



УДК 517.958:531.332

## Характеристическая задача Коши стандартного вида для описания истечения политропного газа в вакуум с косо́й стенки

*Е. И. Понькин*Снежинский физико-технический институт НИЯУ МИФИ,  
Россия, 456776, Снежинск, Комсомольская ул., 8.

### Аннотация

Начально-краевая задача для системы уравнений газовой динамики, решение которой описывает разлет политропного газа в вакуум с косо́й стенки в пространстве автомодельных переменных  $x/t$ ,  $y/t$  в общем несогласованном случае, приведена к характеристической задаче Коши стандартного вида в пространстве новых независимых переменных  $\vartheta$ ,  $\zeta$ . Уравнение  $\vartheta = 0$  задает характеристическую поверхность, через которую двойная волна примыкает к известному решению — центрированной волне Римана. Уравнение  $\zeta = 0$  означает, что за новую координатную ось выбирается косо́я стенка, на которой выполняется условие непротекания. Для этой новой начально-краевой задачи в отличие от известного решения аналогичной задачи, полученного С. П. Баутиным и С. Л. Дерябиным в пространстве специальных переменных, доказана теорема существования и единственности решения системы уравнений газовой динамики в пространстве физических автомодельных переменных в виде сходящегося бесконечного ряда. Описан алгоритм построения коэффициентов ряда.

**Ключевые слова:** характеристическая задача Коши стандартного вида, аналог теоремы Ковалевской, характеристическая поверхность, косо́я стенка, алгоритм построения коэффициентов ряда.

Получение: 26 апреля 2022 г. / Исправление: 28 мая 2022 г. /

Принятие: 7 июня 2022 г. / Публикация онлайн: 30 июня 2022 г.

---

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ  
Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

### Образец для цитирования

Понькин Е. И. Характеристическая задача Коши стандартного вида для описания истечения политропного газа в вакуум с косо́й стенки // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 2. С. 322–338. EDN: QYHKRK. DOI: [10.14498/vsgtu1922](https://doi.org/10.14498/vsgtu1922).

### Сведения об авторе

*Евгений Игоревич Понькин*  <https://orcid.org/0000-0002-7848-3167>аспирант; e-mail: [epnk@rambler.ru](mailto:epnk@rambler.ru)

**Введение.** В настоящее время в мире проводятся интенсивные исследования в области лазерного управляемого термоядерного синтеза (ЛТС). Перспективность данного научного направления связана с тем, что при успешной реализации ЛТС человечество получает неисчерпаемый источник относительно дешевой энергии. В отличие от зарядов, где зажигание термоядерных реакций осуществляется ядерным взрывом, в ЛТС инициация «горения» легких ядер реализуется за счет воздействия лазерного излучения на ДТ-мишень. Математическое описание подобных экспериментов привело к возникновению целого направления, объединяющего класс задач, описывающих сжатие мишеней или истечение газа в вакуум [1–4].

Еще в 50-е годы прошлого века стало понятно, что вложение энергии в мишень необходимо осуществлять безударным способом без образования ударной волны (сильного разрыва), что дает существенный энергетический выигрыш. Данную схему пытаются реализовать в экспериментах по ЛТС. Для получения безударной волны сжатия, которая будет сжимать газ до бесконечной плотности, разрабатывают специальные мишени [5, 6], которые имеют сферически или цилиндрически симметричную геометрию. Это связано с тем, что наибольшее количество результатов в области построения аналитических решений было получено для одномерных течений (плоско-, цилиндрически-, сферически симметричные мишени).

Для построения аналитических решений двумерных течений используемый математический аппарат приводил к сложного вида дифференциальным уравнениям, что давало возможность построить только частные решения рассматриваемых уравнений. Так, в 1963 году В. А. Сучков опубликовал работу «Истечение в вакуум на косой стенке» [7]. В ней получено частное точное решение системы уравнений газовой динамики (СУГД), описывающее двумерное течение газа — двойная волна (ДВ) — при выполнении конкретного соотношения между показателем политропы  $\gamma$  газа и тангенсом угла  $\alpha$  наклона косой стенки:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\gamma + 1}{3 - \gamma}. \quad (1)$$

Метод решения задачи состоял в том, что СУГД сводилась к одному дифференциальному уравнению для функции потенциала  $\Phi = \Phi(t, x, y)$ , где  $u = \Phi_x$ ,  $v = \Phi_y$ ;  $u$ ,  $v$  — компоненты вектора скорости газа  $\mathbf{V}$  в прямоугольной системе координат. Затем с помощью преобразования Лежандра осуществлялся переход к уравнению для функции  $\Psi = \Psi(u, v)$ , для которой и строилось одно конкретное частное решение. Полученное таким образом решение  $\Psi = \Psi(u, v)$  и связанная с ним функция  $c = c(u, v)$  — скорость звука газа — определялись в пространстве годографа, то есть в пространстве независимых переменных  $u$ ,  $v$ . Для нахождения значений газодинамических параметров  $u$ ,  $v$ ,  $c$  в пространстве физических переменных  $t$ ,  $x$ ,  $y$  необходимо выполнять обратное преобразование Лежандра, которое в общем случае выполнить в явном виде затруднительно.

Связь между задачами сжатия конкретных мишеней и соответствующего истечения газа в вакуум была показана в работе А. Ф. Сидорова [8]. Так, двумерное истечение газа в вакуум с косой стенки в работе [8] было интерпретировано для описания сильного сжатия газа, заполняющего специальный призматический объем, и была установлена принципиально большая степень

кумуляции газа, чем при неограниченном сжатии плоских, цилиндрических и сферических объемов газа.

С. П. Баутиным и С. Л. Дерябиным [9, с. 196–214] в пространстве специальных независимых переменных рассмотрена задача об истечении газа в вакуум при произвольном значении угла  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \pi/2$ ) — наклона косо́й стенки, не связанном со значением  $\gamma$ . Доказано существование и единственность локально-аналитических решений соответствующих начально-краевых задач. В случае общих течений связь задач об истечении газа в вакуум и задач о неограниченном сжатии газа в конечный момент времени установлена С. П. Баутиным [3].

В настоящей работе исходная начально-краевая задача для системы уравнений газовой динамики, решение которой описывает истечение политропного газа в вакуум с косо́й стенки в пространстве физических автомодельных переменных  $x/t$ ,  $y/t$  для несогласованного случая, т. е. когда не выполняется равенство (1), сводится в результате двух невырожденных замен к характеристической задаче Коши стандартного вида (ХЗК). Для этой новой начально-краевой задачи доказана теорема существования и единственности решения СУГД в виде сходящихся бесконечных рядов. Описан алгоритм построения коэффициентов ряда.

Необходимо отметить следующий момент. В работе [9] решалась точно такая же задача, что и в данной работе, только решение строилось для функции  $\Psi$  в пространстве годографа. То есть рассматривалось одно уравнение, а не вся СУГД, и для этого уравнения задача сводилась к ранее доказанной теореме существования и единственности решения. Выполнить переход от функции  $\Psi$  в пространстве годографа  $u$ ,  $v$  к значениям функций  $s$ ,  $u$  и  $v$  в пространстве физических автомодельных переменных  $x/t$ ,  $y/t$  в аналитическом виде не представляется возможным. При этом проверить отличие от нуля якобиана преобразования независимых переменных из пространства годографа в пространство физических переменных затруднительно, так как решение  $\Psi(u, v)$  в явном виде в работе [9] не построено. Следовательно, для рассматриваемой задачи теорема существования и единственности решения СУГД в пространстве физических автомодельных переменных не доказана.

Положительный опыт построения аналитических решений СУГД [10, 11] как решения характеристической задачи Коши стандартного вида без сведения СУГД к одному ДУ для функции потенциала дает надежду на получение новых аналитических результатов для задачи истечения газа в вакуум на косо́й стенке. Ценность полученного результата заключается также в том, что он переносится на случай сжатия призматического объема газа в несогласованном случае [12].

**1. Постановка задачи об истечении газа в вакуум с косо́й стенкой.** Пусть в момент времени  $t = 0$  политропный газ со скоростью звука  $c$ , равной единице, покоится в клиновидной области плоскости  $xOy$ , затемненной на рис. 1, а и ограниченной двумя прямыми непроницаемыми стенками: вертикальная стенка  $x = 0$  (при  $y \geq 0$ ), и косо́я стенка  $y = x \operatorname{tg} \alpha$ .

В момент времени  $t = 0$  вертикальная стенка  $x = 0$  мгновенно убирается, после чего начинается истечение газа в вакуум (помечено цифрой 3 на рис. 1) вдоль косо́й стенки  $y = x \operatorname{tg} \alpha$ .

На рис. 1, б приведена конфигурация течения, имеющего место при исте-

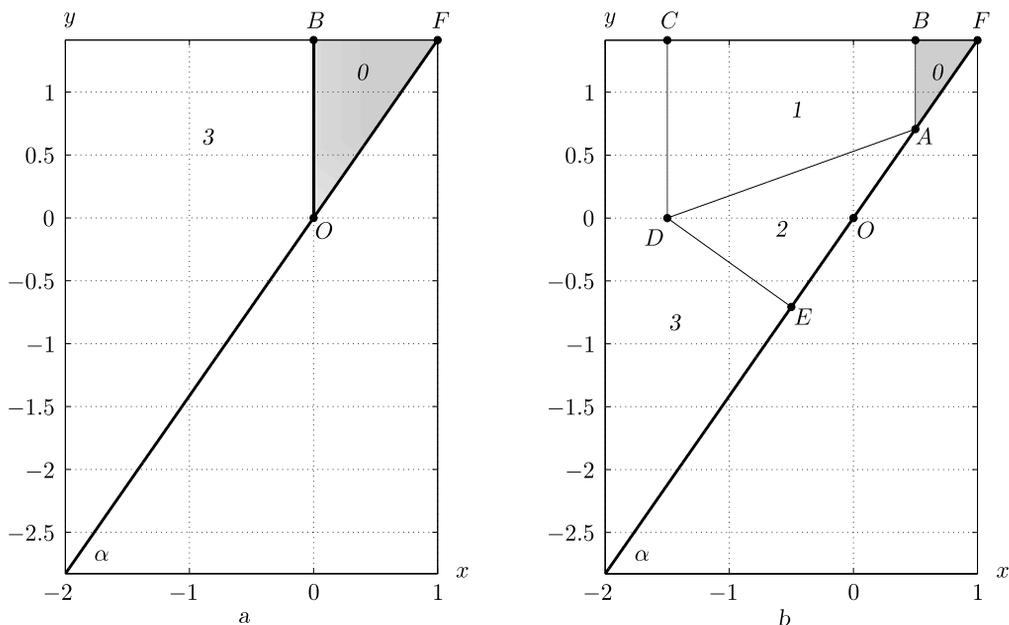


Рис. 1. Начальная конфигурация в момент  $t = 0$  (a) и конфигурация потока в момент  $t > 0$  (b):  $0$  — область, в которой находится покоящийся газ;  $1$  — область течения в виде централизованной волны;  $2$  — область течения в виде ДВ;  $3$  — область вакуума

[Figure 1. (a) Initial configuration ( $t = 0$ ); (b) the flow configuration at  $t > 0$ : quiescent gas region ( $0$ ), the flow region in the form of a centered wave ( $1$ ), the flow region in the form of a double wave ( $2$ ), and the vacuum region ( $3$ )

чения газа в вакуум вдоль косой стенки в момент времени  $t > 0$ . В области, помеченной цифрой  $0$ , находится покоящийся однородный газ. Этот покоящийся газ отделен звуковой характеристикой — вертикальной прямой [13]

$$AB : x = t$$

от области известного течения, то есть от области централизованной волны (ЦВ) Римана, задаваемой следующими формулами [13]:

$$c = \frac{(\gamma - 1)x}{(\gamma + 1)t} + \frac{2}{(\gamma + 1)}, \quad u = \frac{2}{(\gamma + 1)} \frac{x}{t} - \frac{2}{(\gamma + 1)}, \quad v = 0.$$

Течение ЦВ расположено в области, помеченной цифрой  $1$  (см. рис. 1, b). С другой стороны ЦВ примыкает к вакууму через свободную границу, являющуюся вертикальной прямой  $CD$  и распространяющуюся в вакуум по закону [13]

$$CD : x = -\frac{2}{\gamma - 1}t.$$

В области, помеченной цифрой  $2$  (см. рис. 1, b), находится ДВ — искомое двумерное течение. Это течение отделено от ЦВ звуковой характеристикой  $AD$ , которая в общем случае известна в пространстве годографа [3, 9]. В согласованном случае [7] звуковая характеристика  $AD$  является прямой в плоскости переменных  $(t, x)$ . Область ДВ примыкает к вакууму через свободную

границу, обозначенную на рис. 1,  $b$  как линия  $DE$ . Эта свободная граница в согласованном случае (когда выполняется соотношение (1)) есть прямая в плоскости переменных  $(t, x)$ , перпендикулярная непроницаемой стенке  $AE$ . Поскольку стенка  $AE$  является непроницаемой, вектор скорости газа направлен вдоль нее, и поэтому на этой стенке выполняется соотношение (условие непротекания):

$$v|_{AE} = u \operatorname{tg} \alpha|_{AE}.$$

В рассматриваемой задаче требуется найти звуковую характеристику  $AD$  и параметры течения газа ДВ.

**2. Начально-краевая задача для СУГД, описывающей истечение газа с косо́й стенки в переменных  $\xi = x/t, \eta = y/t$ .** Исходная начально-краевая задача для СУГД, описывающей истечение газа в вакуум с косо́й стенки, в физических автомодельных переменных  $\xi = x/t, \eta = y/t$  для вектора  $\mathbf{U} = (c, u, v)^\top$  имеет вид [12]:

$$\begin{cases} A\mathbf{U}_\xi + B\mathbf{U}_\eta = \mathbf{0}, \\ \mathbf{U}|_{C^+} = \mathbf{U}_0, \\ v|_{y=x \operatorname{tg} \alpha} = u \operatorname{tg} \alpha|_{y=x \operatorname{tg} \alpha}. \end{cases} \quad (2)$$

Матрицы  $A$  и  $B$  задачи (2) следующие:

$$A = \begin{pmatrix} u - \xi & \varkappa c & 0 \\ c/\varkappa & u - \xi & 0 \\ 0 & 0 & u - \xi \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} v - \eta & 0 & \varkappa c \\ 0 & v - \eta & 0 \\ c/\varkappa & 0 & v - \eta \end{pmatrix}.$$

Здесь неизвестная звуковая характеристика  $C^+$  задается функцией  $f(\xi)$ . Для упрощения записи введено обозначение  $\varkappa = (\gamma - 1)/2$ . Входные данные (начальные и граничные условия, коэффициенты матриц  $A$  и  $B$ ) задачи (2) предполагаются аналитическими функциями.

**3. Первая замена переменных.** Для сведения задачи (2) к ХЗК стандартного вида делается первая замена переменных

$$\begin{cases} \vartheta = \eta - f(\xi), \\ \xi' = \xi, \end{cases} \quad (3)$$

где линия  $\vartheta = 0$ , то есть линия  $\eta = f(\xi)$ , задает звуковую характеристику  $C^+$ . Якобиан  $J$  замены (3) равен единице:

$$J = \begin{vmatrix} \vartheta_\eta & \vartheta_\xi \\ \xi'_\eta & \xi'_\xi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -f' \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 \cdot f' = 1.$$

При выполнении условия  $|f'| < \infty$  замена (3) невырожденная. При введенной замене производные в (2) заменяются по следующим формулам:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi'} - f'(\xi') \frac{\partial}{\partial \vartheta}.$$

В результате исходная начально-краевая задача (2) будет иметь вид

$$\begin{cases} [B - f'(\xi)A]U_{\vartheta} + AU_{\xi} = 0, \\ \mathbf{U}|_{\vartheta=0} = \mathbf{U}_0, \\ v|_{y=x \operatorname{tg} \alpha} = u \operatorname{tg} \alpha|_{y=x \operatorname{tg} \alpha}. \end{cases} \quad (4)$$

При этом вид матрицы  $[B - f'(\xi)A]$  следующий:

$$[B - f'(\xi)A] = \begin{pmatrix} v - \vartheta - f - f'(u - \xi) & -\varkappa c f' & \varkappa c \\ -\frac{c}{\varkappa} f' & v - \vartheta - f - f'(u - \xi) & 0 \\ \frac{c}{\varkappa} & 0 & v - \vartheta - f - f'(u - \xi) \end{pmatrix}.$$

**4. Нахождение звуковой характеристики  $f(\xi)$ .** После приравнивания к нулю определителя матрицы

$$\det[B - f'(\xi)A]|_{\substack{U=U_0 \\ \vartheta=0}} \equiv 0$$

функция  $f(\xi)$  определяется в явном виде. Найдем определитель матрицы  $[B - f'(\xi)A]$  при  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$ ,  $\vartheta = 0$ :

$$\begin{aligned} \det[B - f'(\xi)A]|_{\substack{U=U_0 \\ \vartheta=0}} &= \begin{vmatrix} c_0 f' - f & -\varkappa c_0 f' & \varkappa c_0 \\ -\frac{c_0}{\varkappa} f' & c_0 f' - f & 0 \\ \frac{c_0}{\varkappa} & 0 & c_0 f' - f \end{vmatrix} = \\ &= (c_0 f' - f)[(c_0 f' - f)^2 - c_0^2 f'^2 - c_0^2]. \end{aligned}$$

Здесь  $c_0 = (\varkappa \xi + 1)/(\varkappa + 1)$ .

Определитель матрицы  $[B - f'(\xi)A]$  тождественно равен нулю, если удовлетворяется одно из уравнений:

$$c_0 f' - f = 0, \quad (c_0 f' - f)^2 - c_0^2 f'^2 - c_0^2 = 0.$$

Найдем неизвестную звуковую характеристику  $C^+$  как решение нелинейного дифференциального уравнения:

$$(c_0 f' - f)^2 - c_0^2 f'^2 - c_0^2 = 0. \quad (5)$$

После раскрытия скобок в уравнении (5) и приведения подобных слагаемых получим следующее уравнение:

$$f^2 - 2c_0 f f' - c_0^2 = 0. \quad (6)$$

Справедливо соотношение  $2f f' = (f^2)'$ , тогда (6) после замены  $f^2 = y$  преобразуется к виду

$$c_0 y' - y + c_0^2 = 0. \quad (7)$$

Получим решение (7) методом вариации постоянной. Вначале построим решение однородного уравнения

$$c_0 y' - y = 0, \quad \text{или} \quad \frac{dy}{y} = \frac{(\varkappa + 1)d\xi}{\varkappa\xi + 1}.$$

Решением последнего уравнения будет выражение

$$y(\xi) = C_1 [c_0(\xi)]^{(\varkappa+1)/\varkappa}, \quad (8)$$

где  $C_1 = \text{const}$ .

Получим решение неоднородного уравнения (7), полагая константу  $C_1$  неотрицательной функцией независимой переменной  $\xi$ , то есть  $C_1 = C_1(\xi)$ . Подставляя выражение для  $y(\xi) = C_1(\xi)[c_0(\xi)]^{(\varkappa+1)/\varkappa}$  в исходное уравнение (7), получим

$$c_0 C_1' c_0^{1+1/\varkappa} + c_0 C_1 \frac{\varkappa + 1}{\varkappa} c_0^{1/\varkappa} c_0' - C_1 c_0^{(\varkappa+1)/\varkappa} + c_0^2 = 0.$$

С учетом  $c_0' = \varkappa/(\varkappa + 1)$  второе и третье слагаемые в уравнении сокращаются. После сокращения оставшихся слагаемых на  $c_0^2$  окончательно получим дифференциальное уравнение для функции  $C_1$ :

$$C_1' = -c_0^{-1/\varkappa}. \quad (9)$$

При  $\varkappa = 1$  ( $\gamma = 3$ ) решением (9) будет выражение

$$C_1(\xi) = -2 \ln(\xi + 1) + C_2. \quad (10)$$

Подставим выражение (10) в (8), с учетом замены  $y = f^2(\xi)$  получим выражение для характеристики:

$$f(\xi) = \pm c_0 \sqrt{C_2 - 2 \ln(\xi + 1)}.$$

Для функции  $f(\xi)$  область определения  $-1 < \xi < 1$ :

- при  $\xi = -1$  скорость звука на характеристике  $AD$  принимает значение  $c_0(-1) = 0$ , что задает границу газа с вакуумом;
- при  $\xi = 1$  скорость звука на характеристике  $AD$  принимает значение  $c_0(1) = 1$ , что задает границу газа с покоем.

Из данных условий определим константу интегрирования  $C_2$ .

В результате получим окончательное выражение для характеристики при  $\varkappa = 1$  ( $\gamma = 3$ ):

$$f(\xi) = \pm c_0 \sqrt{\text{tg}^2 \alpha - 2 \ln c_0}. \quad (11)$$

Здесь  $c_0 = (\xi + 1)/2$ . В рассматриваемом диапазоне изменения  $\xi$  подкоренное выражение в (11) всегда положительно.

Рассмотрим случай, когда  $\varkappa \neq 1$  ( $\gamma \neq 3$ ). Тогда уравнение (9) имеет вид

$$\frac{dC_1}{d\xi} = -\frac{1}{c_0^{1/\varkappa}} = -\frac{1}{\left(\frac{\varkappa\xi+1}{\varkappa+1}\right)^{1/\varkappa}}.$$

В результате интегрирования дифференциального уравнения получим

$$C_1(\xi) = \beta \left( \frac{\varkappa \xi + 1}{\varkappa + 1} \right)^{1-1/\varkappa} + C_2, \quad (12)$$

где  $\beta = (\varkappa + 1)/(1 - \varkappa)$ .

Подставим выражение (12) в (8), с учетом замены  $y = f^2(\xi)$  получим выражение для характеристики:

$$f(\xi) = \pm \sqrt{C_2 \left( \frac{\varkappa \xi + 1}{\varkappa + 1} \right)^{(\varkappa+1)/\varkappa} + \beta \left( \frac{\varkappa \xi + 1}{\varkappa + 1} \right)^2} = \pm c_0 \sqrt{\beta + c_0^{(1-\varkappa)/\varkappa} C_2}. \quad (13)$$

Здесь  $c_0 = (\varkappa \xi + 1)/(\varkappa + 1)$ . При этом  $c_0(0) > 0$ , т. е. функции  $c_0$  и  $c_0^{-1}$  являются аналитическими в некоторой окрестности точки  $\xi = 0$ .

Константу  $C_2$  в (13) определим из условий на границе с вакуумом  $c_0(-1/\varkappa) = 0$  и покоем  $c_0(1) = 1$ . Окончательное выражение для звуковой характеристики при  $\varkappa \neq 1$  ( $\gamma \neq 3$ ):

$$f(\xi) = \pm c_0 \sqrt{\beta + c_0^{(1-\varkappa)/\varkappa} (\text{tg}^2 \alpha - \beta)}. \quad (14)$$

Функции (11) и (14) также являются аналитическими в некоторой окрестности точки  $\xi = 0$ .

**5. Вторая замена переменных.** Далее делается новая замена переменных. Вместо переменных  $\vartheta$  и  $\xi$  по формулам

$$\begin{cases} \vartheta' = \vartheta, \\ \zeta = \vartheta + f(\xi) - \xi \text{tg} \alpha \end{cases} \quad (15)$$

берутся новые независимые переменные  $\vartheta'$  и  $\zeta$ .

Уравнение косой стенки  $y = x \text{tg} \alpha$ , или  $y/t = (x/t) \text{tg} \alpha$ , отсюда  $\eta = \xi \text{tg} \alpha$ . С учетом замен (3) и (15) эта прямая в переменных  $\zeta$  и  $\vartheta$  имеет вид  $\zeta = 0$ , то есть при замене (15) косая стенка берется за новую координатную ось.

Якобиан последней замены переменных (15) следующий:

$$J_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} & \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \vartheta'}{\partial \vartheta} & \frac{\partial \vartheta'}{\partial \xi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & f'(\xi) - \text{tg} \alpha \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \text{tg} \alpha - f'(\xi).$$

Чтобы замена (15) была невырожденной, необходимо выполнение следующего неравенства:

$$J_2 = \text{tg} \alpha - f'(\xi) \neq 0, \quad (16)$$

то есть наклон косой стенки не равен наклону звуковой характеристики, разделяющей ЦВ и ДВ.

Производную функции  $f(\xi)$  можно выразить из уравнения (5):

$$f'(\xi) = \frac{1}{2} \left( \frac{f}{c_0} - \frac{c_0}{f} \right). \quad (17)$$

Докажем неравенство (16) методом от противного. Пусть  $\operatorname{tg} \alpha - f'(\xi) = 0$ , тогда с учетом (17) получим

$$\frac{f^2 - 2c_0 \operatorname{tg} \alpha f - c_0^2}{c_0 f} = 0. \quad (18)$$

Знаменатель дроби (18) не равен нулю, отсюда получим квадратное уравнение для функции  $f(\xi)$ :

$$f^2 - 2c_0 \operatorname{tg} \alpha f - c_0^2 = 0. \quad (19)$$

Решением (19) будет выражение для функции  $f(\xi)$ :

$$f(\xi) = c_0(\operatorname{tg} \alpha \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}).$$

Видно, что выражение для функции  $f(\xi)$  не совпадает с полученным ранее (14) и (11), следовательно, неравенство (16) выполняется, что и требовалось доказать.

Из соотношения

$$\zeta - \vartheta = f(\xi) - \xi \operatorname{tg} \alpha, \quad (20)$$

неявно задающего с учетом неравенства (16) функцию  $\xi$  от  $(\zeta - \vartheta)$ , однозначно определяется равенство

$$\xi = \varphi(\zeta - \vartheta). \quad (21)$$

Однако дальше для простоты записи будем сохранять обозначения  $f(\xi)$ ,  $f'(\xi)$ ,  $c_0(\xi)$ , естественно, подразумевая наличие связи (21).

При второй замене производные заменяются по следующим формулам:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} = \frac{\partial}{\partial \vartheta'} + \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} = [f'(\xi) - \operatorname{tg} \alpha] \frac{\partial}{\partial \zeta}.$$

В результате система уравнений с частными производными задачи (4) будет иметь следующий вид:

$$[B - f'(\xi)A][\mathbf{U}_\vartheta + \mathbf{U}_\zeta] + [f'(\xi) - \operatorname{tg} \alpha]A\mathbf{U}_\zeta = 0,$$

где штрих у переменной  $\vartheta'$  опущен. Отсюда начально-краевая задача (4) будет иметь вид

$$\begin{cases} [B - f'(\xi)A]\mathbf{U}_\vartheta + [B - \operatorname{tg} \alpha A]\mathbf{U}_\zeta = 0, \\ \mathbf{U}|_{\vartheta=0} = \mathbf{U}_0, \\ v|_{\zeta=0} = u \operatorname{tg} \alpha|_{\zeta=0}. \end{cases} \quad (22)$$

При этом вид матрицы  $[B - \operatorname{tg} \alpha A]$  следующий:

$$[B - \operatorname{tg} \alpha A] = \begin{pmatrix} v - \vartheta - f - \operatorname{tg} \alpha(u - \xi) & -\varkappa c \operatorname{tg} \alpha & \varkappa c \\ -\frac{c}{\varkappa} \operatorname{tg} \alpha & v - \vartheta - f - \operatorname{tg} \alpha(u - \xi) & 0 \\ \frac{c}{\varkappa} & 0 & v - \vartheta - f - \operatorname{tg} \alpha(u - \xi) \end{pmatrix}.$$

**6. Приведение начально-краевой задачи к ХЗК стандартного вида.** Приведем начально-краевую задачу (22) к ХЗК стандартного вида. Для этого построим две невырожденные матрицы, элементы которых есть функции независимой переменной  $\xi$ :

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ c_0 f' - f & \varkappa c_0 f' & -\varkappa c_0 \end{pmatrix}, \quad T_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ f' & (c_0 f' - c_0)/\varkappa c_0 & -1/\varkappa c_0 \end{pmatrix},$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_0 f' - f \\ 0 & 1 & c_0 f'/\varkappa \\ 0 & 0 & -c_0/\varkappa \end{pmatrix}, \quad T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \varkappa(c_0 f' - f)/c_0 \\ 0 & 1 & f' \\ 0 & 0 & -\varkappa/c_0 \end{pmatrix}.$$

СУГД из задачи (22) слева умножается на матрицу  $T_1$ , а вектор  $\mathbf{U}$  заменяется новым вектором  $\mathbf{W}$ , который определяется следующим образом:

$$\mathbf{W} = T_2^{-1} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c + v \frac{\varkappa}{c_0} (c_0 f' - f) \\ u + v f' \\ -\frac{\varkappa}{c_0} v \end{pmatrix}.$$

Эти преобразования невырожденные. Для вектора  $\mathbf{W}$  записывается начально-краевая задача — задача (22), приведенная к ХЗК стандартного вида:

$$\begin{cases} T_1[B - f'(\xi)A]T_2 \mathbf{W}_\vartheta + T_1[B - \operatorname{tg} \alpha A]T_2 \mathbf{W}_\zeta + \\ \quad + T_1[B - \operatorname{tg} \alpha A] \frac{\partial T_2}{\partial \xi} \frac{\mathbf{W}}{f' - \operatorname{tg} \alpha} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{W}|_{\vartheta=0} = \mathbf{W}_0, \\ v|_{\zeta=0} = u \operatorname{tg} \alpha|_{\zeta=0}. \end{cases} \quad (23)$$

Входные данные задачи (23) являются аналитическими функциями в некоторой окрестности точки ( $\vartheta = 0, \zeta = 0$ ).

Далее используется двойной индекс. Первый из них обозначает номер искомой функции, второй — номер коэффициента в разложении этой функции в степенной ряд по  $\vartheta$ . Отсюда определяется вектор  $\mathbf{W}_0$ :

$$\mathbf{W}_0 = (w_{1,0}, w_{2,0}, w_{3,0})^\top = (c_0, u_0, 0)^\top.$$

Построим краевое условие для задачи (23) через компоненты вектора  $\mathbf{W}$ . Поскольку

$$w_1 = c + [c_0(\xi)f'(\xi) - f(\xi)] \frac{\varkappa}{c_0(\xi)} v, \quad w_2 = u + f'(\xi)v, \quad w_3 = -\frac{\varkappa}{c_0(\xi)} v,$$

можно записать, что

$$v = -\frac{\varkappa}{c_0(\xi)} w_3, \quad u = w_2 + \frac{\varkappa}{c_0(\xi)} f'(\xi) w_3.$$

Краевое условие (условие непротекания)

$$v|_{\zeta=0} = u \operatorname{tg} \alpha|_{\zeta=0}$$

записывается таким образом:

$$-\frac{\varkappa}{c_0(\xi)} w_3|_{\zeta=0} = \operatorname{tg} \alpha \left[ w_2 + \frac{\varkappa}{c_0(\xi)} f'(\xi) w_3 \right] |_{\zeta=0},$$

то есть

$$-\frac{\varkappa}{c_0(\xi)} [1 + f'(\xi) \operatorname{tg} \alpha] w_3|_{\zeta=0} = w_2 \operatorname{tg} \alpha|_{\zeta=0},$$

или

$$w_3|_{\zeta=0} = -\frac{c_0(\xi)}{\varkappa} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + f'(\xi) \operatorname{tg} \alpha} w_2|_{\zeta=0}.$$

Запишем краевое условие задачи (23) с учетом неявной связи между переменными  $\zeta$ ,  $\vartheta$  и  $\xi$ , задаваемой соотношениями (20) и (21):

$$w_3|_{\zeta=0} = -\left[ \frac{c_0(\varphi(\zeta - \vartheta))}{\varkappa} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + f'_\xi(\varphi(\zeta - \vartheta)) \operatorname{tg} \alpha} \right] |_{\zeta=0} w_2|_{\zeta=0}.$$

Множитель, стоящий перед коэффициентом  $w_2$ , обозначим следующим образом:

$$g(\vartheta) = -\left[ \frac{c_0(\varphi(\zeta - \vartheta))}{\varkappa} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + f'_\xi(\varphi(\zeta - \vartheta)) \operatorname{tg} \alpha} \right] |_{\zeta=0}. \quad (24)$$

Окончательно начально-краевая задача имеет вид

$$\begin{cases} T_1[B - f'(\xi)A]T_2 \mathbf{W}_\vartheta + T_1[B - \operatorname{tg} \alpha A]T_2 \mathbf{W}_\zeta + \\ \quad + T_1[B - \operatorname{tg} \alpha A] \frac{\partial T_2}{\partial \xi} \frac{\mathbf{W}}{f' - \operatorname{tg} \alpha} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{W}|_{\vartheta=0} = \mathbf{W}_0, \\ w_3|_{\zeta=0} = g(\vartheta)w_2|_{\zeta=0}. \end{cases} \quad (25)$$

Входные данные задачи (25), включая краевое условие, также являются аналитическими функциями в некоторой окрестности точки ( $\vartheta = 0, \zeta = 0$ ).

Система из задачи (25) на плоскости  $\vartheta = 0$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} -\frac{c_0}{\varkappa} f'_\xi & c_0 f'_\xi - f & 0 \\ c_0 f'_\xi - f & -\varkappa c_0 f'_\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{1,1} \\ w_{2,1} \\ w_{3,1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{c_0}{\varkappa} \operatorname{tg} \alpha & c_0 \operatorname{tg} \alpha - f & -\frac{c_0}{\varkappa} f(f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha) \\ c_0 \operatorname{tg} \alpha - f & -\varkappa c_0 \operatorname{tg} \alpha & c_0 f(f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha) \\ c_0 f(f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha) & -\varkappa c_0 f(f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha) & -c_0(f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha)(f^2 + c_0^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w'_{1,0\zeta} \\ w'_{2,0\zeta} \\ w'_{3,0\zeta} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{c_0}{\varkappa} f' \operatorname{tg} \alpha + \frac{c_0}{\varkappa} f f'' + u'_0 f f' \\ 0 & 0 & \frac{f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha}{c_0 f' \operatorname{tg} \alpha - c_0 f f'' + u'_0 f f' - c'_0 c_0} \\ 0 & 0 & \frac{f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha}{c_0 f f'' (c_0 - \varkappa) - u'_0 f f' (c_0 + \varkappa) - c'_0 c_0^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{1,0} \\ w_{2,0} \\ w_{3,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Проверим необходимое условие разрешимости системы (26). Для этого распишем третье уравнение системы:

$$0 + c_0 f (f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha) (w'_{1,0\zeta} - \varkappa w'_{2,0\zeta}) - c_0 (f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha) (f^2 + c_0^2) w'_{3,0\zeta} + [c_0 f f'' (c_0 - \varkappa) - u'_0 f f' (c_0 + \varkappa) - c'_0 c_0^2] w_{3,0} = 0. \quad (27)$$

С учетом явного вида  $w_{1,0}$ ,  $w_{2,0}$ ,  $w_{3,0}$  будем иметь

$$(w'_{1,0\zeta} - \varkappa w'_{2,0\zeta}) = \frac{1}{f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha} (w'_{1,0\xi} - \varkappa w'_{2,0\xi}) = \frac{c'_0 - \varkappa u'_0}{f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha} \equiv 0.$$

Для второго слагаемого будем иметь

$$w'_{3,0\zeta} = w'_{3\zeta} \Big|_{\vartheta=0} = -\frac{\varkappa}{c_0} v'_\zeta \Big|_{\vartheta=0} = -\frac{\varkappa}{c_0} \frac{v_\xi \Big|_{\vartheta=0}}{f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha} = -\frac{\varkappa}{c_0} \frac{v'_0}{f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha} \equiv 0.$$

Так как  $w_3 \Big|_{\vartheta=0} = w_{3,0} = 0$ , последнее слагаемое уравнения (27) равно нулю, и уравнение (27) обращается в тождество — необходимое условие разрешимости выполняется.

Таким образом, для системы из задачи (26) вид матриц удовлетворяет условиям аналога теоремы Ковалевской [14]:

- 1) матрица размерностью  $3 \times 3$  при векторе производных  $\mathbf{W}_\vartheta$  на плоскости  $\vartheta = 0$  в левом верхнем углу имеет ненулевой минор размерностью  $2 \times 2$ :

$$\begin{vmatrix} -\frac{c_0}{\varkappa} f'_\xi & c_0 f'_\xi - f \\ c_0 f'_\xi - f & -\varkappa c_0 f'_\xi \end{vmatrix} = c_0^2 f_\xi'^2 - (c_0 f'_\xi - f)^2 \neq 0;$$

остальные элементы матрицы равны нулю;

- 2) в матрице, стоящей перед вектором производных  $\mathbf{W}_\zeta$ , элемент из третьей строки и третьего столбца

$$-c_0 (f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha) (f^2 + c_0^2)$$

не равен 0, т. к. справедливо неравенство  $f' - \operatorname{tg} \alpha \neq 0$ .

Следовательно, получившаяся задача (25) является ХЗК стандартного вида [14]. Таким образом, доказана

**ТЕОРЕМА.** *Поставленная задача (25) при найденной функции  $f(\xi)$  является характеристической задачей Коши стандартного вида и поэтому у нее в некоторой окрестности точки  $(\zeta = 0, \vartheta = 0)$  существует единственное локально-аналитическое решение, представимое в виде сходящегося ряда*

$$\mathbf{W}(\zeta, \vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{W}_k(\zeta) \frac{\vartheta^k}{k!}; \quad \mathbf{W}_k(\zeta) = \frac{\partial^k \mathbf{W}}{\partial \vartheta^k} \Big|_{\vartheta=0}. \quad (28)$$

**7. Алгоритм построения решения рассматриваемой ХЗК.** Коэффициенты ряда (28) с номером ноль  $w_{1,0}$ ,  $w_{2,0}$ ,  $w_{3,0}$  определяются из начальных условий.

Для определения коэффициентов ряда с номером один в системе из задачи (25) полагается  $\vartheta = 0$ . Тогда из первых двух уравнений системы задачи (25) как из системы линейных алгебраических выражений (СЛАУ) для  $w_{1,1}$ ,  $w_{2,1}$  находятся в виде аналитических функций коэффициенты ряда (28) с номером один для двух первых искомых функций:  $w_{1,1}$ ,  $w_{2,1}$ .

А третье уравнение из системы задачи (25) при  $\vartheta = 0$  становится *необходимым условием разрешимости* рассматриваемой ХЗК — дополнительным соотношением на коэффициенты  $w_{1,0}$ ,  $w_{2,0}$ ,  $w_{3,0}$ . В данной задаче эти необходимые условия выполняются автоматически, поскольку начальные условия в задаче (25) являются ее частным решением, и это напрямую проверено предыдущими выкладками.

После этого третье уравнение из задачи (25) дифференцируется по  $\vartheta$  и полагается  $\vartheta = 0$ . В полученном соотношении коэффициенты перед коэффициентами  $w_{1,2}$ ,  $w_{2,2}$ ,  $w_{3,2}$  равны нулю. В оставшихся слагаемых величины  $w_{1,1}$ ,  $w_{2,1}$  и их производные по  $\zeta$  известны, а неизвестным является коэффициент  $w_{3,1}$  и его производная по  $\zeta$ .

Это соотношение рассматривается как обыкновенное дифференциальное уравнение для  $w_{3,1}$  с производной этой искомой функции по переменной  $\zeta$  (транспортное уравнение). Для однозначной разрешимости этого уравнения требуются два условия:

- 1) коэффициент перед соответствующей производной  $w_{3,1\zeta}$ , то есть коэффициент  $-c_0(f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha)(f^2 + c_0^2)$ , отличен от нуля при  $\vartheta = \zeta = 0$ , поскольку  $(f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha) \neq 0$ ;
- 2) для функции  $w_{3,1}$  задано начальное условие при  $\zeta = 0$ .

Выше показано, что оба условия выполняются. Начальное условие для транспортного уравнения получается следующим образом: краевое условие из задачи (25) дифференцируется по  $\vartheta$  и в получившемся соотношении

$$w_{3\vartheta}|_{\zeta=0} = [g'(\vartheta)w_2 + g(\vartheta)w_{2\vartheta}]|_{\zeta=0}$$

полагается  $\vartheta = 0$

$$w_{3,1}|_{\zeta=0} = [g'(0)w_{2,0} + g(0)w_{2,1}]|_{\zeta=0}. \quad (29)$$

Здесь  $g(0)$  и  $g'(0)$  — значения функции  $g(\vartheta)$  (24) и ее производной по  $\vartheta$  при  $\vartheta = 0$ .

Поскольку коэффициенты  $w_{2,0}$  и  $w_{2,1}$  известны, а значит известны их значения при  $\zeta = 0$ , последнее соотношение (29) и дает начальное условие для обыкновенного дифференциального уравнения для коэффициента  $w_{3,1}$ , которое имеет единственное аналитическое решение.

Построение следующих коэффициентов ряда (28) производится следующим образом.

Первые два уравнения системы из задачи (25) дифференцируются  $k$  раз по  $\vartheta$  и полагается  $\vartheta = 0$ . Из этих двух получившихся соотношений как из СЛАУ с отличным от нуля определителем находятся коэффициенты  $w_{1,k+1}$ ,  $w_{2,k+1}$  в виде аналитических функций.

После этого третье уравнение системы из задачи (25) дифференцируется  $(k+1)$  раз по  $\vartheta$  и полагается  $\vartheta = 0$ . В получившемся соотношении коэффициенты перед величинами  $w_{1,k+2}$ ,  $w_{2,k+2}$ ,  $w_{3,k+2}$  равны нулю и это последнее соотношение становится обыкновенным дифференциальным уравнением для искомой функции  $w_{3,k+1}$ . Коэффициент перед соответствующей производной отличен от нуля, то есть функция  $-c_0(f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha)(f^2 + c_0^2)$  при  $\zeta = 0$  отлична от нуля. Поэтому при задании для этого обыкновенного дифференциального уравнения начального условия функция  $w_{3,k+1}$  определится однозначно в виде аналитической функции. Требуемое начальное условие получится после дифференцирования  $(k+1)$  раз по  $\vartheta$  краевого условия из задачи (25) и после подстановки в получившееся соотношение значения  $\vartheta = 0$ . Все коэффициенты  $w_{2,l}$ ,  $0 \leq l \leq k+1$  к этому моменту известны.

Построение решения задачи (25) в виде ряда (28) закончено.

### **Заключение.**

1. В данной работе поставлена начально-краевая задача для СУГД, решение которой описывает движение газа при истечении в вакуум с косою стенки в пространстве физических автомодельных переменных  $x/t$ ,  $y/t$ .
2. В результате двух невырожденных замен исходная задача приведена к виду стандартной ХЗК в пространстве переменных  $\vartheta$ ,  $\zeta$ , где значение  $\vartheta = 0$  означает, что за новую координатную ось выбирается звуковая характеристика, а значение  $\zeta = 0$  означает, что за новую координатную ось выбирается косою стенка.
3. Из анализа элементов матриц системы, стоящих перед производными  $\mathbf{W}_\vartheta$  и  $\mathbf{W}_\zeta$  в системе с частными производными, доказана теорема существования и единственности решения начально-краевой задачи для СУГД, решение которой описывает истечение газа с косою стенки в вакуум.

**Конкурирующие интересы.** Конкурирующих интересов не имею.

**Авторская ответственность.** Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

**Финансирование.** Исследование выполнялось без финансирования.

**Благодарность.** Автор выражает благодарность и признательность своему научному руководителю профессору С. П. Баутину и рецензентам рукописи статьи за внимание, помощь и поддержку.

## Библиографический список

1. Courant R., Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics*. vol. 2: Partial Differential Equations. New York, London: John Wiley & Sons, 1962. xxii+830 pp.
2. Станюкович К. П. *Неустановившиеся движения сплошной среды*. М.: ГИТТЛ, 1955. 804 с.
3. Баутин С. П. *Математическое моделирование сильного сжатия газа*. Новосибирск: Наука, 2007. 312 с.
4. Забабахин Е. И., Забабахин И. Е. *Явления неограниченной кумуляции*. М.: Наука, 1988. 177 с.
5. Долголева Г. В., Забродин А. В. *Кумуляция энергии в слоистых системах и реализация безударного сжатия*. М.: Физматлит, 2004. 69 с. EDN: [UGLKZR](#).
6. Bernstein L. A. *Reactions on Excited States using the National Ignition Facility. Nuclear Astrophysics using NIF*: Preprint No. UCRL PRES-233342. Livermore: Lawrence Livermore Nat. Lab., 2007.
7. Сучков В. А. Истечение в вакуум на косо́й стенке // *ПММ*, 1963. Т. 27, № 4. С. 739–740.
8. Сидоров А. Ф. Некоторые оценки степени кумуляции энергии при плоском и пространственном безударном сжатии газа // *Докл. АН СССР*, 1991. Т. 318, № 3. С. 548–552.
9. Баутин С. П., Дерябин С. Л. *Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум*. Новосибирск: Наука, 2005. 390 с. EDN: [QJPIDD](#).
10. Кубанова А. К. Об одной форме аналитического решения истечения газа в пористой среде // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2003. № 19. С. 38–41. EDN: [EBRVIL](#). DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu137>.
11. Дерябин С. Л. Одномерное истечение самогравитирующего идеального газа в вакуум // *Вычислительные технологии*, 2003. Т. 8, № 4. С. 32–44. EDN: [KZAREX](#).
12. Баутин С. П., Понькин Е. И. Автомодельные решения задачи об истечении политропного газа в вакуум с косо́й стенки // *ПМТФ*, 2021. Т. 62, № 1. С. 32–40. EDN: [KCQUYF](#). DOI: <https://doi.org/10.15372/PMTF20210104>.
13. Овсянников Л. В. *Лекции по основам газовой динамики*. М., Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003. 335 с. EDN: [QJPLMV](#).
14. Баутин С. П. *Характеристическая задачи Коши и ее приложения в газовой динамике*. Новосибирск: Наука, 2009. 368 с.

MSC: 76N15, 35C06, 35Q35

## The characteristic Cauchy problem of standard form for describing the outflow of a polytropic gas into vacuum from an oblique wall

*E. I. Pon'kin*Snezhinsk Physic Institute of the National Research Nuclear University MEPhI,  
8, Komsomolskay st., Snezhinsk, 456776, Russian Federation.

### Abstract

The initial-boundary value problem for the system of equations of gas dynamics, the solution of which describes the expansion of a polytropic gas into vacuum from an oblique wall in the space of self-similar variables  $x/t$ ,  $y/t$  in the general inconsistent case, is reduced to the characteristic Cauchy problem of standard form in the space of new independent variables  $\vartheta$ ,  $\zeta$ . Equation  $\vartheta = 0$  defines the characteristic surface through which the double wave adjoins the well-known solution known as the centered Riemann wave. Equation  $\zeta = 0$  means that an oblique wall is chosen for the new coordinate axis, on which the impermeability condition is satisfied. For this new initial-boundary value problem, in contrast to the well-known solution of a similar problem obtained by S. P. Bautin and S. L. Deryabin in the space of special variables, the theorem of existence and uniqueness for the solution of the system of equations of gas dynamics in the space of physical self-similar variables in the form of a convergent infinite series was proved. An algorithm is described to build the series coefficients.

**Keywords:** characteristic Cauchy problem of standard form, analogue of Kovalevskaya's theorem, characteristic surface, oblique wall, series coefficient construction algorithm.

Received: 26<sup>th</sup> April, 2022 / Revised: 28<sup>th</sup> May, 2022 /Accepted: 7<sup>th</sup> June, 2022 / First online: 30<sup>th</sup> June, 2022

---

**Competing interests.** No competing interests.

**Author's Responsibilities.** The author assumes full responsibility for the submission of the final manuscript in print. I approve the final version of the manuscript.

---

**Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes**  
**Research Article**

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

**Please cite this article in press as:**

Pon'kin E. I. The characteristic Cauchy problem of standard form for describing the outflow of a polytropic gas into vacuum from an oblique wall, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 2, pp. 322–338. EDN: QYHKRK. DOI: [10.14498/vsgtu1922](https://doi.org/10.14498/vsgtu1922) (In Russian).

**Author's Details:**

*Eugeny I. Pon'kin*  <https://orcid.org/0000-0002-7848-3167>Postgraduate Student; e-mail: [epnk@rambler.ru](mailto:epnk@rambler.ru)

**Funding.** The research has not received funding.

**Acknowledgments.** The author expresses his gratitude and appreciation to his supervisor, Professor S. P. Bautin, and the reviewers of the manuscript for their attention, help, and support.

## References

1. Courant R., Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics*, vol. 2, Partial Differential Equations. New York, London, John Wiley & Sons, 1962, xxii+830 pp.
2. Stanyukovich K. P. *Unsteady motion of Continuous Media*. London, Pergamon Press, 1960, xv+745 pp.
3. Bautin S. P. *Matematicheskoe modelirovanie sil'nogo szhatiia gaza* [Mathematical Modeling of Strong Gas Compression]. Novosibirsk, Nauka, 2007, 312 pp. (In Russian)
4. Zababakhin E. I., Zababakhin I. E. *Iavleniia neogranichennoi kumuliatsii* [Phenomena of Unlimited Cumulation]. Moscow, Nauka, 1988, 177 pp. (In Russian)
5. Dolgoleva G. V., Zabrodin A. V. *Kumuliatsiia energii v sloistykh sistemakh i realizatsiia bezudarnogo szhatiia* [Energy Accumulation in Layered Systems and Implementation of Shockless Compression]. Moscow, Fizmatlit, 2004, 69 pp. (In Russian). EDN: UGLKZR.
6. Bernstein L. A. *Reactions on Excited States using the National Ignition Facility. Nuclear Astrophysics using NIF*, Preprint No. UCRL PRES-233342. Livermore, Lawrence Livermore Nat. Lab., 2007.
7. Suchkov V. A. Flow into a vacuum along an oblique wall, *J. Appl. Math. Mech.*, 1963, vol. 27, no. 4, pp. 1132–1134. EDN: YQXWVA. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(63\)90195-3](https://doi.org/10.1016/0021-8928(63)90195-3).
8. Sidorov A. F. Some estimates for the degree of energy cumulation in two- and three-dimensional shockless compression of a gas, *Dokl. Math.*, 1991, vol. 36, no. 5, pp. 347–349.
9. Bautin S. P., Deryabin S. L. *Matematicheskoe modelirovanie istecheniia ideal'nogo gaza v vakuum* [Mathematical Modeling of Ideal Gas Flow into Vacuum]. Novosibirsk, Nauka, 2005, 390 pp. (In Russian). EDN: QJPIDD.
10. Kubanova A. K. On one form of analytical solution of gas outflow in a porous medium, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2003, no. 19, pp. 38–41 (In Russian). EDN: EBRVIL. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu137>.
11. Deryabin S. L. One-dimension escape of self-gravitating ideal gas into vacuum, *Vychisl. Tekhnol.* [Comput. Technol.], 2003, vol. 8, no. 4, pp. 32–44 (In Russian). EDN: KZAREX.
12. Bautin S. P., Pon'kin E. I. Self-similar solutions of the problem of polytropic gas flow along an oblique wall into vacuum, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2021, vol. 62, no. 1, pp. 32–40. EDN: YQXWVA. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894421010041>.
13. Ovsyannikov L. V. *Lektsii po osnovam gazovoi dinamiki* [Lectures on the Fundamentals of Gas Dynamics]. Moscow, Izhevsk, Inst. Comp. Studies, 2003, 335 pp. (In Russian). EDN: QJPLMV.
14. Bautin S. P. *Kharakteristicheskaia zadachi Koshi i ee prilozheniia v gazovoi dinamike* [Characteristic Cauchy Problem and its Applications in Gas Dynamics]. Novosibirsk, Nauka, 2009, 368 pp. (In Russian)