Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 26, № 4. С. 715–737
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1938
EDN: EUXYCR

УДК 539.376

Ползучесть и длительное разрушение узкой прямоугольной мембраны внутри низкой жесткой матрицы при пропорциональной зависимости величины поперечного давления от времени

А. М. Локощенко[1], ***Л. В. Фомин***[1], ***А. Ф. Ахметгалеев***[1], ***Д. Д. Махов***[1,2]

[1] Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Россия, 119192, Москва, Мичуринский проспект, 1.
[2] Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1.

Аннотация

Проведено исследование ползучести и длительного разрушения узкой прямоугольной мембраны в стесненных условиях (внутри низкой жесткой матрицы) для случая пропорциональной зависимости величины поперечного давления от времени.

Деформирование мембраны в условиях ползучести рассматривается как последовательность трех стадий. На первой стадии мембрана деформируется в свободных условиях вплоть до касания поперечной стороны жесткой матрицы. На второй стадии она деформируется при касании поперечной стенки матрицы вплоть до касания ее продольных стенок. На третьей стадии она уже деформируется при одновременном касании продольных и поперечной стенок матрицы.

Исследование проводится при двух видах контактных условий: идеальное скольжение мембраны вдоль стенок матрицы и прилипание мембраны к стенкам матрицы.

Анализ постепенного разрушения мембраны проводится при использовании кинетической теории ползучести Ю. Н. Работнова, при этом

Механика деформируемого твердого тела
Научная статья

Образец для цитирования
Локощенко А. М., Фомин Л. В., Ахметгалеев А. Ф., Махов Д. Д. Ползучесть и длительное разрушение узкой прямоугольной мембраны внутри низкой жесткой матрицы при пропорциональной зависимости величины поперечного давления от времени // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 4. С. 715–737. EDN: EUXYCR. DOI: 10.14498/vsgtu1938.

Сведения об авторах

Александр Михайлович Локощенко https://orcid.org/0000-0002-5462-6055
доктор физико-математических наук, профессор

Леонид Викторович Фомин https://orcid.org/0000-0002-9075-5049
кандидат физико-математических наук; ведущий научный сотрудник; лаб. ползучести и длительной прочности; e-mail: fleonid1975@mail.ru

параметр поврежденности материала в данной задаче имеет скалярный характер.

Полученные уравнения использованы для анализа ползучести и длительного разрушения мембраны, изготовленной из хромомолибденной стали (2.15Cr-Mo steel), деформируемой при переменном поперечном давлении при температуре 600 °C вплоть до ее разрушения.

В результате решения системы определяющего и кинетического уравнений получены значения параметра поврежденности, накопленного в течение каждой стадии деформирования, а также величины времени до разрушения мембраны. Результаты исследования показывают, что в случае разрушения мембраны на первой стадии время до разрушения на первой стадии не зависит от вида контактных условий, а при разрушении мембраны на второй и третьей стадиях деформирования время до разрушения в случае идеального скольжения не меньше, чем в случае прилипания.

Ключевые слова: прямоугольная мембрана, жесткая матрица, переменное поперечное давление, ползучесть, длительное разрушение, параметр поврежденности, кинетическая теория, длительная прочность.

Получение: 21 июня 2022 г. / Исправление: 30 сентября 2022 г. / Принятие: 6 октября 2022 г. / Публикация онлайн: 29 декабря 2022 г.

Введение. Рассмотрим ползучесть вплоть до разрушения длинной узкой прямоугольной мембраны, закрепленной вдоль длинных сторон и нагруженной равномерным поперечным давлением q, которое возрастает пропорционально времени t. Решение этой задачи при постоянной и кусочно-постоянной зависимостях $q(t)$ при различных физических и геометрических условиях приведено в монографиях Л. М. Качанова [1], Одквиста (F.K.G. Odqvist) [2], Сторакерса (B. Storåkers) [3], Н. Н. Малинина [4] и др. Особый интерес представляет исследование ползучести рассматриваемой мембраны внутри жесткой матрицы. В монографиях [4,5] рассмотрен цикл задач о ползучести такой мембраны внутри жесткой матрицы. В [5] приведены решения задач при учете различных форм матриц: клиновидной, криволинейной и прямоугольной при двух типах контактных условий на границе мембраны: идеальное скольжение и прилипание. В [6] исследуется ползучесть длинной узкой мембраны внутри низкой жесткой матрицы при кусочно-постоянной зависимости величины поперечного давления от времени, исследование проведено при двух вариантах контакта матрицы и мембраны: идеальное скольжение и прилипание. В [7] проведено исследование установившейся ползучести мембраны внутри низкой жесткой матрицы при пропорциональной зависимости величины поперечного давления от времени. Расчеты проводятся до времени практически полного прилегания мембраны к матрице. Проведено сравнение этих времен при различных контактных условиях. А. Б. Ефимов с соавторами [8] составили обзор основных феноменологических закономерностей, описывающих

Александр Фагимович Ахметгалеев https://orcid.org/0000-0002-7999-6079
ведущий инженер; лаб. упругости и пластичности; e-mail: achmet206a@yandex.ru

Денис Дмитриевич Махов https://orcid.org/0000-0001-7748-3934
ведущий инженер; лаб. ползучести и длительной прочности[1]; студент; механико-математический факультет[2]; e-mail: monyamail@yahoo.com

постановку задачи контактного взаимодействия общего вида. Во всех этих работах исследуется только ползучесть мембраны, длительное разрушение не рассматривается.

В конце 50-х годов XX века Л. М. Качанов и Ю. Н. Работнов пришли к выводу, что используемые в то время термины механики деформируемого твердого тела (тензоры напряжений и деформаций и вектор перемещений) недостаточны для описания процесса длительного разрушения материалов и элементов конструкций в условиях ползучести. Ими был предложен новый подход к исследованию длительной прочности, этот подход был назван кинетическим. Он основан на использовании введенного Л. М. Качановым [9] и Ю. Н. Работновым [10] параметра поврежденности и разработанной впоследствии Ю. Н. Работновым [11] кинетической теории ползучести и длительной прочности.

Основой этого подхода при одноосном растяжении является введение скалярного параметра поврежденности $\omega(t)$, характеризующего структурное состояние материала при произвольном значении времени t. Исходному состоянию материала (при $t = 0$) соответствует значение $\omega = 0$, при разрушении (при $t = t^*$) поврежденность $\omega(t^*) = 1$. При рассмотрении длительной прочности в случае одноосного растяжения Л. М. Качанов [9] дополнил уравнение ползучести дифференциальным кинетическим уравнением, характеризующим изменение параметра ω во времени, а Ю. Н. Работнов [12] дополнительно ввел параметр ω в уравнение ползучести (для учета влияния процесса накопления поврежденности в процессе ползучести).

В настоящей работе этот подход применяется к решению краевой задачи реологического деформирования и разрушения узкой прямоугольной мембраны внутри жесткой матрицы при заданном давлении.

1. Постановка задачи. В работе изучается процесс деформирования длинной узкой прямоугольной мембраны в условиях ползучести вплоть до ее разрушения (рис. 1). Мембрана закреплена вдоль своих длинных сторон и расположена внутри низкой жесткой матрицы прямоугольной формы. H_0 — толщина мембраны; $2a$ — ширина мембраны и матрицы; L — длина мембраны и матрицы; b — высота матрицы, при этом справедливы следующие неравенства: $2a/L \ll 1$, $b/a \leqslant 1$ (низкая матрица).

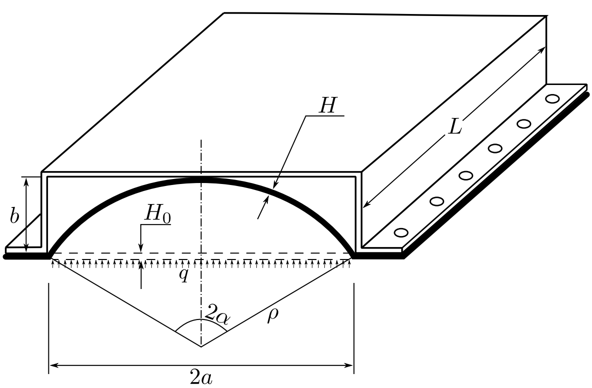

Рис. 1. Общая схема деформирования прямоугольной мембраны внутри жесткой матрицы

[Figure 1. General scheme of deformation of a rectangular membrane inside a rigid matrix]

Величина поперечного давления q зависит от времени t пропорционально:

$$q(t) = \dot{q}t,$$

где $\dot{q} = \mathrm{const}$ — скорость возрастания величины q, точкой всюду обозначаются производные по времени t.

Деформирование мембраны в условиях ползучести рассматривается как последовательность трех стадий. На первой стадии мембрана деформируется в свободных условиях вплоть до касания поперечной стороны жесткой матрицы. На второй стадии она деформируется при касании поперечной стенки матрицы вплоть до касания ее продольных стенок. На третьей стадии она уже деформируется при одновременном касании продольных и поперечной стенок матрицы.

Задача рассматривается в стандартной цилиндрической системе координат, поэтому при моделировании напряженно-деформированного состояния при $t > 0$ рассматриваются радиальное σ_{rr}, окружное $\sigma_{\theta\theta}$ и осевое σ_{zz} главные напряжения и соответствующие компоненты тензора деформаций ползучести p_{rr}, $p_{\theta\theta}$ и p_{zz}. Недиагональные компоненты тензоров напряжений и деформаций равны нулю.

Рассмотрим элемент мембраны [4]. Принимаем напряжения в элементе равномерно распределенными по толщине и, записывая уравнения равновесия в проекциях на нормаль и касательную, получаем

$$\sigma_{\theta\theta} = q\rho/H, \quad d(\sigma_{\theta\theta}H) = 0, \tag{1}$$

где ρ — радиус кривизны срединной поверхности, H — толщина мембраны. Следовательно,

$$\sigma_{\theta\theta}H = \mathrm{const}. \tag{2}$$

Сопоставляя равенства (1) и (2), заключаем, что рассматриваемый радиус кривизны срединной поверхности мембраны $\rho = \mathrm{const}$ во всех ее точках, т.е. срединная поверхность мембраны при ее деформировании, является частью поверхности кругового цилиндра с углом раствора 2α [4]. Следствием принятых предположений является то, что толщина мембраны постоянна по своей длине в процессе деформации ползучести. Следовательно, согласно равенству (1), окружное напряжение $\sigma_{\theta\theta}$ по длине окружности радиуса ρ не изменяется.

Целью данного исследования является определение зависимости времени до разрушения мембраны t^* от величины скорости возрастания величины поперечного давления $\dot{q}$, в случае разрушения на i-той стадии эти параметры будем обозначать через t_i^* и $\dot{q}_i$ соответственно, $i = 1, 2, 3$.

Для учета накопления поврежденности в материале мембраны в процессе ползучести вводится тензорный параметр поврежденности $\omega_{ij}(t)$, который при активном нагружении ($\dot{q} > 0$) удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\frac{d\omega_{ij}}{dt} = \frac{3}{2}F(\sigma_{ij}, \omega_{ij}, t)s_{ij} \ \text{ при } \ s_{ij} > 0, \quad \frac{d\omega_{ij}}{dt} = 0 \ \text{ при } \ s_{ij} \leqslant 0, \tag{3}$$

где s_{ij} — компоненты девиатора напряжений.

Для описания ползучести мембраны при $t > 0$ с учетом накопления поврежденности материала вплоть до ее разрушения рассмотрим гипотезу пропорциональности девиаторов напряжений и девиаторов скоростей деформаций ползучести при учете несжимаемости материала в следующем виде (в дальнейшем ω_u представляет собой аналог интенсивности напряжений σ_u):

$$\begin{cases} \dot{p}_{ij} = \dfrac{3}{2}\dfrac{A\sigma_u^{n-1}}{(1-\omega_u)^n}s_{ij}, \quad p_{ij}(0)=0; \\ \sigma_u = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta})^2+(\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{zz})^2+(\sigma_{zz}-\sigma_{rr})^2}; \\ \omega_u = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\omega_{rr}-\omega_{\theta\theta})^2+(\omega_{\theta\theta}-\omega_{zz})^2+(\omega_{zz}-\omega_{rr})^2}, \end{cases} \tag{4}$$

где p_{ij} — компоненты тензора деформаций ползучести; A, n — постоянные величины соответствующей размерности.

В рассматриваемом плоском деформированном состоянии скорость осевой деформации ползучести $\dot{p}_{zz}$ принимается равной нулю:

$$\dot{p}_{zz} = 0. \tag{5}$$

Примем, как обычно для тонкостенных цилиндрических оболочек, равенство

$$\sigma_{rr} = 0. \tag{6}$$

В этом случае из гипотезы пропорциональности девиаторов напряжений и скоростей деформаций ползучести (4) при учете (5), (6) следует

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2}\sigma_{\theta\theta}, \quad \sigma_u = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{\theta\theta}.$$

Компоненты девиатора напряжений s_{ij} в мембране определяются соотношениями

$$s_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{2} > 0, \quad s_{zz} = 0, \quad s_{rr} = -\frac{\sigma_{\theta\theta}}{2} < 0, \quad s_{\theta z} = s_{rz} = s_{r\theta} = 0.$$

Следовательно, в соответствии с (3) в тензоре поврежденности ω_{ij} только одна компонента $\omega_{\theta\theta}$ — ненулевая, т.е. параметр поврежденности в данной задаче имеет скалярный характер: $\omega = \omega(t)$. Примем кинетическое уравнение (3) в форме

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{B\sigma_{\theta\theta}^k}{(1-\omega)^m}, \quad \omega(0) = 0. \tag{7}$$

Таким образом, ползучесть мембраны внутри прямоугольной матрицы вплоть до разрушения определяется из системы определяющего уравнения

$$\dot{p}_{\theta\theta} = \frac{3}{2}\frac{A\sigma_u^{n-1}}{(1-\omega)^n}s_{\theta\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{\theta\theta}\right)^n}{(1-\omega)^n}, \quad p_{\theta\theta}(0) = 0, \tag{8}$$

и кинетического уравнения (7), а момент разрушения $t = t^*$ характеризуется условием

$$\omega(t^*) = 1. \tag{9}$$

Из уравнения (7) после серии преобразований получаем

$$(1-\omega)^n = \left(1-(m+1)B\int_0^t \sigma_{\theta\theta}^k dt\right)^{\frac{n}{m+1}}. \tag{10}$$

Подставляя выражение $(1-\omega)^n$ в уравнение (8), получаем выражение для скорости окружной компоненты тензора деформации ползучести:

$$\dot{p}_{\theta\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2}A\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{\theta\theta}\Big)^n\left(1-(m+1)B\int_0^t \sigma_{\theta\theta}^k dt\right)^{-\frac{n}{m+1}}. \tag{11}$$

Дальнейшей целью исследований является определение зависимости окружного напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ (1) от скорости возрастания давления $\dot{q}$ при обоих рассматриваемых контактных условиях (идеальное скольжение и прилипание), а затем с помощью (7) и (9) — анализ задачи о возможности разрушения на той или иной стадии ползучести.

2. Разрушение мембраны в процессе свободного деформирования в условиях ползучести (первая стадия). На первой стадии мембрана (плоская в начальном состоянии) под действием давления $q(t)$ приобретает форму незамкнутой цилиндрической оболочки с центральным углом 2α (см. рис. 2). На этой стадии мембрана деформируется в условиях установившейся ползучести вплоть до касания поперечной стенки жесткой матрицы.

Введем безразмерные переменные:

$$\overline{H}_i = H_i/H_0, \quad \overline{H}_0 = H_0/a, \quad \overline{b} = b/a, \quad \overline{\rho} = \rho/a, \tag{12}$$

где H_0 — начальная толщина мембраны, H_i — толщина мембраны на i-той стадии, $i = 1, 2, 3$.

Далее черточки над всеми безразмерными переменными опустим. В этом пункте рассматривается длительное разрушение мембраны при постоянной скорости возрастания поперечного давления $\dot{q}_1 = \mathrm{const}$.

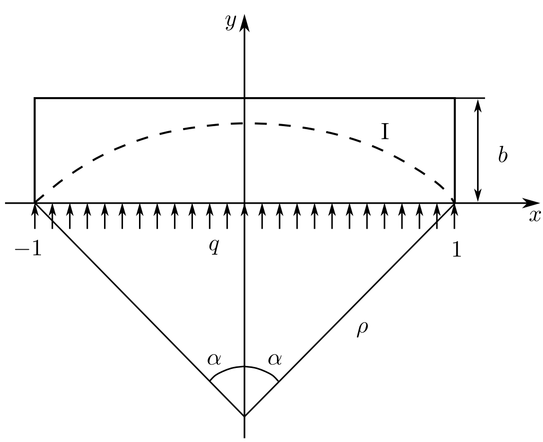

Рис. 2. Схема деформации прямоугольной мембраны на первой стадии
[Figure 2. The scheme of deformation of a rectangular membran at the first stage]

Рассматривая два близких деформированных состояния мембраны, определим приращение окружной компоненты деформации ползучести:

$$dp_{\theta\theta} = \frac{(\rho + d\rho)(\alpha + d\alpha) - \rho\alpha}{\rho\alpha} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Следовательно, для скорости окружной компоненты деформации ползучести имеем

$$\dot{p}_{\theta\theta} = \frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}. \tag{13}$$

Поскольку

$$\rho \sin\alpha = 1, \tag{14}$$

то

$$\dot{\rho}\sin\alpha + \rho\dot{\alpha}\cos\alpha = 0.$$

Поэтому выражение (13) преобразуется к виду

$$\dot{p}_{\theta\theta} = (\alpha^{-1} - \operatorname{ctg}\alpha)\dot{\alpha}. \tag{15}$$

Из условия несжимаемости в случае плоского деформированного состояния получаем:

$$\dot{p}_{rr} + \dot{p}_{\theta\theta} + \dot{p}_{zz} = 0, \quad \dot{p}_{zz} = 0, \quad \dot{p}_{rr} = -\dot{p}_{\theta\theta}.$$

Так как скорость радиальной компоненты деформации ползучести

$$\dot{p}_{rr} = \dot{H}_1/H_1, \tag{16}$$

согласно равенствам (15), (16), с учетом $\dot{p}_{rr} = -\dot{p}_{\theta\theta}$ получаем

$$\dot{p}_{\theta\theta} = -\frac{\dot{H}_1}{H_1} = (\alpha^{-1} - \operatorname{ctg}\alpha)\dot{\alpha}. \tag{17}$$

Интегрируя (17) при начальном условии $H_1(0) = 1$, $\alpha(0) = 0$, получаем

$$H_1(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\alpha}. \tag{18}$$

При

$$\alpha = \alpha_1 = \arcsin\frac{2b}{1+b^2}$$

из (18) имеем

$$H_1(\alpha_1) = \frac{2b}{(1+b^2)\alpha_1} = H_1^0,$$

где H_1^0 — значение толщины мембраны в конце первой стадии, т.е. при $\alpha = \alpha_1$. Величина $\sigma_{\theta\theta}$, определяемая (1), при учете (12), (14) и (18) принимает следующий вид:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{q_1\rho}{H_0 H_1} = \frac{\dot{q}_1 t}{H_0}\frac{\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Подставляя выражение (11) в (17), получаем

$$\frac{d\alpha}{dt} = (\alpha^{-1} - \operatorname{ctg}\alpha)^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}A\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{\theta\theta}\Big)^n\Big(1 - (m+1)B\int_0^t \sigma_{\theta\theta}^k dt\Big)^{-\frac{n}{m+1}}, \qquad (19)$$

$$\alpha(0) = 0.$$

В конце первой стадии ($t = t_1$) раствор мембраны $2\alpha(t_1) = 2\alpha_1$ в случае ее неразрушения удовлетворяет равенству $2\alpha_1 = 2\arcsin\frac{2b}{1+b^2}$. Момент времени t_1, при котором происходит окончание первой стадии, и толщина мембраны $H_1^0 = H(t_1)$ вычисляются согласно зависимости (18):

$$t_1 = t(\alpha_1), \quad H_1^0 = H_1(t_1) = \frac{\sin\alpha_1}{\alpha_1} = \frac{2b}{(1+b^2)\alpha_1}.$$

Определим скорость увеличения поперечного давления $\dot{q}_1$, при котором мембрана разрушается в процессе первой стадии ($t = t_1^*$). Для этого воспользуемся уравнением (19), начальное значение $\alpha(0) = 0$. Конечное значение $\alpha^* = \alpha(t_1^*)$ определяется с помощью уравнения (10):

$$\omega(t_1^*) = 1 = 1 - \Big(1 - (m+1)B\int_0^{t_1^*} \sigma_{\theta\theta}^k dt\Big)^{\frac{1}{m+1}},$$

отсюда

$$(m+1)B\int_0^{t_1^*} \sigma_{\theta\theta}^k dt = 1.$$

Далее рассматривается ползучесть мембраны внутри жесткой матрицы при различных контактных условиях.

3. Идеальное скольжение мембраны вдоль сторон матрицы. Введем координаты поперечного сечения матрицы x и y (см. рис. 2) и дополнительные безразмерные координаты:

$$\bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{y} = \frac{y}{a}, \quad \bar{b} = \frac{b}{a}, \quad \bar{x}_0 = \frac{x_0}{a}, \quad \bar{y}_0 = \frac{y_0}{a},$$

где x_0, y_0 — координаты точек касания мембраны и матрицы; далее черточки над этими безразмерными переменными также будем опускать.

3.1. Деформирование и разрушение мембраны в процессе второй стадии ($0 \leqslant x_0 \leqslant x_0^*$). Рассмотрим характеристики разрушения мембраны $\dot{q}_2$ и t_2^* в процессе второй стадии (рис. 3). Здесь $x_0^* = 1 - b$ определяется положением мембраны в конце второй стадии, при этом центр кривизны срединной поверхности мембраны (в угловой части матрицы) расположен на оси x в точке x_0^*. Исследование ползучести проводится сначала на первой стадии ($0 \leqslant t \leqslant t_1$), а затем на второй стадии $t_1 \leqslant t \leqslant t_2^*$.

Ползучесть мембраны на первой стадии описывается дифференциальным уравнением (19) при $\alpha(0) = 0$ и $\alpha(t_1) = \alpha_1$, при этом

$$\sigma_{\theta\theta}(\alpha) = \frac{\dot{q}_2\alpha t}{H_0\sin^2\alpha}.$$

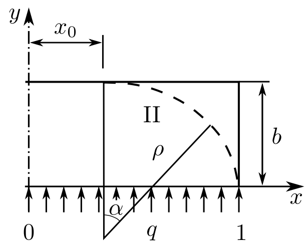

Рис. 3. Схема деформации прямоугольной мембраны на второй стадии (идеальное скольжение и прилипание)
[Figure 3. The scheme of deformation of a rectangular membran at the second stage (ideal slip and sticking)]

Поврежденность материала в конце первой стадии согласно (10) выражается соотношением

$$\omega(t_1) = 1 - \left(1 - (m+1)B\int_0^{t_1} \sigma_{\theta\theta}^k dt\right)^{\frac{1}{m+1}} = \omega_1. \tag{20}$$

После окончания первой стадии ползучести ($t = t_1$) наступает вторая стадия ($t_1 \leqslant t \leqslant t_2^*$, $0 \leqslant x_0 \leqslant x_0^*$, $\omega_1 \leqslant \omega \leqslant 1$).

Решение задачи имеет различный характер для относительно высокой матрицы ($b \geqslant 1$) и относительно низкой матрицы ($b \leqslant 1$). Для определенности в данной работе будет рассмотрена ползучесть мембраны внутри относительно низкой матрицы.

В связи с осевой симметрией мембраны и матрицы далее рассматривается ползучесть правой половины мембраны в координатах $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant b$ (см. рис. 3).

При $t > t_1$ часть поверхности мембраны прилегает к внутренней поперечной поверхности матрицы.

При исследовании второй стадии ползучести мембраны выделим два близких деформированных состояния: одно характеризуется длиной участка контакта x_0, а другое — длиной участка контакта $(x_0 + dx_0)$. С помощью геометрических соотношений получим соотношение для приращения окружной деформации ползучести $dp_{\theta\theta}$ в виде

$$dp_{\theta\theta} = \frac{(\rho d\alpha + \alpha d\rho) + dx_0}{\rho\alpha + x_0} = \frac{D_1(x_0)dx_0}{D_2(x_0)} = -\frac{dH_2}{H_2}, \tag{21}$$

где

$$D_1(x_0)dx_0 = \rho d\alpha + \alpha d\rho + dx_0 = -\frac{1-x_0}{b}\operatorname{arctg}\frac{1-x_0}{(1-x_0)^2 - b^2}dx_0 + 2dx_0,$$

$$D_2(x_0) = \rho\alpha + x_0 = \frac{(1-x_0)^2 + b^2}{2b}\operatorname{arctg}\frac{2b(1-x_0)}{(1-x_0)^2 - b^2} + x_0.$$

Из условия несжимаемости с учетом (16) получаем, что $d\dot{p}_{\theta\theta} = -d\dot{p}_{rr}$. Согласно определению $\dot{p}_{rr}$, имеем $\dot{p}_{rr} = \dot{H}_2/H_2$. Следовательно,

$$\dot{p}_{\theta\theta} = -\frac{\dot{H}_2}{H_2}, \quad dp_{\theta\theta} = \frac{D_1(x_0)dx_0}{D_2(x_0)} = -\frac{dH_2}{H_2},$$

$$\int_{H_1^0}^{H_2(x_0)} \frac{dH_2}{H_2} = -\int_0^{x_0} \frac{D_1(x_0)dx_0}{D_2(x_0)},$$

$$H_2(x_0) = H_1^0 \exp\left(-\int_0^{x_0} \frac{D_1(x_0)dx_0}{D_2(x_0)}\right). \tag{22}$$

Толщина в конце второй стадии определяется согласно (22):

$$H_2^0 = H_2(t_2) = \frac{1}{1-b+\pi b/2}. \tag{23}$$

Окончание второй стадии ($t = t_2$) наступает при разрушении мембраны, т.е. когда $\omega(t_2^*) = 1$.

Рассмотрим зависимость параметра поврежденности на второй стадии от времени. Из (7) следует, что

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{B\sigma_{\theta\theta}^k}{(1-\omega)^m},$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega} (1-\omega)^m d\omega = \frac{(1-\omega_1)^{m+1} - (1-\omega)^{m+1}}{m+1} = B\int_{t_1}^{t} \sigma_{\theta\theta}^k dt,$$

$$\omega(t) = 1 - \left((1-\omega_1)^{m+1} - (m+1)B\int_{t_1}^{t} \sigma_{\theta\theta}^k dt\right)^{\frac{1}{m+1}}.$$

Учитывая, что $\omega(t_2^*) = 1$, находим

$$(1-\omega_1)^{m+1} = (m+1)B\int_{t_1}^{t_2^*} \sigma_{\theta\theta}^k dt. \tag{24}$$

Из (21) следует

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{D_2(x_0)}{D_1(x_0)}\dot{p}_{\theta\theta}.$$

Отсюда с учетом (11) получаем

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{D_2(x_0)}{D_1(x_0)}\frac{\sqrt{3}}{2}A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{\theta\theta}\right)^n\left((1-\omega_1)^{m+1} - (m+1)B\int_{t_1}^{t} \sigma_{\theta\theta}^k dt\right)^{-\frac{n}{m+1}}. \tag{25}$$

Окружное напряжение на второй стадии определяется соотношениями (1) и (22):

$$\sigma_{\theta\theta}(x_0) = \frac{q\rho}{H_0 H_2(x_0)} = \frac{\dot{q}_2 t\rho}{H_0 H_2(x_0)}. \tag{26}$$

Определим теперь зависимость времени разрушения t_2^* от скорости возрастания величины поперечного давления $\dot{q}_2$. Задавая произвольное значение $\dot{q}_2$ ($\dot{q}_2 \leqslant \dot{q}_1$) и подставляя его в выражение (26), решаем дифференциальное уравнение (25) при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2^*$. При этом начальное значение $x_0(t_1) = 0$, а конечное значение $t = t_2^*$ определяется с помощью уравнения (24).

3.2. Деформирование и разрушение мембраны в процессе третьей стадии ($1 - b \leqslant x_0 \leqslant x_0^*$). Рассмотрим процесс разрушения мембраны при $\dot{q}_3$ ($\dot{q}_3 < \dot{q}_2$) на третьей стадии в предположении, что на второй стадии разрушения не произошло (рис. 4). Этот процесс состоит из последовательности реализации первой, второй и третьей стадий.

Ползучесть мембраны в процессе первой стадии описывается дифференциальным уравнением (19) при условиях

$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha(t_1) = \alpha_1, \quad \sigma_{\theta\theta}(\alpha) = \frac{\dot{q}_3 \alpha t}{H_0 \sin^2 \alpha}.$$

В конце первой стадии (при $t = t_1$) поврежденность материала мембраны определяется равенством (20).

Вторая стадия процесса ползучести характеризуется следующими значениями параметров:

$$t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \quad 0 \leqslant x_0 \leqslant 1 - b, \quad \omega_1 \leqslant \omega \leqslant \omega_2.$$

Толщина мембраны $H_2(x)$ на второй стадии ползучести и ее значение в конце второй стадии H_2^0 определяются равенствами (22) и (23) соответственно.

Процесс ползучести мембраны на второй стадии определяется следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{D_2(x_0)}{D_1(x_0)} \frac{\sqrt{3}}{2} A \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{\theta\theta}\Big)^n \bigg((1-\omega_1)^{m+1} - (m+1)B\int_{t_1}^{t} \sigma_{\theta\theta}^k dt\bigg)^{-\frac{n}{m+1}};$$

$$x_0(t_1) = 0, \quad x(t_2) = 1 - b, \quad \sigma_{\theta\theta}(x_0) = \frac{\dot{q}_3 t}{H_0 H_2(x_0)};$$

$$H_2(x_0) = H_1^0 \exp\bigg(-\int_0^{x_0} \frac{D_1(x_0)dx_0}{D_2(x_0)}\bigg).$$

Поврежденность материала мембраны $\omega_2 = \omega_2(t)$ в конце второй стадии определяется с помощью интегрирования дифференциального уравнения (7) при $t > t_1$:

$$\omega_2 = 1 - \bigg((1-\omega_1)^{m+1} - (m+1)B\int_{t_1}^{t_2} \sigma_{\theta\theta}^k dt\bigg)^{\frac{1}{m+1}}. \qquad (27)$$

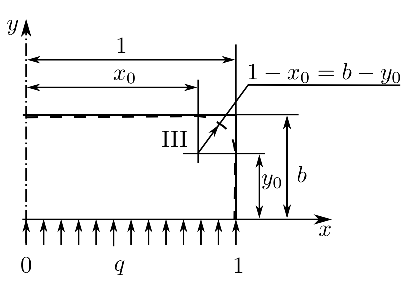

Рис. 4. Схема деформации прямоугольной мембраны на третьей стадии (идеальное скольжение и прилипание)
[Figure 4. The scheme of deformation of a rectangular membran at the third stage (ideal slip and sticking)]

Третья стадия ползучести мембраны характеризуется параметрами:

$$t_2 \leqslant t \leqslant t_3^*, \quad 1-b \leqslant x_0 \leqslant x_0^*, \quad \omega_2 \leqslant \omega \leqslant 1.$$

Накопление параметра $\omega(t)$ в процессе третьей стадии определяется из дифференциального уравнения (7) при $t > t_2$:

$$\omega(t) = 1 - \left((1-\omega_2)^{m+1} - (m+1)B\int_{t_2}^{t} \sigma_{\theta\theta}^k dt\right)^{\frac{1}{m+1}}.$$

Отсюда, учитывая, что в момент разрушения $t = t_3^*$ поврежденность $\omega(t_3^*) = 1$, получаем

$$(1-\omega_2)^{m+1} = (m+1)B\int_{t_2}^{t_3^*} \sigma_{\theta\theta}^k dt. \tag{28}$$

На этой стадии мембрана касается обеих сторон матрицы:

$$dp_{\theta\theta} = \frac{(2-\pi/2)dx_0}{b+\pi/2-1+(2-\pi/2)x_0},$$

$$p_{\theta\theta} = -\int_{H_2^0}^{H_3(x_0)} \frac{dH_3}{H_3} = \ln\frac{H_2^0}{H_3(x_0)} = \ln\frac{b+\pi/2-1+(2-\pi/2)x_0}{1-b+b\pi/2},$$

$$H_3(x_0) = \frac{1}{b+\pi/2-1+(2-\pi/2)x_0},$$

$$\dot{x}_0 = \frac{b+\pi/2-1+(2-\pi/2)x_0}{2-\pi/2}\dot{p}_{\theta\theta}.$$

Подставляя в последнее уравнение выражение (8) при учете (10) вместо $\dot{p}_{\theta\theta}$, получаем

$$\dot{x}_0 = \frac{b+\pi/2-1+(2-\pi/2)x_0}{2-\pi/2}\frac{\sqrt{3}}{2}A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{\theta\theta}\right)^n \times \\ \times\left((1-\omega_2)^{m+1} - (m+1)\int_{t_2}^{t} B\sigma_{\theta\theta}^k dt\right)^{-\frac{n}{m+1}}, \tag{29}$$

$$\sigma_{\theta\theta}(x_0) = \frac{\dot{q}_3 t}{H_0}(1-x_0).$$

При решении дифференциального уравнения (29) начальное значение $x_0(t_2) = 1-b$, а конечное значение t_3^* удовлетворяет равенству (28).

4. Деформирование и разрушение мембраны в условиях прилипания мембраны вдоль сторон матрицы. Как и для предыдущего случая граничных условий рассмотрим вторую и третью стадии деформирования мембраны в условиях ползучести и определим условия ее разрушения.

4.1. Деформирование и разрушение мембраны в процессе второй стадии ($0 \leqslant x_0 \leqslant 1-b$). Чтобы определить условия разрушения мембраны в процессе ее деформирования на второй стадии при $\dot{q}_2$ необходимо последовательно рассмотреть ее ползучесть на первой и второй стадиях.

Ползучесть мембраны на первой стадии при условии ее неразрушения ($0 \leqslant t \leqslant t_1$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$, $0 \leqslant \omega \leqslant \omega_1$) описывается дифференциальным уравнением (19) при условиях

$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha(t_1) = \alpha_1 = \arcsin\frac{2b}{1+b^2}, \quad \sigma_{\theta\theta}(\alpha) = \frac{\dot{q}_2 \alpha t}{H_0 \sin^2\alpha}.$$

Поврежденность материала мембраны в конце первой стадии определяется равенством (20).

В процессе второй стадии ползучести мембраны зависимость параметра поврежденности от времени определяется соотношением (24). В случае постепенного прилипания материала мембраны к матрице ее контактная часть (с переменной толщиной) не деформируется, а свободная часть (с постоянной толщиной) представляет собой часть дуги окружности. Окружная деформация в свободной части мембраны имеет вид

$$dp_{\theta\theta} = \frac{(\rho d\alpha + \alpha d\rho) + dx_0}{\rho\alpha} = \frac{D_1(x_0)dx_0}{D_3(x_0)}.$$

Аналогично (21) можно получить выражение

$$D_3(x_0) = \rho\alpha = \frac{(1-x_0)^2 + b^2}{2b} \operatorname{arctg}\frac{2b(1-x_0)}{(1-x_0)^2 - b^2}.$$

Как показано ранее, $\dot{p}_{rr} = \dot{H}_2/H_2$. Из условия несжимаемости $\dot{p}_{\theta\theta} = -\dot{p}_{rr}$, поэтому

$$\dot{p}_{\theta\theta} = -\frac{\dot{H}_2(x_0)}{H_2(x_0)}, \quad dp_{\theta\theta} = -\frac{dH_2}{H_2} = \frac{D_1(x_0)dx_0}{D_3(x_0)},$$

$$\int_{H_1^0}^{H_2(x_0)} \frac{dH_2}{H_2} = -\int_0^{x_0} \frac{D_1(x_0)dx_0}{D_3(x_0)}, \quad H_2(x_0) = H_1^0 \exp\left(-\int_0^{x_0}\frac{D_1(x_0)dx_0}{D_3(x_0)}\right),$$
$$H_2^0 = H_2(1-b).$$

Интенсивности σ_u и $\dot{p}_u$ определяются соотношениями

$$\sigma_u = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{q\rho}{H_0 H_2(x_0)}, \quad \dot{p}_u = \frac{2}{\sqrt{3}}\dot{p}_{\theta\theta}.$$

Также имеем

$$\sigma_{\theta\theta}(x_0) = \frac{q\rho}{H_0 H_2(x_0)} = \frac{\dot{q}_2 t \rho}{H_0 H_2(x_0)}, \tag{30}$$

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{D_3(x_0)}{D_1(x_0)}\frac{dp_{\theta\theta}}{dt} = \frac{D_3(x_0)}{D_1(x_0)}\frac{\sqrt{3}}{2}A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{\theta\theta}\right)^n \times$$
$$\times\left((1-\omega_1)^{m+1} - (m+1)B\int_{t_1}^t \sigma_{\theta\theta}^k dt\right)^{-\frac{n}{m+1}}. \tag{31}$$

Подставляя (30) в (31), получаем дифференциальное уравнение относительно x_0, при этом начальное значение равно $x_0(t_1) = 0$, конечное значение t_2^* определяется с помощью уравнения (24).

4.2. Деформирование и разрушение мембраны в процессе третьей стадии ($\boldsymbol{1 - b \leqslant x_0 \leqslant x_0^*}$). Рассмотрим ползучесть мембраны при $\dot{q}_3$ последовательно на первой, второй и третьей стадиях в случае, если разрушение не произошло на первой и второй стадии.

Ползучесть мембраны в процессе первой стадии описывается дифференциальным уравнением (19) при условиях

$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha(t_1) = \alpha_1, \quad \sigma_{\theta\theta}(\alpha) = \frac{\dot{q}_3 \alpha t}{H_0 \sin^2 \alpha}.$$

В конце первой стадии (при $t = t_1$) поврежденность $\omega_1(t_1) = \omega_1$ материала мембраны задается соотношением

$$\omega_1 = 1 - \left(1 - (m+1)B \int_0^{t_1} \sigma_{\theta\theta}^k dt\right)^{\frac{1}{m+1}}.$$

Вторая стадия процесса ползучести характеризуется следующими значениями параметров:

$$t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \quad 0 \leqslant x_0 \leqslant 1 - b, \quad \omega_1 \leqslant \omega \leqslant \omega_2.$$

Процесс ползучести на второй стадии определяется следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{D_3}{D_1} A \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{\theta\theta}\right)^n \left((1 - \omega_1)^{m+1} - (m+1)B \int_{t_1}^{t} \sigma_{\theta\theta}^k dt\right)^{-\frac{n}{m+1}},$$
$$x_0(t_1) = 0, \quad x_0(t_2) = 1 - b,$$
$$\sigma_{\theta\theta}(x_0) = \frac{\dot{q}_2 t}{H_0 H_2(x_0)}.$$

Поврежденность материала мембраны в конце второй стадии $\omega(t_2) = \omega_2$ определяется из уравнения (27).

Третья стадия деформирования мембраны характеризуется параметрами:

$$t_2 \leqslant t \leqslant t_3^*, \quad 1 - b \leqslant x_0 \leqslant x_0^*, \quad \omega_2 \leqslant \omega \leqslant 1.$$

На этой стадии ползучесть мембраны при касании ею обеих сторон матрицы описывается следующим уравнением:

$$dp_{\theta\theta} = F(x_0) dx_0, \quad F(x_0) = \frac{4 - \pi}{\pi(1 - x_0)}.$$

В результате зависимость $dp_{\theta\theta}/dt$ примет следующий вид:

$$\frac{dp_{\theta\theta}}{dt} = F(x_0) \frac{dx_0}{dt};$$

$$p_{\theta\theta} = -\int_{H_2^0}^{H_3(x_0)} \frac{dH_3}{H_3} = \int_{1-b}^{x_0} F(x_0)dx_0 = \ln\frac{H_2^0}{H_3(x_0)} = \frac{4-\pi}{\pi}\ln\frac{b}{1-x_0},$$

$$\dot{x}_0 = \frac{\dot{p}_{\theta\theta}}{F(x_0)} = \frac{\sqrt{3}A}{2F(x_0)}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{\theta\theta}\Big)^n \times \\ \times \bigg((1-\omega_2)^{m+1} - (m+1)B\int_{t_2}^{t}\sigma_{\theta\theta}^k dt\bigg)^{-\frac{n}{m+1}}; \tag{32}$$

$$\frac{H_2^0}{H_3(x_0)} = \Big(\frac{b}{1-x_0}\Big)^{\frac{4-\pi}{\pi}}, \quad H_3(x_0) = H_2^0\Big(\frac{b}{1-x_0}\Big)^{-\frac{4-\pi}{\pi}}. \tag{33}$$

Окончание третьей стадии происходит при значении x_0^*, соответствующем значению t^*. Интенсивность напряжений определяется соотношением

$$\sigma_u(x_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{q\rho}{H_3(x_0)H_0}\bigg|_{\rho=1-x_0} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\dot{q}t}{H_0}\frac{1-x_0}{H_3(x_0)}. \tag{34}$$

Интенсивность скоростей деформаций ползучести задается соотношением

$$\dot{p}_u = \frac{2}{\sqrt{3}}F(x_0)\frac{dx_0}{dt}.$$

Подставим (33) в (34), затем в (32). С помощью интегрирования дифференциального уравнения (7) при $t > t_2$ выпишем зависимость $\omega(t)$ на третьей стадии процесса деформирования:

$$\omega(t) = 1 - \bigg((1-\omega_2)^{m+1} - (m+1)B\int_{t_2}^{t}\sigma_{\theta\theta}^k dt\bigg)^{\frac{1}{m+1}}.$$

С учетом равенства $\omega(t_3^*) = 1$ для времени разрушения t_3^* получаем

$$(1-\omega_2)^{m+1} = (m+1)B\int_{t_2}^{t_3^*}\sigma_{\theta\theta}^k dt. \tag{35}$$

Вычисление значений $\dot{q}_3$ и t_3^*, соответствующих разрушению в процессе третьей стадии для прилипания, производится аналогично случаю идеального скольжения.

Дифференциальное уравнение (32) решается при $t_2 \leqslant t \leqslant t_3^*$, начальное условие $x_0(t_2) = 1 - b$, конечное значение $t = t_3^*$ удовлетворяет условию (35).

5. Приложение. В качестве примера рассмотрим ползучесть и длительное разрушение прямоугольной мембраны, изготовленной из хромомолибденовой стали 2.15Cr-1Mo steel и деформируемой при 600 °C внутри жесткой матрицы высотой $b = 0.5$.

Химический состав этой стали [13]:

$$\mathrm{C} = 0.06\,\%, \quad \mathrm{Si} = 0.18\,\%, \quad \mathrm{Mn} = 0.48\,\%, \quad \mathrm{P} = 0.008\,\%, \quad \mathrm{S} = 0.008\,\%, \\ \mathrm{Cr} = 2.18\,\%, \quad \mathrm{Mo} = 0.93\,\%, \quad \mathrm{Fe} - \text{баланс}.$$

Материальные константы этой стали, используемые в кинетической модели ползучести и длительной прочности (7), (8), имеют следующие значения [13]:

$$A = 9.17 \cdot 10^{-17} \text{ МПа/ч}, \quad B = 0.91 \cdot 10^{-17} \text{ МПа/ч}, \quad n = 6.0, \quad m = 4.8, \quad k = 6.7.$$

Кроме того, во всех вычислениях в качестве безразмерной начальной толщины мембраны использовано значение $H_0 = 0.01$.

В табл. 1–3 приведены основные характеристики длительного разрушения мембраны на первой, второй и третьей стадиях деформирования соответственно.

Таблица 1

Характеристики длительного разрушения мембраны на первой стадии [Characteristics of long-term destruction of the membrane at the first stage of deformation]

$\dot{q}_1$, MPa/hr	t^*, hr	α^*
700	0.003	0.906
500	0.0046	0.92
300	0.0073	0.925

Таблица 2

Характеристики длительного разрушения мембраны на второй стадии [Characteristics of long-term destruction of the membrane at the second stage of deformation]

$\dot{q}_2$, MPa/hr	x_0^*	t_2^*, hr	$t^* - t_1$, hr	ω_1
case of ideal slip				
250	0.337	0.00865	0.000002	0.894
200	0.435	0.01059	0.00001	0.874
100	0.500	0.01985	0.00009	0.865
case of sticking				
250	0.289	0.00865	0.000003	0.894
200	0.366	0.01059	0.00001	0.874
100	0.408	0.01983	0.00004	0.865
50	0.445	0.037	0.00006	0.858

Таблица 3

Характеристики длительного разрушения мембраны на третьей стадии [Characteristics of long-term destruction of the membrane at the third stage of deformation]

$\dot{q}_3$, MPa/hr	x_0^*	t_3^*, hr	$t^* - t_2$, hr	ω_1	ω_2
case of ideal slip					
50	0.549	0.037	0.00015	0.858	0.925
10	0.787	0.165	0.0066	0.823	0.905
5	0.907	0.405	0.106	0.813	0.898
case of sticking					
20	0.504	0.0851	0.00063	0.841	0.929
10	0.542	0.159	0.0012	0.827	0.923
5	0.587	0.299	0.003	0.813	0.914
1	0.719	1.3	0.024	0.778	0.892
0.1	0.83	10.9	0.75	0.722	0.858
0.01	0.98	164	84.7	0.662	0.812

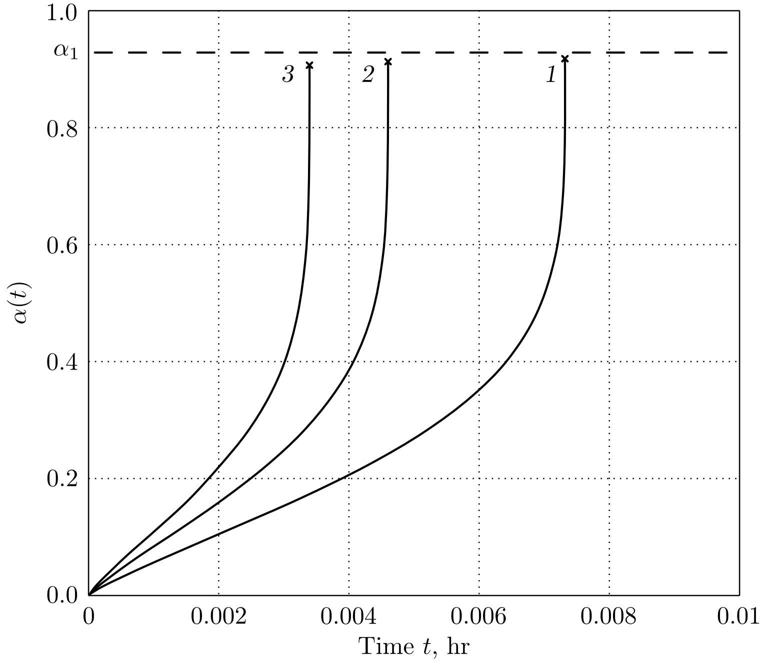

Рис. 5. Зависимость $\alpha(t)$ в процессе первой стадии деформирования мембраны для различных значений скорости $\dot{q}_1$ (в МПа/ч): *1* — $\dot{q}_1 = 300$, *2* — $\dot{q}_1 = 500$, *3* — $\dot{q}_1 = 700$

[Figure 5. Dependence $\alpha(t)$ during the first stage of membrane deformation for different values of the rate $\dot{q}_1$ (in MPa/hr): *1* — $\dot{q}_1 = 300$, *2* — $\dot{q}_1 = 500$, *3* — $\dot{q}_1 = 700$]

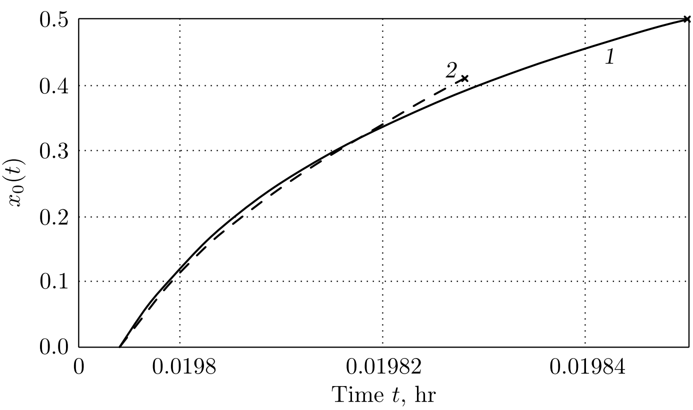

Рис. 6. Зависимость $x_0(t)$ в процессе второй стадии деформирования мембраны для $\dot{q}_1 = 100$ МПа/ч: *1* — при идеальном скольжении; *2* — при прилипании

[Figure 6. Dependence $x_0(t)$ during the second stage of membrane deformation for $\dot{q}_1 = 100$ MPa/hr: *1* — case of ideal slip, *2* — case of sticking]

На рис. 5 приведены вычисленные зависимости угла раствора $\alpha(t)$ мембраны для различных значений скоростей нарастания давления q в процессе первой стадии деформирования мембраны.

На рис. 6 представлена зависимость $x_0(t)$ в процессе второй стадии деформирования мембраны для $\dot{q}_1 = 100$ МПа/ч при при идеальном скольжении (*1*) и при прилипании (*2*). Аналогичные результаты для $x_0(t)$, вычисленные для второй и третьей стадий процесса деформирования мембраны при $\dot{q}_1 = 10$ МПа/ч, представлены на рис. 7.

На рис. 8 в логарифмических координатах приведена зависимость времени до разрушения мембраны t^* от величины $\dot{q}$, полученная при анализе результатов ползучести мембраны на всех трех стадиях. Здесь результаты вычислений на первой стадии обозначены треугольниками, на второй и третьей стадиях при идеальном скольжении результаты вычислений обозначены кружками и цифрой *1*, а при прилипании — крестиками и цифрой *2*.

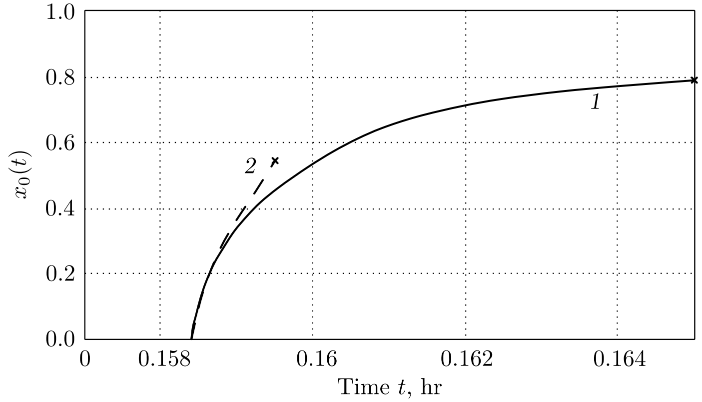

Рис. 7. Зависимость $x_0(t)$ в процессе второй и третьей стадий деформирования мембраны для $\dot{q}_1 = 10$ МПа/ч: *1* — при идеальном скольжении; *2* — при прилипании
[Figure 7. Dependence $x_0(t)$ during the second and third stages of membrane deformation for $\dot{q}_1 = 10$ MPa/hr: *1* — case of ideal slip, *2* — case of sticking]

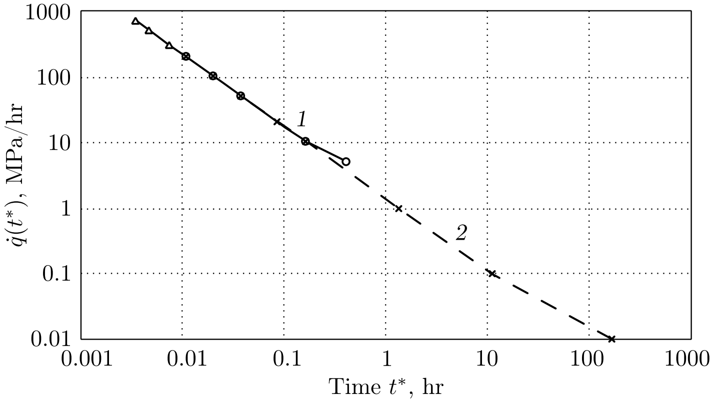

Рис. 8. Зависимость $\dot{q}(t^*)$ в логарифмических координатах: *1* — при идеальном скольжении; *2* — при прилипании
[Figure 8. Dependence $\dot{q}(t^*)$ in logarithmic coordinates: *1* — case of ideal slip, *2* — case of sticking]

Проведем анализ полученных результатов. Для удобства введем обозначения основных характеристик решения: индексом (1) будем обозначать характеристики при идеальном скольжении, индексом (2) — характеристики решения при прилипании. При задании в качестве исходных параметров величины скорости давления $\dot{q}_1$ получены равные значения времен до разрушения на первой стадии в случае скольжения и прилипания: $t^*_{1(1)} = t^*_{1(2)}$. При задании в качестве исходных параметров величины скорости давления $\dot{q}_2$ получены следующие оценки основных характеристик: предельное значение величины x^*_0 в случаях скольжения и прилипания удовлетворяют неравенству $x^*_{0(1)} > x^*_{0(2)}$, аналогично и с временами до разрушения: $t^*_{2(1)} > t^*_{2(2)}$. Значения полученных характеристик при задании скорости $\dot{q}_3$ удовлетворяют следующим неравенствам: $x^*_{0(1)} > x^*_{0(2)}$, $\omega_{3(1)} < \omega_{3(2)}$, $t^*_{3(1)} > t^*_{3(2)}$.

Исходя из вышеизложенного можно сделать вывод, что величины времен до разрушения t^* при одном и том же фиксированном значении скорости нарастания давления $\dot{q}$ удовлетворяют неравенству $t^*_{(1)}(\dot{q}) \geqslant t^*_{(2)}(\dot{q})$.

Заключение. Исследован процесс деформирования узкой мембраны внутри низкой прямоугольной матрицы вплоть до ее разрушения при пропорциональной зависимости величины поперечного давления от времени. Рассмотрены два типа контактных условий: идеальное скольжение мембраны относительно матрицы и прилипание мембраны к матрице. Для описания процесса накопления поврежденности материала мембраны использована кинетическая теория Ю. Н. Работнова, при этом параметр поврежденности материала в данной задаче имеет скалярный характер. Решение системы, состоящей из определяющего и кинетического уравнений, проводится последовательно для первой, второй и третьей стадий деформирования.

В результате решения системы определяющего и кинетического уравнений получены значения параметра поврежденности, накопленной в течение каждой стадии деформирования, а также величины времени до разрушения мембраны (см. табл. 1–3).

Результаты исследования показывают, что в случае разрушения мембраны на первой стадии (оно происходит при высоких скоростях нарастания давления $\dot{q}$) время $t^*(\dot{q})$ не зависит от вида контактных условий, а при разрушении мембраны на второй и третьей стадиях деформирования время t^* в случае идеального скольжения не меньше, чем в случае прилипания.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи; все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 20–80–00387_а).

Библиографический список

1. Качанов Л. М. *Основы механики разрушения.* М.: Наука, 1974. 312 с.
2. Odqvist F. K. G. *Mathematical theory of creep and creep rupture.* Oxford: Clarendon Press, 1974. 200 pp.

3. Storåkers B. *Finite Creep of a Circular Membrane under Hydrostatic Pressure* / Acta polytechnica Scandinavica. Mechanical engineering series. vol. 44. Stocholm: Royal Swedish Acad. of Eng. Sci., 1969. 107 pp.
4. Малинин Н. Н. *Ползучесть в обработке металлов.* М.: Машиностроение, 1986. 216 с.
5. Локощенко А. М. *Ползучесть и длительная прочность металлов.* М.: Физматлит, 2016. 504 с.
6. Локощенко А. М., Терауд В. В., Ахметгалеев А. Ф. Установившаяся ползучесть длинной узкой прямоугольной мембраны внутри жесткой низкой матрицы при кусочно-постоянной зависимости поперечного давления от времени // *ПММ*, 2021. Т. 85, № 6. С. 792–812. EDN: GXKRNA. DOI: https://doi.org/10.31857/S0032823521060084.
7. Ахметгалеев А. Ф., Локощенко А. М., Фомин Л. В. Установившаяся ползучесть длинной узкой прямоугольной мембраны внутри низкой жесткой матрицы при пропорциональной зависимости величины поперечного давления от времени // *Изв. РАН. МТТ*, 2022. № 3. С. 40–55. EDN: QGTMEI. DOI: https://doi.org/10.31857/S0572329922020027.
8. Ефимов А. Б., Романюк С. Н., Чумаченко Е. Н. Об определении закономерностей трения в процессах обработки металлов давлением // *Изв. РАН. МТТ*, 1995. № 6. С. 82–98.
9. Качанов Л. М. О времени разрушения в условиях ползучести // *Изв. АН СССР. Отд. техн. наук*, 1958. № 8. С. 26–36.
10. Работнов Ю. Н. О механизме длительного разрушения / *Вопросы прочности материалов и конструкций.* М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5–7.
11. Работнов Ю. Н. *Ползучесть элементов конструкций.* М.: Наука, 1966. 752 с.
12. Работнов Ю. Н. О разрушении вследствие ползучести // *ПМТФ*, 1963. № 2. С. 113–123.
13. Goyal S., Laha K., Panneer Selvi S., Mathew M. D. Mechanistic approach for prediction of creep deformation, damage and rupture life of different Cr–Mo ferritic steels // *Materials at High Temperatures*, 2014. vol. 31, no. 3. pp. 211–220. DOI: https://doi.org/10.1179/1878641314Y.0000000016.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 4, pp. 715–737
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1938

MSC: 74A05, 74D10

Creep and long-term fracture of a narrow rectangular membrane inside a rigid low matrix with proportional dependence on the transverse pressure on time

A. M. Lokoshchenko[1]***, L. V. Fomin***[1]***,***
A. F. Akhmetgaleev[1]***, D. D. Makhov***[1,2]

[1] Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics,
1, Michurinsky prospekt, Moscow, 119192, Russian Federation.
[2] Lomonosov Moscow State University,
Department of Mechanics and Mathematics,
1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation.

Abstract

In this work, we studied the creep and long-term fracture of a narrow rectangular membrane in confined conditions (inside a rigid low matrix) with a proportional dependence on the magnitude of transverse pressure on time.

Deformation of the membrane is considered as a sequence of three stages. At first stage, the membrane is deformed under free conditions until it touches the transverse side of the rigid matrix. At second stage, the membrane is deformed when it touches the transverse wall of the matrix until it touches its longitudinal walls. At third stage, the membrane is already deformed while simultaneously touching the longitudinal and transverse walls of matrix.

The study is carried out under two types of contact conditions: 1) ideal sliding of the membrane along the walls of the matrix; 2) sticking of the membrane to the walls of the matrix.

The analysis of the gradual long-term fracture of the membrane is carried out using the kinetic theory of creep by Yu. N. Rabotnov, while the parameter of material damage in this problem has a scalar character.

The obtained equations are used to analyze the creep and long-term fracture of a membrane made of 2.15Cr-1Mo steel, which is deformed under variable transverse pressure at a temperature of 600 °C until its destruction.

Mechanics of Solids
Research Article

Please cite this article in press as:
Lokoshchenko A. M., Fomin L. V., Akhmetgaleev A. F., Makhov D. D. Creep and long-term fracture of a narrow rectangular membrane inside a rigid low matrix with proportional dependence on the transverse pressure on time, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 4, pp. 715–737. EDN: EUXYCR. DOI: 10.14498/vsgtu1938 (In Russian).

Authors' Details:

Alexander M. Lokoshchenko https://orcid.org/0000-0002-5462-6055
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor

Leonid V. Fomin https://orcid.org/0000-0002-9075-5049
Cand. Phys. & Math. Sci.; Leading Researcher; Lab. of Creep and Long-Term Strength;
e-mail: fleonid1975@mail.ru

As a result of solving the system of constitutive and kinetic equations, the values of the damage parameter accumulated during each stage of deformation, as well as the time to fracture of the membrane, are obtained. In the case of membrane fracture at the first stage of deformation, the time to fracture at the first stage does not depend on the type of contact conditions, and in the case of membrane fracture at the second and third stages of deformation, the time to fracture in the case of ideal slip is not less than in the case of sticking.

Keywords: rectangular membrane, rigid matrix, variable transverse pressure, creep, long-term fracture, damage parameter, kinetic theory, long-term strength.

Received: 21st June, 2022 / Revised: 30th September, 2022 /
Accepted: 6th October, 2022 / First online: 29th December, 2022

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development; the authors contributed equally to this article. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This study was supported in part by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20–80–00387_a).

References

1. Kachanov L. M. *Osnovy mekhaniki razrusheniia* [Fundamentals of Fracture Mechanics]. Moscow, Nauka, 1974, 312 pp. (In Russian)
2. Odqvist F. K. G. *Mathematical theory of creep and creep rupture*. Oxford, Clarendon Press, 1974, 200 pp.
3. Storåkers B. *Finite Creep of a Circular Membrane under Hydrostatic Pressure*, Acta polytechnica Scandinavica. Mechanical engineering series, vol. 44. Stocholm, Royal Swedish Acad. of Eng. Sci., 1969, 107 pp.
4. Malinin N. N. *Polzuchest' v obrabotke metallov* [Creep in Metal Forming]. Moscow, Mashinostroenie, 1986, 216 pp. (In Russian)
5. Lokoshchenko A. M. *Creep and Long-term Strength of Metals*. Boca, Raton, CRC Press, 2017, xviii+545 pp. EDN: YKQNZJ. DOI: https://doi.org/10.1201/b22242.
6. Lokoshchenko A. M., Teraud W. V., Akhmetgaleev A. F. Steady-state creep of a narrow membrane inside a rigid low matrix, *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, no. 8, pp. 1668–1683. EDN: EIFLHQ. DOI: https://doi.org/10.3103/S0025654421080112.
7. Akhmetgaleev A. F., Lokoshchenko A. M., Fomin L. V. Steady-state creep of a long narrow rectangular membrane inside a low rigid matrix with a proportional dependence of the magnitude of the transverse pressure on time, *Mech. Solids*, 2022, vol. 57, no. 3, pp. 40–55. EDN: VMQFVE. DOI: https://doi.org/10.3103/S0025654422030013.
8. Efimov A. B., Romanyuk S. N., Chumachenko E. N. On the determination of the regularities of friction in the processes of metal forming by pressure, *Mech. Solids*, 1995, no. 6, pp. 82–98 (In Russian).

Alexander F. Akhmetgaleev https://orcid.org/0000-0002-7999-6079
Leading Engineer; Lab. of Elasticity and Plasticity; e-mail: achmet206a@yandex.ru

Denis D. Makhov https://orcid.org/0000-0001-7748-3934
Leading Engineer; Lab. of Creep and Long-Term Strength[1]; Student; Dept. of Mechanics and Mathematics[2]; e-mail: monyamail@yahoo.com

9. Kachanov L. M. Time of the rupture process under creep conditions, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Otd. Techn. Nauk*, 1958, no. 8, pp. 26–36 (In Russian).
10. Rabotnov Yu. N. Mechanism of long-term destruction, In: *Strength of Materials and Structures*. Moscow, USSR Academy of Sciences, 1959, pp. 5–7 (In Russian).
11. Rabotnov Yu. N. *Creep problems in structural members*. Amsterdam, London, North-Holland Publ. Co., 1969, xiv+822 pp.
12. Rabotnov Yu. N. On fracture as a consequence of creep, *Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.*, 1963, no. 2, pp. 113–123 (In Russian).
13. Goyal S., Laha K., Panneer Selvi S., Mathew M. D. Mechanistic approach for prediction of creep deformation, damage and rupture life of different Cr–Mo ferritic steels, *Materials at High Temperatures*, 2014, vol. 31, no. 3, pp. 211–220. DOI: https://doi.org/10.1179/1878641314Y.0000000016.