы 1 и 2 обобщают и дополняют соответствующие результаты работы [15].

3.3. Существование решения уравнения (1) с общей нелинейностью

Рассмотрим теперь уравнение (1) с общей нелинейностью вида

$$G(t,u)=G_0(u)+\omega(t,u),\quad t\in\mathbb{R},\quad u\in\mathbb{R}^+,\tag{48}$$

где $G_0(u)$ удовлетворяет условиям g_1)–g_3), а $\omega(t,u)$ обладает следующими свойствами:

ω_1) $\omega(t,0)\equiv 0$, $t\in\mathbb{R}$ и существует $\sup\limits_{(t,u)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}\omega(t,u):=\beta_0<+\infty$;

ω_2) при всяком фиксированном $t \in \mathbb{R}$ функция $\omega(t,u) \uparrow$ по u на множестве $\mathbb{R}^+$;

ω_3) $\omega(t,u)$ удовлетворяет условию Каратеодори на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ по аргументу u, т.е. при каждом фиксированном $u \in \mathbb{R}^+$ функция $\omega(t,u)$ измерима по t на $\mathbb{R}$ и почти при всех $t \in \mathbb{R}$ данная функция непрерывна по u на $\mathbb{R}^+$.

Имеет место

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* 1), 2), a), b), g_1)–g_3) *и* ω_1)–ω_3). *Тогда уравнение* (1) *с нелинейностью вида* (48) *имеет нетривиальное неотрицательное и ограниченное решение* $B(x)$, *причем* $B(x) \geqslant \tilde{B}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Сначала наряду с уравнением (1) рассмотрим следующее вспомогательное нелинейное интегральное уравнение на всей прямой:

$$L(x) = g(x) + \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t) G_0(L(t))dt, \quad x \in \mathbb{R} \tag{49}$$

относительно искомой неотрицательной функции $L(x)$, где

$$g(x) := \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)\beta(t)dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

а

$$\beta(t) := \sup_{u \in \mathbb{R}^+} \omega(t,u), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{50}$$

Рассмотрим следующие простые итерации для уравнения (49):

$$L_{n+1}(x) = g(x) + \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t) G_0(L_n(t))dt,$$
$$L_0(x) = g(x), \quad n = 0,1,2,\dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Учитывая условия 1), a), ω_1), ω_2), g_2), индукцией легко можно доказать, что

$$L_n(x) \uparrow \text{ по } n.$$

Имея в виду условия 1), a), а также непрерывность функции G_0, можно проверить, что

$$L_n(x) \text{ измеримы на } \mathbb{R}, \quad n = 0,1,2,\dots.$$

Рассмотрим теперь следующее характеристическое уравнение:

$$G_0(u) + \beta_0 = u, \quad u \in \mathbb{R}^+. \tag{51}$$

Из g_1)–g_3) с учетом неотрицательности числа β_0 следует, что существует единственное положительное решение ξ^* уравнения (51), причем $\xi^* \geqslant \eta$ (равенство возможно только тогда, когда $\beta_0 = 0$) (см. рис. 3).

Докажем, что

$$L_n(x) \leqslant \xi^*, \quad n = 0,1,2,\dots, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{52}$$

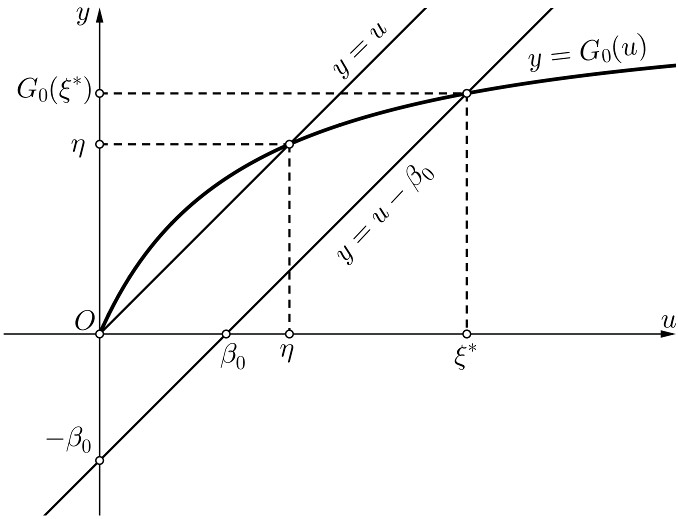

Рис. 3. [Figure 3]

Пусть $n = 0$, тогда в силу ω_1), 1) и a) имеем

$$L_0(x) \leqslant \beta_0 = \xi^* - G_0(\xi^*) \leqslant \xi^*, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Предположим, что $L_n(x) \leqslant \xi^*$, $x \in \mathbb{R}$ для некоторого натурального n. Тогда, учитывая условия ω_1), a), g_2), 1), будем иметь

$$L_{n+1}(x) \leqslant \beta_0 + \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t) G_0(\xi^*) dt \leqslant \beta_0 + G(\xi^*) = \xi^*.$$

Следовательно, последовательность измеримых функций $\{L_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ имеет поточечный предел:

$$\lim_{n \to \infty} L_n(x) = L(x),$$

причем $g(x) \leqslant L(x) \leqslant \xi^*$, $x \in \mathbb{R}$ и по теореме Б. Леви $L(x)$ удовлетворяет уравнению (49).

Вернемся теперь к исходному уравнению (1) и рассмотрим следующие последовательные приближения:

$$\begin{gathered} B_{n+1}(x) = \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)(G_0(B_n(t)) + \omega(t, B_n(t)))dt, \\ B_0(x) = \tilde{B}(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \in \mathbb{R}, \end{gathered} \tag{53}$$

где $\tilde{B}(x)$ — решение уравнения (33) (см. теоремы 1 и 2).

Индукцией несложно проверить, что

$$B_n(x) \uparrow \text{ по } n, \tag{54}$$

$$B_n(x) \text{ измеримы на } \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{55}$$

Докажем, что

$$B_n(x) \leqslant \tilde{B}(x) + L(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{56}$$

С этой целью приведем следующее легко проверяемое неравенство для монотонно возрастающих и выпуклых вверх на $\mathbb{R}^+$ функций, обладающих свойством $G_0(0) = 0$ (см. [23]):

$$G_0(u+v) \leqslant G_0(u) + G_0(v), \quad u, v \in \mathbb{R}^+. \tag{57}$$

Для $n = 0$ неравенство (56) очевидно. Пусть (56) имеет место при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда, имея в виду (57), ω_1), (49), (33), 1), (50), из (53) получим

$$B_{n+1}(x) \leqslant \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)(G_0(\tilde{B}(t) + L(t)) + \omega(t, \tilde{B}(t) + L(t)))dt \leqslant$$
$$\leqslant \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)(G_0(\tilde{B}(t)) + G_0(L(t)) + \beta(t))dt = \tilde{B}(x) + L(x).$$

Итак, ввиду (54)–(56) заключаем, что существует поточечный предел для последовательности измеримых функций $\{B_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$:

$$\lim_{n\to\infty} B_n(x) = B(x),$$

причем $\tilde{B}(x) \leqslant B(x) \leqslant \tilde{B}(x) + L(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Учитывая условие Каратеодори для $\omega(t,u)$ и непрерывность функции G_0, в силу теоремы Б. Леви можем утверждать, что $B(x)$ удовлетворяет уравнению (1). Теорема доказана. $\square$

3.4. Асимптотическое поведение решения (1) в зависимости от свойств функции $\omega(t, u)$

Ниже мы будем исследовать интегральную асимптотику решения уравнения (1) (с нелинейностью вида (48)) в зависимости от свойств функции $\beta(t)$. Отдельно подробно изучим следующие возможные случаи:

$$\mathscr{J}) \quad \beta \in L_1(\mathbb{R}), \qquad\qquad \mathscr{L}) \quad \beta \notin L_1(\mathbb{R}).$$

Случай $\mathscr{J}$. В данном случае мы докажем следующую теорему.

Теорема 4. *При условиях теоремы 3, если $\beta \in L_1(\mathbb{R})$, то решение уравнения (1) (с нелинейностью вида (48)), построенное при помощи последовательных приближений (53), обладает следующей интегральной асимптотикой:*

$$\eta - B \in L_1(\mathbb{R}).$$

Доказательство. Сначала, учитывая (53), (54), (33) и (50), оценим следующую разность:

$$0 \leqslant B_{n+1}(x) - \tilde{B}(x) =$$
$$= \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)(G_0(B_n(t)) + \omega(t, B_n(t)))dt -$$
$$- \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)(G_0(\tilde{B}(t))dt \leqslant g(x) +$$

$$+ \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)(G_0(B_{n+1}(t)) - G_0(\tilde{B}(t)))dt \leqslant$$
$$\leqslant g(x) + \int_{-\infty}^{\delta_1} K(x,t)(G_0(B_{n+1}(t)) - G_0(\tilde{B}(t)))dt +$$
$$+ \int_{\delta_2}^{\infty} K(x,t)(G_0(B_{n+1}(t)) - G_0(\tilde{B}(t)))dt + G_0(\xi^*) \int_{\delta_1}^{\delta_2} K(x,t)dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

откуда с учетом того, что $G_0(\xi^*) = \xi^* - \beta_0$, $\beta_0 \geqslant 0$, приходим к следующей оценке:

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant B_{n+1}(x) - \tilde{B}(x) \leqslant \\ &\leqslant g(x) + \int_{-\infty}^{\delta_1} K(x,t)(G_0(B_{n+1}(t)) - G_0(\tilde{B}(t)))dt + \xi^* \int_{\delta_1}^{\delta_2} K(x,t)dt + \\ &+ \int_{\delta_2}^{\infty} K(x,t)(G_0(B_{n+1}(t)) - G_0(\tilde{B}(t)))dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n = 0,1,2,\ldots . \end{aligned} \tag{58}$$

Индукцией по n сначала докажем, что

$$B_n - \tilde{B} \in L_1(\mathbb{R}), \quad n = 0,1,2,\ldots . \tag{59}$$

Включение (59) для нулевого приближения (в итерациях (53)) выполняется очевидным образом. Предположим, что $B_n - \tilde{B} \in L_1(\mathbb{R})$ для некоторого натурального n.

Убедимся, что $G_0(B_n) - G_0(\tilde{B}) \in L_1(\mathbb{R})$. Действительно, учитывая тот факт, что $0 \leqslant \eta - \tilde{B} \in L_1(\mathbb{R})$ (см. теорему 2), а также условия g_1)–g_3) и индукционное предположение, будем иметь

$$\begin{aligned} |G_0(B_n(t)) - G_0(\tilde{B}(t))| &\leqslant |\eta - G_0(\tilde{B}(t))| + |\eta - G_0(B_n(t))| \leqslant \\ &\leqslant \eta - G_0(\tilde{B}(t)) + |\eta - B_n(t)| \leqslant 2(\eta - \tilde{B}(t)) + B_n(t) - \tilde{B}(t) \in L_1(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

ибо для всех $u \geqslant 0$ выполняется $|\eta - G_0(u)| \leqslant |\eta - u|$ (см. рис. 4). Следовательно,

$$G_0(B_n) - G_0(\tilde{B}) \in L_1(\mathbb{R}).$$

Тогда из оценки

$$0 \leqslant B_{n+1}(x) - \tilde{B}(x) \leqslant g(x) + \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)(G_0(B_n(t)) - G_0(\tilde{B}(t)))dt$$

с учетом того, что $g \in L_1(\mathbb{R})$ (ибо $\beta \in L_1(\mathbb{R})$, ядро K удовлетворяет условию 1)), а λ и K обладают соответственно свойствами a) и 1), получаем, что

$$B_{n+1} - \tilde{B} \in L_1(\mathbb{R}).$$

Проинтегрируем теперь обе части неравенства (58) в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Принимая во внимание (52), (56), (54), в силу условий 1), a), g_1)–g_3) и теоремы 1 будем иметь

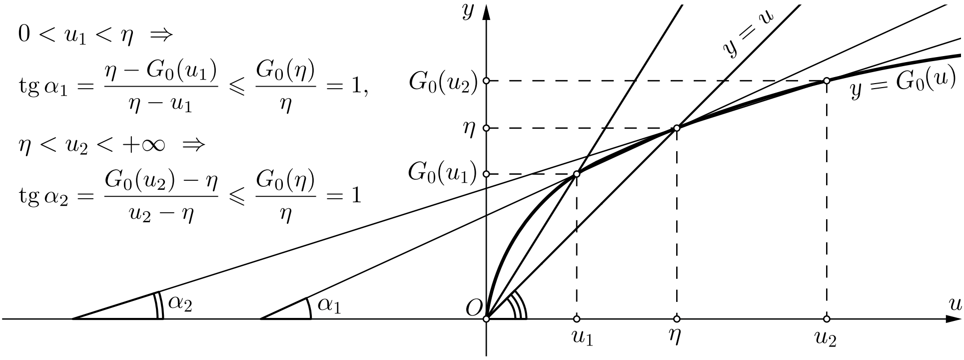

Рис. 4. [Figure 4]

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} (B_{n+1}(x) - \tilde{B}(x))dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx + \xi^*(\delta_2 - \delta_1) + {}\\
+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\delta_1} K(x,t)(G_0(B_{n+1}(t)) - G_0(\tilde{B}(t)))dtdx + {}\\
+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\delta_2}^{\infty} K(x,t)(G_0(B_{n+1}(t)) - G_0(\tilde{B}(t)))dtdx = {}\\
= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx + \xi^*(\delta_2 - \delta_1) + \int_{-\infty}^{\delta_1} (G_0(B_{n+1}(t)) - G_0(\tilde{B}(t)))dt + {}\\
+ \int_{\delta_2}^{\infty} (G_0(B_{n+1}(t)) - G_0(\tilde{B}(t)))dt \leqslant {}\\
\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx + \xi^*(\delta_2 - \delta_1) + \delta^* \int_{-\infty}^{\delta_1} (B_{n+1}(t) - \tilde{B}(t))dt + {}\\
+ \delta^* \int_{\delta_2}^{\infty} (B_{n+1}(t) - \tilde{B}(t))dt,
\end{aligned}
$$

где

$$
\delta^* := \frac{G_0(\xi^* + \eta) - G_0(\eta/2)}{\xi^* + \eta/2} < 1, \tag{60}
$$

ибо $\xi^* + \eta \geqslant B_{n+1}(t) \geqslant \tilde{B}(t) \geqslant \eta/2$, когда $t \in (-\infty, \delta_1] \cup [\delta_2, +\infty)$; $G_0(\xi^* + \eta) < < \xi^* + \eta$, а $G_0(\eta/2) > \eta/2$. Следовательно, учитывая (60), из полученного выше интегрального неравенства приходим к следующей оценке:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} (B_{n+1}(x) - \tilde{B}(x))dx \leqslant {}\\
\leqslant \frac{\xi^*(\delta_2 - \delta_1)}{1 - \delta^*} + \frac{1}{1 - \delta^*}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.
\end{aligned} \tag{61}
$$

Из (54), (61) с учетом теоремы Б. Леви заключаем, что

$$
0 \leqslant B - \tilde{B} \in L_1(\mathbb{R})
$$

и
$$0 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} (B(x) - \tilde{B}(x))dx \leqslant \frac{\xi^*(\delta_2 - \delta_1)}{1 - \delta^*} + \frac{1}{1 - \delta^*} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx.$$
Таким образом, принимая во внимание включение $0 \leqslant \eta - \tilde{B} \in L_1(\mathbb{R})$, из оценки
$$|\eta - B(x)| \leqslant \eta - \tilde{B}(x) + B(x) - \tilde{B}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$
получаем, что $\eta - B \in L_1(\mathbb{R})$. Теорема доказана. □

Случай $\mathscr{L}$. Пусть теперь $\beta \notin L_1(\mathbb{R})$. При дополнительном ограничении на функцию ω мы докажем, что $\xi^* - B \in L_1(\mathbb{R})$.

Имеет место

Теорема 5. *Пусть выполняются все условия теоремы 3 и $\beta \notin L_1(\mathbb{R})$. Тогда, если*
$$\beta_0 - \omega(t, \rho(t)) \in L_1(\mathbb{R}), \tag{62}$$
где
$$\rho(t) := \max\{\xi\Phi(t), \xi F(t)\}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{63}$$
то уравнение (1) имеет неотрицательное ограниченное решение $B(x)$, причем $B(x) \leqslant \xi^*$, $x \in \mathbb{R}$ и $\xi^* - B \in L_1(\mathbb{R})$.

Доказательство. Рассмотрим следующие последовательные приближения для уравнения (1):
$$B_{n+1}(x) = \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)(G_0(B_n(t)) + \omega(t, B_n(t)))dt,$$
$$B_0(x) = \xi^*, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$$
Совершая такие же рассуждения, как при доказательстве теоремы 3, можно убедиться, что
$$B_n(x) \text{ измеримы на } \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{64}$$
$$B_n(x) \downarrow \text{ по } n, \ x \in \mathbb{R}, \tag{65}$$
$$B_n(x) \geqslant \tilde{B}(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{66}$$
Исходя из 1), (65), (66), (51), ω_1), a), b), (38) и (62) имеем
$$\begin{aligned}
0 \leqslant \xi^* - B_{n+1}(x) &\leqslant \xi^*(1 - \lambda(x)) + \\
&+ \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)(G_0(\xi^*) + \beta_0 - G_0(B_{n+1}(t)) - \omega(t, B_{n+1}(t)))dt \leqslant \\
&\leqslant \xi^*(1 - \lambda(x)) + \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)(G_0(\xi^*) - G_0(B_{n+1}(t)))dt + \\
&+ \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)(\beta_0 - \omega(t, \rho(t)))dt \leqslant \\
&\leqslant \tilde{g}(x) + \lambda(x) \int_{-\infty}^{\delta_1} K(x,t)(G_0(\xi^*) - G_0(B_{n+1}(t)))dt + \\
&+ \lambda(x) \int_{\delta_2}^{\infty} K(x,t)(G_0(\xi^*) - G_0(B_{n+1}(t)))dt,
\end{aligned}$$

где

$$\tilde{g}(x) := \xi^*(1-\lambda(x)) + \lambda(x)\int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)(\beta_0 - \omega(t,\rho(t)))dt +$$
$$+ G_0(\xi^*)\int_{\delta_1}^{\delta_2} K(x,t)dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Из 1), a), b) и (62) немедленно следует, что

$$\tilde{g}(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \tilde{g} \in L_1(\mathbb{R}).$$

Далее, совершая рассуждения, как при доказательстве теоремы 2, получаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\xi^* - B_{n+1}(x))dx \leqslant \frac{1}{1-R_0}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(x)dx, \quad n = 0,1,2,\ldots, \tag{67}$$

где $R_0 := \dfrac{G_0(\xi^*) - G_0(\eta/2)}{\xi^* - \eta/2}$.

Из (64)–(66) и (67) следует сходимость последовательности измеримых функций $\{B_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$:

$$\lim_{n\to\infty} B_n(x) = B(x),$$

причем $\tilde{B}(x) \leqslant B(x) \leqslant \xi^*$, $x \in \mathbb{R}$, $\xi^* - B \in L_1(\mathbb{R})$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\xi^* - B(x))dx \leqslant \frac{1}{1-R_0}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(x)dx$$

и $B(x)$ удовлетворяет уравнению (1). Теорема доказана. □

4. Единственность решения

Возникает естественный вопрос. Является ли единственным построенное решение уравнения (1) в следующем классе ограниченных функций:

$$\mathscr{P} := \{f(x) : f(x) \geqslant \tilde{B}(x), x \in \mathbb{R}, f \in L_\infty(\mathbb{R}), \exists c > 0 \text{ такое, что } c - f \in L_1(\mathbb{R})\}\ ? \tag{68}$$

В настоящем параграфе при некоторых дополнительных ограничениях на λ, ω и K мы докажем единственность решения уравнения (1) в классе функций $\mathscr{P}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть выполняются условия 1), 2), a), b), g_1)–g_3) и ω_1), ω_2), причем K и ω непрерывны соответственно на множествах $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Тогда, если $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} \lambda(x) > 0$, выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

$$\left[\begin{array}{l} \beta \in L_1(\mathbb{R}), \\ \beta \notin L_1(\mathbb{R}), \quad \beta_0 - \omega(t,\rho(t)) \in L_1(\mathbb{R}) \end{array}\right.$$

и при всяком фиксированном $t \in \mathbb{R}$ функция $\omega(t,u)$ выпукла вверх по u на множестве $\mathbb{R}^+$, то уравнение (1) (с нелинейностью (48)) в классе $\mathscr{P}$ не может иметь более одного решения.

Доказательство. Предположим, что уравнение (1) имеет два решения B, B^* в классе $\mathscr{P}$. Из непрерывности функций λ, K и ω в силу того, что $B,\ B^* \in L_\infty(\mathbb{R})$, немедленно следует, что $B,\ B^* \in C(\mathbb{R})$. Пусть теперь в некоторой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ эти решения принимают различные значения. Тогда в силу непрерывности функций B и B^* существует число $\delta > 0$ такое, что $B(x) \neq B^*(x)$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Учитывая 1), (42), (44), ω_1), ω_2) и условие $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} \lambda(x) > 0$, из (1) будем иметь

$$B(x) \geqslant \frac{\xi}{2} \inf_{x\in\mathbb{R}} \lambda(x) \int_{-\infty}^{\delta_1} K(x,t)dt > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{69}$$

Так как $B,\ B^* \in \mathscr{P}$, очевидно, что

$$B - B^* \in L_1(\mathbb{R}).$$

Убедимся, что

$$G_0(B(t)) - G_0(B^*(t)) \in L_1(\mathbb{R}), \tag{70}$$

$$\omega(t, B(t)) - \omega(t, B^*(t)) \in L_1(\mathbb{R}). \tag{71}$$

Учитывая (68), g_1)–g_3), будем иметь

$$0 \leqslant |G_0(B(t)) - G_0(B^*(t))| \leqslant |G_0(c) - G_0(B(t))| + |G_0(c) - G_0(B^*(t))| \leqslant \\ \leqslant \frac{G_0(c)}{c}|c - B(t)| + \frac{G_0(c)}{c}|c - B^*(t)| \in L_1(\mathbb{R}).$$

Следовательно, (70) доказано.

В случае $\mathscr{J}$ для разности $\omega(t, B(t)) - \omega(t, B^*(t))$ получаем

$$0 \leqslant |\omega(t, B(t)) - \omega(t, B^*(t))| \leqslant 2\beta(t) \in L_1(\mathbb{R}),$$

а в случае $\mathscr{L}$ с учетом (62), (68), (42) и (63) имеем

$$0 \leqslant |\omega(t, B(t)) - \omega(t, B^*(t))| \leqslant \\ \leqslant |\beta_0 - \omega(t, B(t))| + |\beta_0 - \omega(t, B^*(t))| \leqslant 2(\beta_0 - \omega(t, \rho(t))) \in L_1(\mathbb{R}).$$

Таким образом, включение (71) также доказано.

Поскольку $G_0(B(t)) + \omega(t, B(t))$, $t \in \mathbb{R}$ представляет собой ограниченную функцию (ибо $0 \leqslant G_0(B(t)) + \omega(t, B(t)) \leqslant \beta_0 + G_0(\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} B(t)) < +\infty$), из (70), (71), 1) и a) следует, что

$$\{G_0(B(x)) + \omega(x, B(x))\}\lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)\Big(G_0(B(t)) - G_0(B^*(t)) + \\ + \omega(t, B(t)) - \omega(t, B^*(t))\Big)dt \in L_1(\mathbb{R}). \tag{72}$$

Оценим теперь следующую разность:

$$|B(x)-B^*(x)| \leqslant \lambda(x)\int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)\Big(|G_0(B(t))-G_0(B^*(t))|+ \\ +|\omega(t,B(t))-\omega(t,B^*(t))|\Big)dt, \quad x\in\mathbb{R}. \quad (73)$$

Умножим обе части неравенства (73) на функцию

$$\frac{G_0(B(x))+\omega(x,B(x))}{\lambda(x)}, \quad x\in\mathbb{R},$$

и в силу (72), 1), а также условия $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}}\lambda(x)>0$ интегрируем полученное неравенство по x в пределах от $-\infty$ до ∞. В результате, пользуясь симметричностью ядра K и теоремой Фубини, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(G_0(B(x))+\omega(x,B(x)))|B(x)-B^*(x)|}{\lambda(x)}dx \leqslant \\ \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}(G_0(B(x))+\omega(x,B(x)))\int_{-\infty}^{\infty}K(x,t)\Big(|G_0(B(t))-G_0(B^*(t))|+ \\ +|\omega(t,B(t))-\omega(t,B^*(t))|\Big)dtdx = \\ =\int_{-\infty}^{\infty}\{|G_0(B(t))-G_0(B^*(t))|+|\omega(t,B(t))-\omega(t,B^*(t))|\}\times \\ \times\int_{-\infty}^{\infty}K(t,x)(G_0(B(x))+\omega(x,B(x)))dxdt = \\ =\int_{-\infty}^{\infty}\{|G_0(B(t))-G_0(B^*(t))|+|\omega(t,B(t))-\omega(t,B^*(t))|\}\frac{B(t)}{\lambda(t)}dt$$

или, что то же самое,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda(x)}\Big\{(G_0(B(x))+\omega(x,B(x)))|B(x)-B^*(x)|- \\ -|G_0(B(x))-G_0(B^*(x))|B(x)-|\omega(x,B(x))-\omega(x,B^*(x))|B(x)\Big\}dx\leqslant 0. \quad (74)$$

Обозначим через

$$E:=\{x\in\mathbb{R}: B(x)\neq B^*(x)\}. \quad (75)$$

Очевидно, что $\operatorname{mes} E>0$, ибо $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset E$. Учитывая (69), (75) и условия g_1)–g_3), ω_1)–ω_3), неравенство (74) можно переписать в следующем виде:

$$\int_E\frac{B(x)|B(x)-B^*(x)|}{\lambda(x)}\left\{\frac{G_0(B(x))}{B(x)}-\frac{|G_0(B(x))-G_0(B^*(x))|}{|B(x)-B^*(x)|}+ \right. \\ \left. +\frac{\omega(x,B(x))}{B(x)}-\frac{|\omega(x,B(x))-\omega(x,B^*(x))|}{|B(x)-B^*(x)|}\right\}dx\leqslant 0.$$

Из выпуклости вверх функций G_0 и ω по u с учетом g_2), ω_1) и ω_2) следует, что во всех точках множества E справедливы оценки

$$\frac{G_0(B(x))}{B(x)} > \frac{|G_0(B(x)) - G_0(B^*(x))|}{|B(x) - B^*(x)|}, \qquad x \in E; \tag{76}$$

$$\frac{\omega(x, B(x))}{B(x)} > \frac{|\omega(x, B(x)) - \omega(x, B^*(x))|}{|B(x) - B^*(x)|}, \qquad x \in E. \tag{77}$$

Принимая во внимание (76) и (77), из (75) приходим к противоречию. Следовательно, $B(x) = B^*(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Таким образом, теорема доказана. □

Замечание 4. Отметим, что данный подход, используемый при доказательстве единственности решения, для более простых нелинейных интегральных уравнений впервые был применен в недавней работе одного из авторов настоящей работы (см. [15]).

5. Примеры

В последнем параграфе настоящей работы приведем примеры функций K, λ, G_0 и ω. Отметим, что часть этих примеров, кроме чисто теоретического интереса, имеет также прикладной интерес в p-адической математической физике, в математической биологии и в кинетической теории газов.

Сперва приведем примеры ядра K. Пусть $\mu_0(x)$ и $\overset{0}{K}(x)$ — определенные на множестве $\mathbb{R}$ непрерывные и положительные функции, обладающие следующими свойствами:

i) $0 < c := \inf\limits_{x\in\mathbb{R}} \mu_0(x) \leqslant \mu_0(x) \leqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$, $\mu_0(-\tau) = \mu_0(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}^+$;

j) $(1 - \mu_0(x))x \in L_1(\mathbb{R})$;

k) $\overset{0}{K} \in L_1(\mathbb{R}) \cap M(\mathbb{R})$, $\overset{0}{K}(-\tau) = \overset{0}{K}(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}^+$, $\displaystyle\int_0^\infty K_0(y)dy = \frac{1}{2}$.

Тогда примерами ядра $K(x,t)$ могут служить следующие функции:

$\boldsymbol{k_1}$) $K(x,t) = \overset{0}{K}(x - t)$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$;

$\boldsymbol{k_2}$) $K(x,t) = \mu_0(x+t)\overset{0}{K}(x - t) + (1 - \mu_0(x - t))\overset{0}{K}(x + t)$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$;

$\boldsymbol{k_3}$) $K(x,t) = \overset{0}{K}(x - t)\left(\dfrac{1 + \mu_0(x+t)}{2}\right) + \overset{0}{K}(x + t)\left(\dfrac{1 - \mu_0(x-t)}{2}\right)$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$.

Подробно остановимся на примере k_2). Проверим, что выполняются условия 1) и 2). Действительно, сперва в качестве K_1 и K_2 выберем следующие функции:

$$K_1(x,t) = q_1(x)\mu_0(x+t)\overset{0}{K}(x - t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2; \tag{78}$$

$$K_2(x,t) = q_2(x)\mu_0(x+t)\overset{0}{K}(x - t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \tag{79}$$

где $\{q_j(x)\}_{j=1,2}$ — непрерывные функции на $\mathbb{R}$, причем

$$0 < d_j := \inf_{x\in\mathbb{R}} q_j(x) \leqslant q_j(x) \leqslant 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2; \tag{80}$$

$$x(1 - q_j(x)) \in L_1(\mathbb{R}), \quad j = 1, 2. \tag{81}$$

Докажем выполнимость условий (2)–(9). Учитывая условия i), j), k), (80) и (81), будем иметь

$$\int_{-\infty}^{x} K_1(x,t)dt \leqslant \int_{-\infty}^{x} \overset{0}{K}(x-t)dt = \int_0^\infty \overset{0}{K}(y)dy = \frac{1}{2}, \quad x\in\mathbb{R};$$

$$\int_t^\infty K_1(x,t)dx \leqslant \int_t^\infty \overset{0}{K}(x-t)dx = \int_0^\infty \overset{0}{K}(y)dy = \frac{1}{2}, \quad t\in\mathbb{R};$$

$$\gamma_1(x) = \frac{1}{2} - \int_{-\infty}^{x} K_1(x,t)dt = \\ = \int_0^\infty \overset{0}{K}(y)dy - q_1(x)\int_0^\infty \mu_0(2x-y)\overset{0}{K}(y)dy = \\ = \int_0^\infty \overset{0}{K}(y)(1-q_1(x)\mu_0(2x-y))dy \geqslant 0, \quad x\in\mathbb{R}$$

и

$$m^-(\gamma_1) = \int_{-\infty}^{0}(-x)\gamma_1(x)dx \leqslant \\ \leqslant \int_{-\infty}^{0}(-x)\int_0^\infty \overset{0}{K}(y)(1-q_1(x)\mu_0(2x-y))dydx = \\ = \int_0^\infty \overset{0}{K}(y)\int_{-\infty}^{0}(-x)(1-q_1(x)\mu_0(2x-y))dxdy = \\ = \int_0^\infty \overset{0}{K}(y)\int_{-\infty}^{0}(-x)(1-q_1(x))dxdy + \\ + \int_0^\infty \overset{0}{K}(y)\int_{-\infty}^{0}(-x)q_1(x)(1-\mu_0(2x-y))dxdy \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}(-x)(1-q_1(x))dx + \int_0^\infty \overset{0}{K}(y)\int_{-\infty}^{0}(-x)(1-\mu_0(2x-y))dxdy = \\ = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}(-x)(1-q_1(x))dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty \overset{0}{K}(y)\int_{-\infty}^{-y}\Big(\frac{-t-y}{2}\Big)(1-\mu_0(t))dtdy \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}(-x)(1-q_1(x))dx + \frac{1}{4}\int_0^\infty \overset{0}{K}(y)\int_{-\infty}^{0}(-t)(1-\mu_0(t))dtdy = \\ = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}(-x)(1-q_1(x))dx + \frac{1}{8}\int_0^\infty t(1-\mu_0(t))dt < +\infty.$$

Аналогично можно проверить условие (4) и $m^+(\gamma_2) < +\infty$. Теперь проверим выполнение условий (5) и (6). Учитывая i), (80) и k), имеем

$$\int_{r_1}^\infty K_1(x+y,x)dy \geqslant cd_1\int_{r_1}^\infty \overset{0}{K}(y)dy > 0, \quad x\in\mathbb{R},$$

$$\int_{r_2}^{\infty} K_2(x-y,x)dy \geqslant cd_2 \int_{r_2}^{\infty} \overset{0}{K}(-y)dy = cd_2 \int_{r_2}^{\infty} \overset{0}{K}(y)dy > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, $\varepsilon_j > 0$, $j = 1,2$. Из представления ядра K в примере k_2) с учетом (78) и (79) немедленно следует неравенство (9). Итак, для ядра k_2) условие 2) выполнено. Проверим теперь условие 1). В силу четности функций μ_0 и $\overset{0}{K}$ имеем

$$K(x,t) = K(t,x), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)dt = &\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mu_0(x+t)\,\overset{0}{K}(x-t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} (1-\mu_0(x-t))\,\overset{0}{K}(x+t)dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mu_0(2x-y)\,\overset{0}{K}(y)dy + \int_{-\infty}^{\infty} (1-\mu_0(2x-y))\,\overset{0}{K}(y)dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overset{0}{K}(y)dy = 2\int_0^{\infty} \overset{0}{K}(y)dy = 1, \text{ ибо } \int_0^{\infty} \overset{0}{K}(y)dy = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Для примеров k_1), k_3) проверка условий 1) и 2) осуществляется аналогичными рассуждениями.

Следует отметить, что если дополнительно $\lim\limits_{x\to\pm\infty} q_j(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \mu_0(x) = 1$, $j = 1,2$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \lambda(x) = 1$, то условия A) и B) также будут выполнены.

Для полноты изложения приведем также конкретные примеры $\{q_j(x)\}_{j=1,2}$, $\overset{0}{K}$ и μ_0:

$$q_j(x) = 1-(1-d_j)e^{-|x|}, \quad j=1,2, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$q_j(x) = 1 - \frac{1-d_j}{1+|x|^{2+\delta_0}}, \quad \delta_0 > 0, \quad j=1,2, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\overset{0}{K}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{x^2}{4\tau}}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{82}$$

где $\tau > 0$ — числовой параметр;

$$\overset{0}{K}(x) = \int_a^b e^{-|x|s}\mathscr{D}(s)ds, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{83}$$

где $\mathscr{D}(s) > 0$ — непрерывная функция на $[a,b)$, $0 < a < b \leqslant +\infty$, причем

$$2\int_a^b \frac{\mathscr{D}(s)}{s}ds = 1;$$

$$\mu_0(x) = 1-(1-c)e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}; \tag{84}$$

$$\mu_0(x) = 1 - \frac{1-c}{1+x^4}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что ядра, допускающие представления k_1), и k_2) (где $\overset{0}{K}$ задается либо согласно (82), либо посредством (83), а $\mu_0(x)$ имеет структуру (84)), имеют приложения в теории p-адических открыто-замкнутых струн, в математической теории распространения эпидемии и в кинетической теории газов (см. [1–5, 9, 10]).

Перейдем к примерам функции λ:

$$\lambda(x) = 1 - \varepsilon^* e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\lambda(x) = 1 - \Big(\frac{e^{-|x|} + e^{-x^4}}{2}\Big)\varepsilon^*, \quad x \in \mathbb{R},$$

где $\varepsilon^* \in (0,1)$ — числовой параметр.

Теперь приведем примеры нелинейности G_0:

$$G_0(u) = \sqrt[p]{u}, \quad u \in \mathbb{R}^+, \tag{85}$$

где $p \geqslant 2$ — произвольное число;

$$G_0(u) = \gamma(1 - e^{-u}), \quad u \in \mathbb{R}^+, \tag{86}$$

где $\gamma > 1$ — числовой параметр;

$$G_0(u) = \frac{1}{2}(\sqrt[p]{u} + \gamma(1 - e^{-u})), \quad u \in \mathbb{R}^+. \tag{87}$$

Выполнение условий g_1)–g_3) для нелинейности вида (85) очевидно. Ниже убедимся, что при подходящем выборе параметра $\gamma > 1$ нелинейность $G_0(u) = \gamma(1 - e^{-u})$ удовлетворяет условиям g_1)–g_3). Сначала заметим, что $G_0(u) \uparrow$ по u на $\mathbb{R}^+$, ибо $G_0'(u) = \gamma e^{-u} > 0$. С другой стороны, так как $G_0''(u) = -\gamma e^{-u} < 0$, функция $y = G_0(u)$ выпукла вверх на $\mathbb{R}^+$. Докажем теперь, что при $\gamma > 1$ уравнение $G_0(u) = u$ имеет положительное решение η. Рассмотрим функцию $\chi(u) := \gamma(1 - e^{-u}) - u$ на $\mathbb{R}^+$. Имеем $\chi(0) = 0$, $\chi'(u) = \gamma e^{-u} - 1 \geqslant 0$ при $0 \leqslant u \leqslant \ln\gamma$ и $\chi'(u) < 0$ при $u > \ln\gamma$, $\chi(+\infty) = -\infty$. Следовательно, существует единственное положительное решение $\eta > \ln\gamma$ уравнения $G_0(u) = u$.

Проверим также, что уравнение $G_0(u) = 2u$ при $\gamma > 2$ имеет положительное решение ξ, причем $\xi < \eta$. С этой целью здесь рассмотрим функцию $\tilde{\chi}(u) := \gamma(1 - e^{-u}) - 2u$, $u \in \mathbb{R}^+$. Имеем $\tilde{\chi}(0) = 0$, $\tilde{\chi}'(u) = \gamma e^{-u} - 2 \geqslant 0$ при $0 \leqslant u \leqslant \ln(\gamma/2)$ и $\tilde{\chi}'(u) < 0$ при $u > \ln(\gamma/2)$, $\tilde{\chi}(+\infty) = -\infty$. Следовательно, уравнение $G_0(u) = 2u$ также имеет единственное положительное решение ξ. Из выпуклости вверх функции $G_0(u)$ следует, что $G_0(u)/u \downarrow$ по u на $(0, +\infty)$. Учитывая монотонность функции $\frac{G_0(u)}{u}$ и неравенство

$$\frac{G_0(\xi)}{\xi} = 2 > 1 = \frac{G_0(\eta)}{\eta},$$

заключаем, что $0 < \xi < \eta$.

С использованием двойного неравенства

$$\max\{a, b\} \geqslant \frac{a + b}{2} \geqslant \min\{a, b\}, \quad a, b > 0,$$

для примера (87) несложно проверить выполнение условий g_1)–g_3).

Наконец, приведем примеры нелинейности $\omega(t,u)$.

Сперва приведем примеры $\omega(t,u)$ для случая $\mathscr{J}$:

$$\omega(t,u)=(1-e^{-u})\beta(t),\quad u\in\mathbb{R}^+,\tag{88}$$

где $\beta(t)\geqslant 0$, $t\in\mathbb{R}$ и $\beta\in L_1(\mathbb{R})$;

$$\omega(t,u)=\frac{u\beta(t)}{u+1},\quad u\in\mathbb{R}^+,\quad t\in\mathbb{R}.\tag{89}$$

Приведем также примеры $\omega(t,u)$ для случая $\mathscr{L}$:

$$\omega(t,u)=\frac{\beta_0 u}{u+\Gamma(t)},\quad u\in\mathbb{R}^+,\quad t\in\mathbb{R},\tag{90}$$

где $\Gamma(t)>0$, $t\in\mathbb{R}$, $\Gamma\in L_1(\mathbb{R})$ — произвольная функция, а $\beta_0>0$ — число;

$$\omega(t,u)=\left(1-\exp\left(\frac{u}{\rho(t)}\ln p(t)\right)\right)\beta_0,\quad u\in\mathbb{R}^+,\quad t\in\mathbb{R},\tag{91}$$

где функция $\rho(t)$ задается посредством формулы (63), а $p(t)$ — произвольная функция на $\mathbb{R}$ со свойствами

$$0<p(t)<1,\quad t\in\mathbb{R},\quad p\in L_1(\mathbb{R}).$$

Подробно обсудим пример (90). Во-первых, заметим, что

$$\frac{\partial\omega}{\partial u}=\beta_0\frac{\Gamma(t)}{(u+\Gamma(t))^2}>0,\quad u\in\mathbb{R}^+,\quad t\in\mathbb{R}.$$

Следовательно, $\omega(t,u)\uparrow$ по u на $\mathbb{R}^+$. Очевидно, что

$$\omega(t,0)\equiv 0\quad\text{и}\quad\sup_{(t,u)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}\omega(t,u)=\beta_0,$$

причем

$$\beta_0-\omega(t,\rho(t))=\beta_0-\frac{\beta_0\rho(t)}{\rho(t)+\Gamma(t)}=\frac{\beta_0\Gamma(t)}{\rho(t)+\Gamma(t)}.$$

Убедимся, что

$$0<W(t):=\frac{\Gamma(t)}{\rho(t)+\Gamma(t)}\in L_1(\mathbb{R}).$$

Действительно, когда $t\in[\delta_1,\delta_2]$, имеем

$$0<W(t)\leqslant 1,\tag{92}$$

а когда $t\in(-\infty,\delta_1)\cup(\delta_2,+\infty)$, в силу (44) и (63) приходим к неравенству:

$$0<W(t)\leqslant\frac{2}{\eta}\Gamma(t)\in L_1(\mathbb{R}).\tag{93}$$

Принимая во внимание (92) и (93), в силу измеримости W приходим к включению $W \in L_1(\mathbb{R})$. Следовательно, для функции вида (90) условие (62) выполняется.

Теперь заметим, что $\omega(t,u)$ является выпуклой вверх функцией по u на множестве $\mathbb{R}^+$. Действительно, данный факт сразу следует из отрицательности $\partial^2\omega/\partial u^2$ для всех $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} = -\frac{2\beta_0\Gamma(t)}{(u+\Gamma(t))^3} < 0.$$

Проверка соответствующих условий для примеров (88), (89) и (91) осуществляется по аналогии.

В конце работы отметим, что нелинейные интегральные уравнения с ядрами вида k_1) и с нелинейностью вида (85) + (89) встречаются в p-адической математической физике и в кинетической теории газов, а уравнения с ядрами вида k_1), k_2) и с нелинейностью вида (86) + (91) — в математической биологии (см. [1–5, 9, 10]).

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19–11–00223).

Библиографический список

1. Арефьева И. Я. Скатывающиеся решения полевых уравнений на неэкстремальных бранах и в p-адических струнах / *Избранные вопросы p-адической математической физики и анализа*: Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Василия Сергеевича Владимирова / Труды МИАН, Т. 245. М.: Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», 2004. С. 47–54.
2. Владимиров В. С., Волович Я. И. О нелинейном уравнении динамики в теории p-адической струны // *ТМФ*, 2004. Т. 138, № 3. С. 355–368. DOI: https://doi.org/10.4213/tmf36.
3. Коган М. Н. *Динамика разреженного газа. Кинетическая теория*. М.: Наука, 1967. 440 с.
4. Хачатрян А. Х., Хачатрян Х. А. О разрешимости нелинейного модельного уравнения Больцмана в задаче плоской ударной волны // *ТМФ*, 2016. Т. 189, № 2. С. 239–255. EDN: XDLVQP. DOI: https://doi.org/10.4213/tmf9108.
5. Енгибарян Н. Б., Хачатрян А. Х. О точной линеаризации задач скольжения разреженного газа в модели Бхатнагара–Гросса–Крука // *ТМФ*, 2000. Т. 125, № 2. С. 339–342. DOI: https://doi.org/10.4213/tmf673.
6. Енгибарян Н. Б. Об одной задаче нелинейного переноса излучения // *Астрофизика*, 1966. Т. 2, № 1. С. 31–36.
7. Соболев В. В. Проблема Милна для неоднородной атмосферы // *Докл. АН СССР*, 1978. Т. 239, № 3. С. 558–561.
8. Арабаджян Л. Г. Об одном интегральном уравнении теории переноса в неоднородной среде // *Диффер. уравн.*, 1987. Т. 23, № 9. С. 1618–1622.

9. Diekmann O. Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection // *J. Math. Biology*, 1978. vol. 6, no. 2. pp. 109–130. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02450783.
10. Diekmann O., Kaper H. G. On the bounded solutions of a nonlinear convolution equation // *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 1978. vol. 2, no. 6. pp. 721–737. DOI: https://doi.org/10.1016/0362-546X(78)90015-9.
11. Жуковская Л. В. Итерационный метод решения нелинейных интегральных уравнений, описывающих роллинговые решения в теории струн // *ТМФ*, 2006. Т. 146, № 3. С. 402–409. EDN: HTIPKF. DOI: https://doi.org/10.4213/tmf2043.
12. Владимиров В. С. О решениях p-адических струнных уравнений // *ТМФ*, 2011. Т. 167, № 2. С. 163–170. EDN: RLRUSV. DOI: https://doi.org/10.4213/tmf6631.
13. Владимиров В. С. Об уравнении p-адической открытой струны для скалярного поля тахионов // *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005. Т. 69, № 3. С. 55–80. EDN: HSUXVP.
14. Хачатрян Х. А. О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений в теории p-адической струны // *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2018. Т. 82, № 2. С. 172–193. EDN: YSWJOO. DOI: https://doi.org/10.4213/im8580.
15. Хачатрян Х. А. О разрешимости некоторых нелинейных граничных задач для сингулярных интегральных уравнений типа свертки // *Тр. ММО*, 2020. Т. 81, № 1. С. 3–40.
16. Хачатрян Х. А. О разрешимости одной граничной задачи в p-адической теории струн // *Тр. ММО*, 2018. Т. 79, № 1. С. 117–132. EDN: YZHZTV.
17. Арабаджян Л. Г. Решения одного интегрального уравнения типа Гаммерштейна // *Изв. НАН Армении. Математика*, 1997. Т. 32, № 1. С. 21–28.
18. Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A. On solvability of one class of Hammerstein nonlinear integral equations // *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat.*, 2010. no. 2. pp. 67–83.
19. Хачатрян Х. А. Об одном классе интегральных уравнений типа Урысона с сильной нелинейностью // *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012. Т. 76, № 1. С. 173–200. EDN: RDNIDP. DOI: https://doi.org/10.4213/im5402.
20. Хачатрян Х. А., Петросян А. С. О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна–Стилтьеса на всей прямой / *Дифференциальные уравнения и динамические системы*: Сборник статей / Труды МИАН, Т. 308. М.: МИАН, 2020. С. 253–264. EDN: WEJLIY. DOI: https://doi.org/10.4213/tm4051.
21. Хачатрян Х. А., Петросян А. С. Однопараметрические семейства положительных решений для некоторых классов нелинейных интегральных уравнений типа свертки // *Сиб. журн. чист. и прикл. матем.*, 2017. Т. 17, № 1. С. 91–108. EDN: YNEGZR. DOI: https://doi.org/10.17377/PAM.2017.17.108.
22. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука, 1981. 542 с.
23. Хачатрян А. Х., Хачатрян Х. А., Петросян А. С. Асимптотическое поведение решения для одного класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в задаче распределения дохода // *Тр. ИММ УрО РАН*, 2021. Т. 27, № 1. С. 188–206. EDN: GOJJTE. DOI: https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-1-188-206.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 3, pp. 446–479
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1932

MSC: 45G05

Problems of the existence and uniqueness of the solution of a class of nonlinear integral equations on the whole line

***Kh. A. Khachatryan*[1,3], *H. S. Petrosyan*[2,3]**

[1] Yerevan State University,
1, A. Manukyan str., Yerevan, 0025, Armenia.
[2] Armenian National Agrarian University,
74, Marshal Teryan str., Yerevan, 0009, Armenia.
[3] Lomonosov Moscow State University,
1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation.

Abstract

We consider a class of nonlinear integral equations with a stochastic and symmetric kernel on the whole line. With certain particular representations of the kernel and nonlinearity, equations of the mentioned type arise in many branches of mathematical natural science. In particular, such equations occur in the theory p-adic strings, in the kinetic theory of gases, in mathematical biology and in the theory of radiative transfer. Constructive existence theorems are proved for non-negative non-trivial and bounded solutions under various restrictions on the function describing the nonlinearity in the equation. Under additional restrictions on the kernel and on the nonlinearity, a uniqueness theorem is also proved in a certain class of bounded and non-negative functions that have a finite limit in $\pm\infty$. At the end, specific applied examples of the kernel and non-linearity are given that satisfy to all restrictions of the proven statements.

Keywords: monotonicity, successive approximations, convergence, bounded solution, solution limit, Caratheodory condition.

Received: 26$^{\text{th}}$ May, 2022 / Revised: 8$^{\text{th}}$ August, 2022 /
Accepted: 11$^{\text{th}}$ August, 2022 / First online: 5$^{\text{th}}$ September, 2022

Differential Equations and Mathematical Physics
Research Article

Please cite this article in press as:
Khachatryan Kh. A., Petrosyan H. S. Problems of the existence and uniqueness of the solution of a class of nonlinear integral equations on the whole line, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 3, pp. 446–479. EDN: NIORFC. DOI: 10.14498/vsgtu1932 (In Russian).

Authors' Details:

Khachatur A. Khachatryan https://orcid.org/0000-0002-4835-943X
D.Sc. (Phys. & Math. Sci.), Professor; Head of the Dept.; Dept. of Theory of Functions and Differential Equations[1]; Leading Member of the grant of the Russian Science Foundation (project no. 19–11–00223)[3]; e-mail: khachatur.khachatryan@ysu.am

Haykanush S. Petrosyan https://orcid.org/0000-0002-7172-4730
Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Dept of Higher Mathematics and Physics[2]; Member of the grant of the Russian Science Foundation (project no. 19–11–00223)[3];
e-mail: haykuhi25@mail.ru

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' Responsibilities. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19–11–00223).

References

1. Aref'eva I. Ya. Rolling tachyon on non-BPS branes and p-adic strings, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2004, vol. 245, pp. 40–47.
2. Vladimirov V. S., Volovich Ya. I. Nonlinear dynamics equation in p-adic string theory, *Theoret. and Math. Phys.*, 2004, vol. 138, no. 3, pp. 297–309. DOI: https://doi.org/10.1023/B:TAMP.0000018447.02723.29.
3. Kogan M. N. *Rarefied Gas Dynamics*. New York, Springer Science, 1969, xi+515 pp.
4. Khachatryan A. K., Khachatryan K. A. Solvability of a nonlinear model Boltzmann equation in the problem of a plane shock wave, *Theoret. and Math. Phys.*, 2016, vol. 189, no. 2, pp. 1609–1623. EDN: XMNGQJ. DOI: https://doi.org/10.1134/S0040577916110064.
5. Engibaryan N. B., Khachatryan A. Kh. Exact linearization of the sliding problem for a dilute gas in the Bhatnagar–Gross–Krook model, *Theoret. and Math. Phys.*, 2000, vol. 125, no. 2, pp. 1589–1592. EDN: XKTKIJ. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02551017.
6. Engibaryan N. B. A nonlinear problem of radiative transfer, *Astrophysics*, 1966, vol. 2, no. 1, pp. 12–14. EDN: XMNFBB. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01041941.
7. Sobolev V. V. The Milne problem for an inhomogeneous atmosphere, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1978, vol. 239, no. 3, pp. 558–561 (In Russian).
8. Arabadzhyan L. G. On an integral equation of transport theory in an inhomogeneous medium, *Differ. Uravn.*, 1987, vol. 23, no. 9, pp. 1618–1622 (In Russian).
9. Diekmann O. Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection, *J. Math. Biology*, 1978, vol. 6, no. 2, pp. 109–130. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02450783.
10. Diekmann O., Kaper H. G. On the bounded solutions of a nonlinear convolution equation, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 1978, vol. 2, no. 6, pp. 721–737. DOI: https://doi.org/10.1016/0362-546X(78)90015-9.
11. Joukovskaya L. V. Iterative method for solving nonlinear integral equations describing rolling solutions in string theory, *Theoret. and Math. Phys.*, 2006, vol. 146, no. 3, pp. 335–342. EDN: LKBTTT. DOI: https://doi.org/10.1007/s11232-006-0043-3.
12. Vladimirov V. S. Solutions of p-adic string equations, *Theoret. and Math. Phys.*, 2011, vol. 167, no. 2, pp. 539–546. EDN: OIBKZL. DOI: https://doi.org/10.1007/s11232-011-0040-z.
13. Vladimirov V. S. The equation of the p-adic open string for the scalar tachyon field, *Izv. Math.*, 2005, vol. 69, no. 3, pp. 487–512. EDN: LIWGVV. DOI: https://doi.org/10.1070/IM2005v069n03ABEH000536.
14. Khachatryan Kh. A. On the solubility of certain classes of non-linear integral equations in p-adic string theory, *Izv. Math.*, 2018, vol. 82, no. 2, pp. 407–427. EDN: YCIQJV. DOI: https://doi.org/10.1070/IM8580.
15. Khachatryan Kh. A. Solvability of some nonlinear boundary value problems for singular integral equations of convolution type, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2020, vol. 81, no. 1, pp. 1–31. EDN: TTYLNH. DOI: https://doi.org/10.1090/mosc/306.
16. Khachatryan Kh. A. On the solvability of a boundary value problem in p-adic string theory, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2018, pp. 101–115. EDN: DNYZMK. DOI: https://doi.org/10.1090/mosc/281.
17. Arabadzhyan L. G. Solutions of certain integral equations of the Hammerstein type, *J. Contemp. Math. Anal.*, 1997, vol. 32, no. 1, pp. 17–24.

18. Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A. On solvability of one class of Hammerstein nonlinear integral equations, *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat.*, 2010, no. 2, pp. 67–83.
19. Khachatryan Kh. A. On a class of integral equations of Urysohn type with strong nonlinearity, *Izv. Math.*, 2012, vol. 76, no. 1, pp. 163–189. EDN: PGUBLV. DOI: https://doi.org/10.1070/IM2012v076n01ABEH002579.
20. Khachatryan K. A., Petrosyan H. S. On the solvability of a class of nonlinear Hammerstein—Stieltjes integral equations on the whole line, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2020, vol. 308, pp. 238–249. EDN: TXFHWH. DOI: https://doi.org/10.1134/S0081543820010198.
21. Khachatryan Kh. A., Petrosyan H. S. One parameter families of positive solution of some classes of convolution type nonlinear integral equations, *J. Math. Sci.*, 2018, vol. 231, no. 2, pp. 153–167. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-018-3812-2.
22. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis]. Moscow, Nauka, 1981, 542 pp. (In Russian)
23. Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A., Petrosyan H. S. Asymptotic behavior of a solution for one class of nonlinear integro-differential equations in the income distribution problem, *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 188–206 (In Russian).