Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 26, № 3. С. 573–591
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1947
EDN: AWBYGO

УДК 519.115

Вероятностные модели для анализа обратных экстремальных задач комбинаторики

Н. Ю. Энатская

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Московский институт электроники и математики им. А. Н. Тихонова,
Россия, 123458, Москва, ул. Таллинская, 34.

Аннотация

В обратной экстремальной задаче для комбинаторной схемы при заданном значении целевой функции вида определенного экстремального значения ее характеристики строится вероятностная модель, обеспечивающая получения этого значения в ее исходах. Рассматривается два типа таких характеристик, относящихся к каждому или совокупности исходов схемы.

Доасимптотический анализ такой модели проводится авторским перечислительным методом. Его основу составляет построение итерационного случайного процесса с итерациями последовательных этапов нумерованного бесповторного перечисления и формирования исходов схемы. Итерационное развитие процесса представляется вероятностным графом.

Исследование исходов схемы по модели в перечислительном методе проводится по следующим направлениям: визуального нумерованного представления исходов схемы, нахождения их числа, установления взаимно-однозначного соответствия между видами и номерами исходов схемы, получения их (управляемого случайным процессом перечисления исходов схемы) вероятностного распределения и их моделирования с этим распределением.

Наряду с непосредственным исследованием схем по указанным направлениям предлагаются алгоритмы получения результатов для них путем их частичного пересчета из результатов аналогичного анализа более общих, ранее изученных схем с меньшими ограничениями на значения рассматриваемых характеристик.

Ключевые слова: обратная экстремальная задача, экстремальное значение характеристики, доасимптотический анализ схемы.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

Образец для цитирования
Энатская Н. Ю. Вероятностные модели для анализа обратных экстремальных задач комбинаторики // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 3. С. 573–591. EDN: AWBYGO. DOI: 10.14498/vsgtu1947.

Сведения об авторе
Наталия Юрьевна Энатская https://orcid.org/0000-0003-1241-7543
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; деп. прикладной математики;
e-mail: nat1943@mail.ru

Получение: 12 августа 2022 г. / Исправление: 25 августа 2022 г. / Принятие: 31 августа 2022 г. / Публикация онлайн: 20 сентября 2022 г.

1. Введение. В литературе известны экстремальные задачи комбинаторики, состоящие в отыскании среди конечного множества альтернатив одной, отвечающей заданному значению целевой функции[1] (см., например, [1, 2]). В работах [3–5] проводился асимптотический анализ вероятностного поведения максимальных уровней заполнения ячеек в схемах равновероятного размещения различимых частиц по различимым ячейкам с разными условиями.

Здесь (при конечных значениях параметров) изучается процедура построения модели случайного процесса перечисления исходов комбинаторных схем, приводящих к заранее заданным экстремальным (минимальным или максимальным) значениям их определенных характеристик. Такие задачи можно рассматривать как обратные экстремальные задачи комбинаторики с заданными значениями этих характеристик, являющихся целевыми функциями.

2. Постановка задачи. В доасимптотических условиях значений параметров комбинаторной схемы при заданном экстремальном значении его определенной характеристики нужно построить вероятностную модель бесповторного нумерованного перечисления ее исходов и провести их анализ по всем направлениям ПМ.

Основные определения, обозначения и понятия:

E — изучаемая схема с заданным экстремальным значением ее характеристики;

S — начальная схема для схемы E, соответствующая более общей схеме (схему S при пересчете из нее результатов для схемы E считаем изученной);

итерация — шаг перехода в графе перечисления исходов схемы к следующему этапу (шагу) их перечисления;

ПП — процедура прямого перечисления всех исходов схемы с учетом ее специфики;

ПМ — перечислительный метод исследования моделей по приведенным в аннотации направлениям; он состоит в построении вероятностных моделей на формирующих исходы итерационных случайных процессах поединичного добавления этапов перечисления исходов ранее изученных схем с управляемыми (через вероятности итерационных переходов) вероятностными распределениями их исходов;

ЗН — задача нумерации по установлению взаимно-однозначного соответствия между всеми номерами и видами исходов схемы;

ПЗН — прямая задача нумерации, состоящая в нахождении вида исхода схемы по его номеру;

ОЗН — обратная задача нумерации, состоящая в нахождении номера исхода схемы по его виду;

траектория исхода τ — последовательность исходов итераций, ведущая к нему в графе от начала их перечисления;

[1] Классический пример — известная задача коммивояжера: нахождения кратчайшего кольцевого маршрута возвращения в начальный город с посещением заданных городов по разу.

пучок в графе процесса — совокупность переходов из каждого исхода каждой итерации;

размер пучка на каждой итерации — число переходов из каждого исхода итерации;

пучковая структура графа — перечисление размеров пучков всех итераций;

УМ — универсальный (единый) метод моделирования исходов схемы, состоящий в разыгрывании одним случайным числом его номера с сформированным вероятностным распределением исходов схемы и получении его смоделированного вида по результату решения ПЗН.

3. Вспомогательные результаты. Приведем краткие достаточные для дальнейшего чтения сведения основных используемых далее опубликованных результатов.

3.1. Перечислительный метод (ПМ). ПМ разработан для проведения доасимптотического анализа комбинаторных схем, т.е. при конечных значениях их параметров [6]. Его суть состоит в организации получения качественной информации об исходах схемы и переводе ее в количественную — результатов ее анализа. Эта качественная информация представляет собой исходы итерационного случайного процесса реализации комбинаторной схемы в результате последовательного поединичного (итерационного) добавления элементов схемы до заданного параметром значения или этапов перечисления составляющих схему более простых ранее изученных схем. Инструментами такого перевода качественной информации о видах всех исходов схемы являются метод графов (МГ), задача нумерации (ЗН), задание итерационных переходных вероятностей (управляющих распределением итоговых исходов схемы) и универсальное моделирование (УМ) исходов с этим их вероятностным распределением. Одним из важных приемов ПМ для получения новых результатов доасимптотического анализа комбинаторных схем является операция по перечислению (ОПП). Ее введение дает возможность вычисления характеристик схем, зависящих от видов предсостояний исходов при их формировании итерационным случайным процессом как функций от них. Целью применения ПМ является изучение схем E по указанным направлениям.

3.2. Обобщенная схема последовательных действий (ОПД) Под действиями схемы понимаются реализации исходов итераций при последовательном добавлении этапов перечисления всех промежуточных и итоговых исходов схемы.

Схема ОПД с приводимыми здесь результатами анализа из [7] возникает, когда каждому следующему действию (итерации) подвергаются исходы предыдущего действия и числа исходов каждого следующем действия могут быть неодинаковыми, т.е. зависят не только от характера действия, но и от вида предыдущего исхода. Результатом этого являются возможно разные размеры пучков внутри итераций в графе перечисления исходов схемы при переходе от исходов предыдущего действия к последующему.

При анализе схемы ОПД считаем известными результаты всех направлений исследования ПМ составляющих ее комбинаторных схем действий.

В схеме проводится k последовательных действий, i-тое из которых совершается $N^{(i)}$ способами, $i = \overline{1, k}$. Число пучков каждой итерации равно числу исходов предыдущей итерации. Тогда число исходов этих k действий складывается из $N^{(k-1)}$ пучков размерами $\bar{d}^{(i)} = (d_1^{(i)}, d_2^{(i)}, \ldots, d_{N^{(k-1)}}^{(i)})$, т.е. общее число $N = N^{(k)}$ исходов схемы получается из рекуррентного соотношения при $i = k$ и $N = N^{(0)} = 1$

$$N^{(i)} = \sum_{l=1}^{N^{(i-1)}} d_l^{(i)}.$$

Вид исхода после совершения i действий будет формироваться из принятых видов исходов последовательных действий с обозначениями: i — номер действия, а j_i — номер исхода в результате его совершения.

Задача нумерации решается для нашей схемы при решенной ЗН для каждого из k действий при известной пучковой структуре графа перечисления исходов нашей схемы.

Прямая и обратная задачи нумерации решены следующими теоремами

Теорема 1. *Совершается k действий и задан номер исхода $N_*^{(k)}$. Тогда его вид, определяемый номерами исходов траектории τ в содержащих их пучках $\{j_i\}$ от первой до k-той итераций, вычисляется по рекуррентной формуле для j_i:*

$$j_i = N_*^{(i)} - \sum_{l=1}^{N_*^{(i-1)}-1} d_l^{(i)}, \quad i = \overline{1, k},$$

где все пучковые структуры действий $\bar{d}^{(i)}$ заданы и

$$N_*^{(k-1)} = \delta + \max t \ : \ \left(\sum_{l=1}^{t} d_l^{(k)} = A_k \leqslant N_*^{(k)}\right),$$

где $\delta = 0$ при $A_k = N_*^{(k)}$ и $\delta = 1$ при $A_k < N_*^{(k)}$.

По решенной ЗН для всех действий находим по $\{j_i\}$ виды их исходов, из которых получаем искомый вид исхода $R_*^{(k)}$.

Теорема 2. *Совершается k действий и задан вид исхода $R_*^{(k)} = \{j_1, \ldots, j_k\}$. Тогда его номер $N_*^{(k)}$ определяется по рекуррентной формуле при $i = k$, $i = \overline{1, k}$,*

$$N_*^{(i)} = \sum_{l=1}^{N_*^{(i-1)}-1} d_l^{(i)} + j_i,$$

начиная с $i = 1$ при $N_*^{(1)} = j_1$.

4. Два типа характеристик в схемах *E*. Будем различать два типа характеристик T — типа A и типа B:

1) характеристика типа A для исхода схемы — определяемая и сравниваемая внутри исхода схемы и принимающая в нем $\geqslant 1$ значений;
2) характеристика типа B для совокупности исходов схемы — однозначно определяемая каждым исходом схемы и используемая для ее сравнения в совокупности исходов.

Процедура прямого перечисления всех исходов схемы в этих случаях проводится по-разному.

В первом случае перечисляются все исходы, каждый из которых включает в себя часть, фиксирующую заданное экстремальное значение характеристики с добавлением всех вариантов остальной его части. Тогда все перечисляемые таким образом исходы схемы будут иметь заданное экстремальное значение характеристики.

Во втором случае перечисляются все исходы схемы со значениями характеристики T до ее заданного экстремального значения t включительно, т.е. при задании ее максимального значения t — все исходы со значениями $T \leqslant t$, а при задании ее минимального значения t — все исходы со значениями $T \geqslant t$. Тогда данная характеристика совокупности всех перечисленных исходов схемы будет иметь заданное экстремальное значение.

5. Примеры процедур перечисления исходов схем и определения их численностей в схемах *E*. Приведем примеры описания конкретных схем E с разными указанными типами экстремальных характеристик их исходов.

Схемы типа A с фиксацией экстремального значения характеристики исходов первого типа — типа A:

A.1. Схема перестановок с фиксированной максимальной (минимальной) длиной серии поединично растущих (убывающих) элементов.

A.2. Схема перестановок с фиксированной максимальной (минимальной) длиной серии растущих (убывающих) элементов.

A.3. Схема перестановок с фиксированной максимальной (минимальной) разностью между ее соседними элементами.

A.4. Схема подстановок с фиксированным максимальным (минимальным) размером цикла.[2]

A.5. Схемы размещения частиц по ячейкам с фиксированным значением максимального (минимального) уровня заполнения ячеек.

Схемы типа B с фиксацией экстремального значения характеристики исходов второго типа — типа B:

B.1. Схема перестановок с фиксированным максимальным (минимальным) числом инверсий.[3]

B.2. Схема подстановок с фиксированным максимальным (минимальным) числом циклов.

B.3. Схема перестановок с фиксированным максимальным (минимальным) элементом на фиксированном месте.

B.4. Схема перестановок с фиксированной максимальной (минимальной) длиной серии поединично растущих (убывающих) элементов начиная с данного.

B.5. Схема перестановок с фиксированной максимальной длиной серии без инверсий начиная с данного элемента.

B.6. Схема сочетаний с фиксированным максимальным (минимальным) размахом.[4]

---

[2]Цикл подстановки — перестановка подмножества элементов подстановки в порядке их последовательных отображений с замыканием, т.е. последний элемент перестановки отображается в первый. Размер цикла — число входящих в него элементов.

[3]Число инверсий элемента перестановки равно числу бóльших ее элементов, стоящих правее, а число инверсий перестановки есть сумма инверсий всех ее элементов.

$B.7$. Схема сочетаний с фиксированным максимальным (минимальным) элементом.

$B.8$. Схема сочетаний с фиксированным максимальным (минимальным) числом элементов из данного диапазона значений элементов исхода схемы.

Подобных примеров схем E можно привести много, а анализ каждого требует отдельного рассмотрения, начальным этапом которого является построение процедуры прямого перебора исходов с учетом природы каждой схемы. Здесь для примера приведем идеи прямого перечисления исходов комбинаторных схем E в некоторых наиболее простых случаях (в основном в схемах типа B). Все другие схемы E, требующие более сложных ПП исходов схем с более глубоким погружением в их специфику, оставим для отдельных исследований.

Примеры получения формул для чисел N исходов схем из их ПП (с указанием типа схемы в скобках). Для получения аналитических результатов исследования схемы E требуется построение процедуры бесповторного ПП ее исходов методом графов. Она отражает закономерности связей между номерами и видами исходов, выявление которых составляет результаты решения ЗН, необходимые для дальнейшего исследования схемы E по определенным здесь направлениям. Поэтому бесповторное ПП исходов схемы дает основу для проведения аналитического изучения схемы и является первой целью рассмотрения схем E. Однако это потребует отдельного анализа каждой конкретной схемы E с учетом ее специфики.

Все N исходов схем типа A представляют совокупность исходов с достижением характеристикой заданного экстремального значения t в каждом исходе.

Все N исходов схем типа B состоят из двух совокупностей — первая из исходов с достижением характеристикой заданного экстремального значения t и вторая — на не противоречащих этому экстремальному значению t без его достижения.

Введем обозначения для параметров схем в следующих ниже примерах, называя нумерованные элементы их номерами:

- в схеме сочетаний производится выбор из n различимых элементов по r без возвращения и без учета их порядка, тогда число исходов схемы равно C_n^r;
- в схеме перестановок производится выбор из n различимых элементов по n без возвращения и с учетом их порядка, тогда число исходов схемы равно $n!$.[5]

Пример 1 (Тип B). Схема сочетаний с параметрами n, r и с фиксированным минимальным элементом $T = t \leqslant (n - r + 1)$.

ПП: Для перечисления первой совокупности исходов включаем в выборку элемент t с добавлением выборок по схеме сочетаний остальных $(r-1)$ элементов из $(n-t)$ элементов от $(t+1)$ до n числом способов C_{n-t}^{r-1}, а для второй совокупности исходов набираем всю выборку из элементов $> t$ числом способов C_{n-t}^r, откуда $N = C_{n-t}^{r-1} + C_{n-t}^r$.

[4] Размах в исходе схемы сочетаний — разность между его максимальным и минимальным элементами.

[5] Перечисления исходов схем сочетаний, перестановок и ОПД см. в [7].

Пример 2 (Тип B). Схема сочетаний с параметрами n, r и с фиксированным максимальным элементом $T = t \geqslant r$.

ПП: Для перечисления первой совокупности включаем в выборку элемент t с добавлением выборок по схеме сочетаний остальных $(r-1)$ элементов из $(t-1)$ элемента от 1 до $(t-1)$ числом способов C_{t-1}^{r-1}, а для второй совокупности исходов набираем всю выборку из элементов $< t$ числом способов C_{t-1}^{r}, откуда $N = C_{t-1}^{r-1} + C_{t-1}^{r}$.

Пример 3 (Тип B). Схема сочетаний с параметрами n, r и с фиксированным минимальным числом $T = t$ элементов от 1 до s, где $\max(0, s-n+r) \leqslant \leqslant t \leqslant \min(s, r) = k$.

ПП: Включаем в совокупность исходов схемы все выборки по схеме сочетаний из элементов от 1 до s по t, а остальные $(r-t)$ элементов — по схеме сочетаний из элементов от $(s+1)$ до n числом способов $C_s^t C_{n-s}^{r-t}$. Далее, варьируя значение i (число вошедших в выборку элементов от 1 до s) от t до k, получаем перечисление всей искомой совокупности с общим числом исходов $N = \sum_{i=t}^{k} C_s^i C_{n-s}^{r-i}$.

Пример 4 (Тип B). Схема сочетаний с параметрами n, r и с фиксированным максимальным числом $T{=}t$ элементов от 1 до s, где $k = \max(0, s{-}n{+}r) \leqslant \leqslant t \leqslant \min(s, r)$.

ПП: Включаем в совокупность исходов схемы все выборки по схеме сочетаний из элементов от 1 до s по t, а остальные $(r-t)$ элементов — по схеме сочетаний из элементов от $(s+1)$ до n числом способов $N_t = C_s^t C_{n-s}^{r-t}$. Далее, варьируя значение i (число вошедших в выборку элементов от 1 до s) от k до t, получаем перечисление всей искомой совокупности с общим числом исходов $N = \sum_{i=k}^{t} C_s^i C_{n-s}^{r-i}$.

Пример 5 (Тип A). Размещение r неразличимых частиц по n различимым ячейкам с фиксированным минимальным уровнем $T = t$, $r \geqslant tn$ заполнения ячеек.

ПП: По схеме сочетаний C_n^i способами выбираем i ячеек из n. По этим i ячейкам размещаем $(r-nt)$ частиц без пустых ячеек по схеме сочетаний с повторением числом способов C_{r-nt-1}^{i-1} с последующим добавлением остальных nt частиц по t частиц в каждую из n ячеек при возможных значениях i в диапазоне $k = \max(0, n-r+nt) \leqslant i \leqslant \min(n-1, r-nt) = K$. Варьируя все эти значения i из $[k, K]$ и суммируя соответствующие им числа исходов, получаем число исходов схемы $N = \sum_{i=k}^{K} C_n^i C_{r-nt-1}^{i-1}$ с достижением значения $T = t$ в каждом исходе.

Пример 6 (Тип B). Схема перестановок элементов с номерами от 1 до n с фиксированной минимальной длиной $T = t$ серии, начиная с 1, подряд идущих элементов.

ПП: Переставляем данную серию длиной t элементов как один номер с остальными $(n-t)$ элементами по схеме перестановок числом способов $N = (n-t+1)!$ и перечисляем их по схеме перестановок [4]. Тогда все перечисленные исходы схемы будут содержать серию заданного вида или длины $> t$, если сразу после нее стоит элемент $(t+1)$, или содержать серию длины, равной t, в противном случае, т.е. минимальная длина серии в перечисленных исходах схемы будет равна t.

Пример 7 (Тип B). Схема перестановок элементов с номерами от 1 до n с фиксированной максимальной длиной $T = t$ серии, начиная с 1, подряд идущих номеров.

ПП: В совокупности исходов нашей схемы длины i серий данного вида $\leqslant t$. Переставляем данную серию из i элементов как один элемент с остальными $(n-i-1)$ элементами без элемента $(i+1)$ по схеме перестановок числом способов $(n-i)!$ и перечисляем их по схеме перестановок. Далее вставляем элемент $(i+1)$ в перестановке до, между и после всех элементов полученных перестановок, кроме места сразу после последнего элемента серии. Число таких мест для него есть $(n-i)$, откуда получаем число исходов $(n-i)!(n-i)$. Теперь, варьируя длину i серии от 1 до заданного t и объединяя все такие исходы, получаем все исходы нашей схемы численностью $N = \sum_{i=1}^{t}(n-i)!(n-i)$. Тогда максимальная длина серии полученной совокупности исходов окажется равной t.

6. Решение ЗН в схемах *E*. Решение ЗН в схемах E проводится как непосредственным выявлением закономерностей связи при бесповторном ПП между видами и номерами ее исходов для каждой конкретной схемы отдельно с учетом ее специфики, так и пересчетом ранее полученных для нее результатов решения ЗН для начальной схемы S. Представим эти два подхода к решению ЗН на конкретных примерах.

6.1. Первый подход к решению ЗН. Рассмотрим по одному примеру решения ЗН для схем E с заданными экстремальными значениями характеристик двух введенных типов через результаты решения ЗН составляющих их схем.

Пример 8 (Тип A). Дана схема подстановок размера $n = 5$, максимальный размер цикла $T = 2$. Провести прямое перечисление исходов схемы и решить ЗН.

Построим процедуру перечисления исходов схемы типа A. Это значит, что исходы схемы будут включать в себя все подстановки с размерами циклов $\leqslant 2$ с достижением размера 2 в каждом исходе.

Исходы схемы различаются наборами допустимых размеров циклов, их составами и порядками отображений в них.

Процедура прямого перечисления всех исходов схемы проводится тремя итерациями (этапами):

1) набором составов допустимых размеров циклов;
2) перечислением составов элементов в этих циклах;
3) перебором порядков отображений в циклах.

Очевидно, что здесь возможны два варианта наборов первой итерации размеров циклов $(2,2,1)$ и $(2,1,1,1)$, в каждом из которых порядок перечисления составов циклов совпадающих размеров циклов несущественен, а при $T = 2$ порядок отображений на 3-й итерации у них единственный.[6] Поэтому процедура бесповторного ПП исходов схемы при каждом наборе их размеров сводится к делению всеми способами всех 5-ти элементов между циклами по этим наборам в заранее определенном порядке. Будем их перечислять, например, в порядке убывания их размеров, а среди циклов совпадающих размеров

[6] Число перестановок в порядке отображений из m элементов есть $(m-1)!$ с фиксированным начальным элементом, при $m = 2$ имеем $(m-1)! = 1! = 1$.

(для бесповторности перечисления составов циклов) — в порядке роста минимальных элементов в них начиная с минимального в каждом составе цикла. Поэтому состав каждого цикла должен начинаться с минимального элемента подстановки из не вошедших в предыдущие циклы. Представим графом на рис. 1 процесс формирования и перечисления исходов схемы начиная с первой итерации при начальных исходах схемы совокупностей составов исходов циклов (по схемам сочетаний) с их размерами $(2,2,1)$ и $(2,1,1,1)$ с подряд идущей общей нумерацией. Численности исходов схемы с каждым составом размеров циклов вычисляются по схеме перестановки с повторением (представляемой через схемы сочетаний [7]) без учета порядка совпадающих по размеру циклов. Они вычисляются делением числа исходов каждой схемы перестановок с повторением [7] на произведение факториалов чисел повторов размеров циклов. Это и будет учитывать неразличимость их порядков. Тогда получаем соответственно числа исходов из данных начальных составов размеров циклов $N_1 = 5!/(2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 2!) = 15$, $N_2 = 5!/(2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 3!) = 10$ с общим числом исходов $N = N_1 + N_2 = 25$. Здесь $N_1 = 15$ и $N_2 = 10$ — размеры пучков предытоговой итерации, объединяющих наборы всех циклов в один этап перечисления исходов по каждому набору их размеров.

Считая решенной ЗН для этапов, составляющих нашу схему, и имея полный перечень всех исходов схемы и их пучковую структуру, будем решать ЗН, сверяя результаты с рис. 1.

Прямая ЗН. Номер исхода схемы $N_E^* = 18$. Требуется найти его вид R_E^*. По рис. 1 $R_E^* = (1,4)(2)(3)(5)$. Найдем его из условий схемы ОПД по теореме 1:

1) на первой итерации найдем номер k_1 пучка, содержащего искомый исход схемы $k_1 = 2$, т.к. $15 < 18$;
2) найдем номер k_2 искомого исхода во втором пучке $k_2 = 18 - 15 = 3$;
3) из результата решения прямой ЗН для второго этапа перечисления исходов схемы с составом размеров циклов $(2,1,1,1)$ по номеру исхода $k_2 = 3$ находим $R^{(2)} = R_E^* = (1,4)(2)(3)(5)$ (в соответствии с принятым порядком нумерации исходов при их перечислении), что совпадает с результатом по рис. 1.

Обратная ЗН. Вид исхода схемы $R_E^* = (1,4)(2)(3)(5)$. Требуется найти его номер N_E^*. По рис. 1 $N_E^* = 18$. Найдем его из условий схемы ОПД по теореме 2:

1) на первой итерации по составу размеров циклов найдем номер k_1 пучка, содержащего искомый исход схемы, по размерам его пучков — у нас $k_1 = 2$;
2) по обратной ЗН во втором пучке для второй составляющей схемы с составом размеров циклов $(2,1,1,1)$ находим k_2 его номер в пучке $k_2 = 3$;
3) искомый номер N_E^* по теореме 2 находим как сумму размеров предшествующего пучка и k_2, т.е. $N_E^* = 15 + 3 = 18$, что совпадает с результатом по рис. 1.

Пример 9 (Тип B). Дана схема сочетаний из $n = 9$ по $r = 3$ с максимальным размахом $V = 4$. Исходы схемы сочетаний перечисляются в возрастаю-

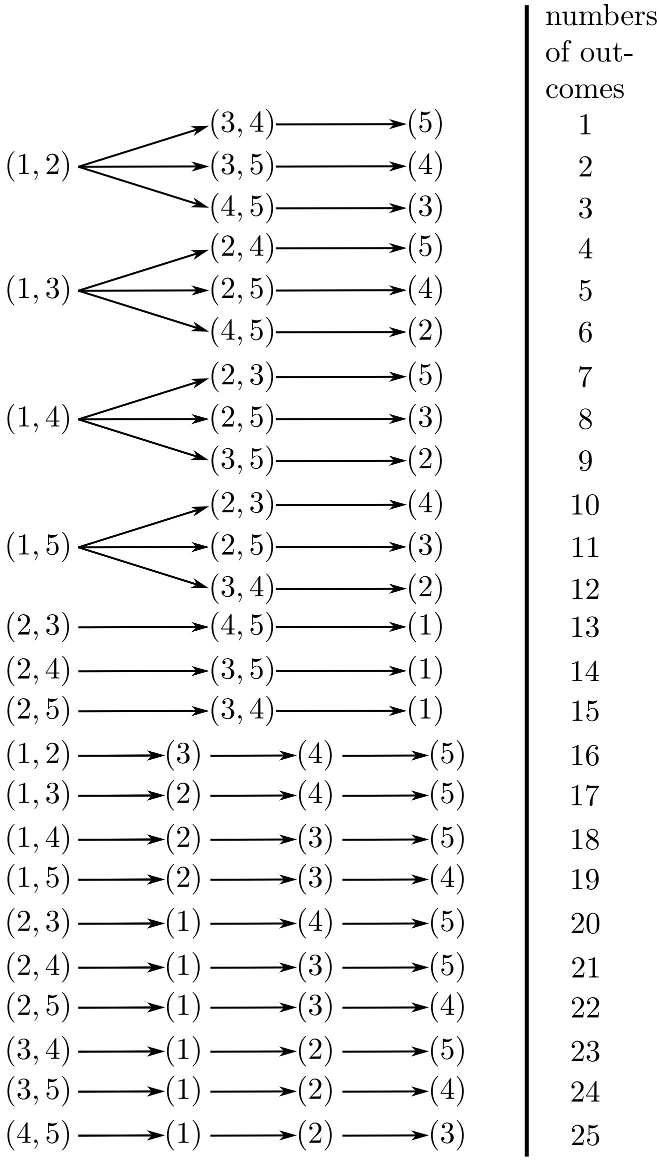

Рис. 1. Граф перечисления исходов схемы примера 8
[Figure 1. Outcomes enumeration graph for the scheme in Example 8]

щем порядке номеров ее элементов.[7] Провести прямое перечисление исходов схемы и решить ЗН.

Построим процедуру перечисления исходов схемы типа B. Это значит, что исходы схемы будут включать все исходы схемы сочетаний с размахами выборок $\leqslant 4$.[8]

ПП исходов схемы проводится 2-мя итерациями:

---

[7]Размах исхода схемы сочетаний равен разности номеров последнего и первого элементов.

[8]Номера элементов называем их значениями.

– первая перечисляет допустимые поединично растущие значения первых элементов и для каждого из них — поединично растущие допустимые значения третьих элементов;
– вторая производит варьирование возможных значений вторых элементов в диапазоне: больше первого и меньше третьего их значений.

Получаем следующие размеры пучков первой итерации: $N_1 = 6$, $N_2 = 6$, $N_3 = 6$, $N_4 = 6$, $N_5 = 6$, $N_6 = 3$, $N_7 = 1$, составляющих исходы итоговой итерации — всего 34 исхода.

Представим это графом на рис. 2 в качестве исходов схемы 7-ми пучков начальной итерации в указанном выше порядке подряд с общей нумерацией.

Теперь по результатам ЗН для ОПД (п. 3.2) и имея полный перечень всех исходов схемы и их пучковую структуру, будем решать ЗН, сверяя результаты с рис. 2.

ПЗН. Номер исхода схемы $N_E^* = 14$. Требуется найти его вид R_E^*. По рис. 2 $R_E^* = (3, 4, 6)$. Определим его из условий схемы ОПД по теореме 1:

1) найдем номер k_1 пучка искомого исхода схемы $k_1 = 3$, т.к. $6+6 = 12 < < 14 < 6 + 6 + 6 = 18$;
2) его номер k_2 в пучке найдем из $k_2 = 14 - (6 + 6) = 2$, вычитая из $N_E^* = 14$ суммарный размер двух предшествующих пучков итерации;
3) по результату решения ПЗН в схеме третьего пучка находим его вид второго исхода, являющийся итоговым для изучаемой схемы $R_E^* = = (3, 4, 6)$, что совпадает с результатом по рис. 2.

ОЗН. Вид исхода схемы $R_E^* = (3, 4, 6)$. Требуется найти его номер N_E^*. По рис. 2 $N_E^* = 14$. Найдем его из условий схемы по теореме 2:

1) по первому элементу вида $R_E^* = (3, 4, 6)$ находим номер $k_1 = 3$ пучка искомого исхода схемы;
2) его номер $k_2 = 2$ в пучке находим из результата обратной ЗН в схеме третьего пучка;
3) вычисляем искомый номер $N_E^* = (6+6)+2 = 14$, суммируя номер $k_2 = 2$ исхода в пучке с суммарным размером предшествующих пучков этой итерации, что совпадает с результатом по рис. 2.

6.2. Второй подход к решению ЗН. Исходы схемы E могут стоять на любых местах в перечислении исходов схемы S.

Прямая ЗН. Дан N_E^*, требуется найти R_E^*.

Алгоритм 1.

1. Проверяем исходы схемы S на выполнение в них условия схемы E и считаем число A таких проверок, просматривая их с начала подряд до N_E^*-го выполнения включительно.
2. По результату ПЗН в схеме S находим в ней вид исхода R_S^* с номером $N_S^* = A$, совпадающий с искомым видом R_E^* в схеме S после его записи в форме исходов в схеме E.

Обратная ЗН. Дан R_E^*, требуется найти N_E^*.

Алгоритм 2.

1. Записываем все исходы схемы S в форме исходов схемы E.
2. При просмотре исходов схемы S подряд с начала их перечисления сравниваем их с данным видом исхода R_E^*, считая число A таких сравнений до совпадения $R_S^* = R_E^*$ (включительно).

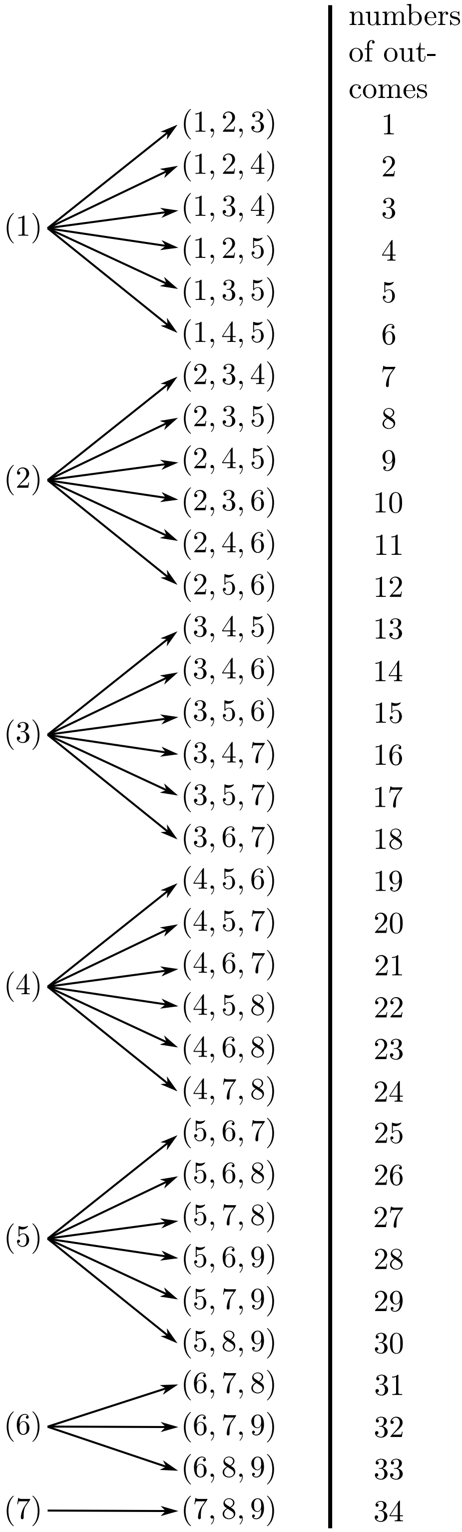

Рис. 2. Граф перечисления исходов схемы примера 9
[Figure 2. Outcomes enumeration graph for the scheme in Example 9]

3. Первые A исходов схемы S проверяем на выполнение в них условия схемы E и считаем число таких выполнений совпадающим с искомым номером N_E^*.

7. Вероятностное распределение исходов схем *E*. Вероятностное распределение исходов схемы E пересчитывается из вероятностного распределением схемы S по вероятностям траекторий графа перечисления исходов схемы S, ведущих к исходам схемы E после удаления из начального графа лишних для E траекторий и пропорционального пересчета по пучкам каждой итерации вероятностей итерационных переходов. Эта процедура описана в перечислительном методе в [6, 7].

8. Моделирование исходов схем *E*. При решенной ЗН для схем E с учетом специфики каждой при определенном распределении вероятностей всех исходов схемы, по которому и результатам ПЗН может быть проведено универсальное моделирование (УМ) исходов схемы. Оно состоит в том, что для моделирования каждого исхода его номер (в перечислении) разыгрывается случайным числом с заданным вероятностным распределением, а по нему из результата решения ПЗН определяется его смоделированный вид. Эта процедура описана в перечислительном методе в [6, 7].

9. Примеры областей применения схем *E* с примером анализа по ПМ. Примеры областей применения схем E:

1) в математических исследованиях, например, а) деления целого числа на определенное количество целых слагаемых с их заданным минимальным значением; б) деления целого числа на целые слагаемые в заданном минимальном количестве;
2) при составлении расписаний разного рода мероприятий с заданными экстремальными значениями их характеристик, например, недельного расписания определенного числа аудиторных часов занятий преподавателя с заданной максимальной нормой присутственных часов на работе в течение рабочего дня института;
3) в криминалистике при проведении следственных действий по свидетельским показаниям, связанным с экстремальными значениями характеристик числовых последовательностей, например, для построения полного перечисления номеров автомобилей с заданной минимальной цифрой.

Пример анализа схемы 1 (тип А) по ПМ. Рассматривается схема деления целого числа r на n слагаемых с каждым слагаемым $\geqslant k$ при $r \geqslant rn$. В наглядных терминах размещения частиц по ячейкам она соответствует схеме размещения r неразличимых частиц по n неразличимым ячейкам с минимальным уровнем заполнения ячеек k при $r \geqslant rn$. Вид исхода схемы представляет собой перечисление уровней заполнения ячеек $\bar{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_i, \ldots, \eta_n)$ (это учитывает неразличимость частиц) в заранее заданном порядке, например, в порядке неубывания этих уровней (это учитывает неразличимость ячеек).

Алгоритм 3 перечисления исходов схемы.

1. Во все ячейки кладем по k неразличимых частиц, а остальные $r - nk$ неразличимые частицы размещаем всеми $N^* = C_{r-nk+n-2}^{n-2}$ способами по схеме сочетаний с повторением по различимым ячейкам со второй ячейки до n-й (этим на первом месте оставляем минимальный уро-

вень заполнения ячеек, равный k). В результате получаем места $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_{n-2})$ расстановки $(n-2)$ внутренних границ ячеек между лежащими в ряд $r^* = r - nk$ частицами, т.е. среди $r - nk + n - 2$ общего числа мест границ и частиц.

2. Переводим результат п. 1 в термины $\bar{\eta}$ по формулам

$$\eta_1 = k, \quad \eta_i = k + v_{i+1} - v_i - 1, \quad i = \overline{2, n}.$$

3. Упорядочиваем результаты п. 2 по неубыванию уровней заполнения ячеек с отбраковкой повторов — получаем бесповторное перечисление исходов нашей схемы.

Теорема 3. *Число N исходов схемы определяется по формуле*

$$N = \sum_{(\{\bar{\mu}\})} I(\mu_i),$$

где суммирование (ОПП) производится по перечислению маркировок составов уровней заполнения ячеек в исходах схемы по их совпадениям:

$$\bar{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_s), \quad s \leqslant n,$$

а $I(Z) = 1$ при $Z > 0$ и $I(Z) = 0$ при $Z = 0$.

Доказательство. Искомое N есть число разных вышеописанных составов уровней заполнения ячеек — результатов п. 3 алгоритма 3 упорядоченных наборов уровней заполнения ячеек в исходах схемы сочетаний с повторением с минимальным уровнем заполнения ячеек, равным k. Оно совпадает с числом ненулевых частот при их маркировке. Тогда число N исходов схемы записывается доказываемой формулой. □

Остальные направления исследования схемы проводятся по общим вышеприведенным методикам.

Разберем численный пример расчета данной схемы по всем направлениям ПМ.

Пример 10. Пусть в нашей схеме $n = 3$, $r = 10$, $k = 2$.

Проведем ПП исходов схемы по шагам алгоритма 3:

1) $r - nk = 4$, $N^* = C^1_{4+2-1} = C^1_5 = 5$ — это исходы мест 1, 2, 3, 4, 5 одной внутренней границы двух ячеек;

2) приводящие соответственно к исходам схемы в форме наборов уровней заполнения ячеек:

$$(2,2,2) + (0,0,4) = (2,2,6); \quad (2,2,2) + (0,1,3) = (2,3,5);$$

$$(2,2,2) + (0,2,2) = (2,4,4); \quad (2,2,2) + (0,3,1) = (2,5,3);$$

$$(2,2,2) + (0,4,0) = (2,6,2);$$

3) после требуемого упорядочивания с отбраковкой повторов получаем $N = 3$ исхода схемы: $(2,2,6)$, $(2,3,5)$, $(2,4,4)$.

Вычислим значение N по теореме 3. Для этого промаркируем упорядоченные исходы схемы по их совпадениям — получим частоты $(2,2,1)$ соответствующих повторяющихся исходов схемы $(2,2,6)$, $(2,3,5)$ и $(2,4,4)$, откуда по теореме 3 получаем $N = I(2)+I(2)+I(1) = 3$, что совпало с полученным выше результатом.

Решение ЗН. Применим прием решения ЗН для данной схемы E из результатов ее решения в более общей схеме S с тем же минимальным уровнем заполнения ячеек без обязательного его достижения в каждом исходе и с учетом взаимных порядков ячеек. Перечисление ее исходов определяется в дополнительной схеме D уровнями заполнения трех различимых ячеек при размещении по ним четырех неразличимых частиц по схеме сочетаний с повторением с числом исходов $C_6^2 = 15$. Перечисление этих исходов в порядке перечисления исходов схемы сочетаний (см. [7]) означает расстановку всеми способами двух внутренних границ ячеек между лежащими в ряд четырьмя неразличимыми частицами, т.е. выбор двух мест среди шести мест для четырех частиц и двух границ. В терминах этих мест записываем исходы:

$$(1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (1,5),\ (1,6),$$
$$(2,3),\ (2,4),\ (2,5),\ (2,6),\ (3,4),$$
$$(3,5),\ (3,6),\ (4,5),\ (4,6),\ (5,6).$$

Переводим их в термины уровней заполнения ячеек по формулам п. 2 алгоритма 3 — получаем в порядке перечисления исходов схемы сочетаний видов

$$(0,0,4),\ (0,1,3),\ (0,2,2),\ (0,3,1),\ (0,4,0),\ (1,0,3),\ (1,1,2),\ (1,2,1),$$
$$(1,3,0),\ (2,0,2),\ (2,1,1),\ (2,2,0),\ (3,0,1),\ (3,1,0),\ (4,0,0)$$

в этой дополнительной схеме D. Итоговые исходы схемы S в виде уровней заполнения трех ячеек в порядке ячеек находим сложением по трем ячейкам уровней в исходах схемы D с предварительными уровнями по две частицы в каждой из трех ячеек. Приходим к перечислению исходов в схеме S:

$$(2,2,6),\ (2,3,5),\ (2,4,4),\ (2,5,3),\ (2,6,2),\ (3,2,5),\ (3,3,4),\ (3,4,3),$$
$$(3,5,2),\ (4,2,4),\ (4,3,3),\ (4,4,2),\ (5,2,3),\ (5,3,2),\ (6,2,2).$$

Прямая ЗН. Дан $N_E^* = 3$, требуется найти R_E^*.

По алгоритму 1:

1) $A = N_S^* = N_E^* = 3$;
2) отсюда по ПЗН для исходов схемы S получаем вид третьего исхода схемы S: $R_S^* = R_E^* = (2,4,4)$, что совпадает с полученным выше по ПП результатом.

Обратная ЗН. Дан $R_E^* = (2,4,4)$, требуется найти N_E^*.

По алгоритму 2:

1) получаем исходы схемы S в порядке неубывания уровней заполнения ячеек:

$$(2,2,6),\ (2,3,5),\ (2,4,4),\ (2,3,5),\ (2,2,6),\ (2,3,5),\ (3,3,4),\ (3,3,4),$$
$$(2,3,5),\ (2,4,4),\ (3,3,4),\ (2,4,4),\ (2,3,5),\ (2,3,5),\ (2,2,6);$$

2) $A = 3$;

3) в первых трех исходах выполняется условие схемы E, откуда получаем $N_E^* = 3$, что совпадает с полученным выше по ПП результатом.

Вероятностное распределение исходов схемы. Определим вероятности исходов нашей схемы E при равновероятных исходах схемы S. Исходы схемы E отличаются от исходов схемы S обязательным достижением в каждом исходе минимального значения 2 уровня заполнения ячеек и несущественностью порядка перечисления уровней их заполнения. Поэтому из перечисления исходов схемы S с вероятностями исходов по $1/C_6^2 = 1/15$, однозначно соответствующих исходам схемы D, удаляем исходы, полученные из них без пустых ячеек. Это исходы

$$(3,3,4),\ (3,4,3),\ (4,3,3)$$

без достижения заданного минимального уровня заполнения ячеек, равного двум. В результате пропорционального пересчета по [6] получаем вероятности оставшихся исходов схемы S по $1/12$. Для учета несущественности порядка перечисления вероятностей составов уровней заполнения ячеек в исходах схемы E для их вычисления кратно (числу разных порядков каждого состава этих уровней в схеме S) увеличиваем их вероятности:

$$P(2,2,6) = 3 \cdot (1/12) = 0.25; \quad P(2,3,5) = 3! \cdot (1/12) = 0.5;$$

$$P(2,4,4) = 3 \cdot (1/12) = 0.25.$$

Проверка на распределение: $P(2,2,6) + P(2,3,5) + P(2,4,4) = 1$.

Моделирование исхода схемы. Разыгрываем номер X исхода нашей схемы E в порядке их перечисления с полученным вероятностным распределением по ряду распределения:

$$P(X=1) = 0.25; \quad P(X=2) = 0.5; \quad P(X=3) = 0.25.$$

Для этого датчиком случайных чисел генерируем значение случайной величины с равномерным распределением на отрезке $[0,1]$. Пусть это число $0.78 \in (0.75, 1])$. По результату решения ПЗН это значит, что смоделирован третий исход нашей схемы $R = (2,4,4)$.

10. Заключение. Введен новый класс обратных экстремальных задач комбинаторики на комбинаторных схемах E с фиксированными экстремальными значениями характеристик двух типов, относящихся к исходам и сравниваемых внутри каждого исхода, или — к совокупности исходов и сравниваемых между исходами.

Анализ схем E проведен новым перечислительным методом (ПМ) (см. [6]), состоящим в организации получения качественной информации об их исходах и ее переводе в количественные результаты по направлениям: явного прямого бесповторного нумерованного перечисления исходов схем, вычисления их числа, решения для них ЗН в прямой и обратной постановках, установления их вероятностного распределения и построения процедуры их моделирования.

В схемах E предложено два подхода к решению ЗН: прямым перечислением их исходов по схеме ОПД (см. [6]) и пересчетом результатов решения ЗН для исходов соответствующих начальных схем S.

Моделирование исходов схемы из E предложено проводить в ПМ универсальным моделированием (УМ) с вероятностным распределением ее исходов, найденным из установленного случайным процессом соответствующего вероятностого распределения исходов в ее начальной схеме S в ПМ, по результату решения прямой ЗН для исходов изучаемой схемы E.

Обсуждены примеры областей использования схем E. По всем направлениям ПМ проведен анализ конкретного примера решения математической задачи.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Афанасьев М. Ю., Суворов Б. П. *Исследование операций в экономике. Модели, задачи, решения.* М.: ИНФРА-М, 2003. 202 с.
2. Баранов В. И., Стечкин Б. С. *Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения.* М.: Физматлит, 2004. 240 с.. EDN: RXGTQD.
3. Колчин В. Ф. О предельном поведении крайних членов вариационного ряда в полиномиальной схеме // *Теория вероятн. и ее примен.*, 1969. Т. 14, № 3. С. 476–487.
4. Хакимуллин Е. Р. О предельном поведении максимального заполнения в равновероятной схеме размещения частиц комплектами // *Матем. заметки*, 1981. Т. 30, № 2. С. 277–289.
5. Викторова И. И. Об асимптотическом поведении максимума в равновероятной полиномиальной схеме // *Матем. заметки*, 1969. Т. 5, № 3. С. 305–316.
6. Энатская Н. Ю. Вероятностные модели комбинаторных схем // *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование*, 2020. Т. 13, № 3. С. 103–111. EDN: DKMIUC. DOI: https://doi.org/10.14529/mmp200312.
7. Энатская Н. Ю. Анализ комбинаторных схем в доасимптотической области изменения параметров // *Труды Карельского научного центра РАН*, 2018. № 7. С. 117–133. EDN: XRQZZR. DOI: https://doi.org/10.17076/mat750.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 3, pp. 573–591
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1947

MSC: 60F15

Probabilistic models for the analysis of inverse extremal problems in combinatorics

N. Yu. Enatskaya

National Research University "Higher School of Economics",
Moscow Institute of Electronics and Mathematics,
34, Tallinskay st, Moscow, 123458, Russian Federation.

Abstract

In an inverse extremal problem for a combinatorial scheme with a given value of the objective function of the form of a certain extreme value of its characteristic, a probabilistic model is developed that ensures that this value is obtained in its outcomes. Two types of such characteristics are considered, relating to each of the schemes or to a set of outcomes.

The pre-asymptotic analysis of such a model is carried out by the author's enumerative method. It is based on the construction of an iterative random process with iterations of successive stages of a numbered non-repetitive enumeration and the formation of outcomes of the scheme. The iterative development of the process is represented by a probabilistic graph.

The study of the outcomes of the scheme according to the model in the enumerative method is carried out in the following areas: visual numbering of the outcomes of the scheme, finding their number, establishing a one-to-one correspondence between the types and numbers of outcomes of the scheme, obtaining their probabilistic distribution (controlled by a random process of listing the outcomes of the scheme), and modeling them with this distribution.

Along with the direct study of circuits in these areas, algorithms are proposed to obtain results for them by partially recalculating them from the results of a similar analysis of more general, previously studied circuits without restrictions or with less restrictions on the values of the characteristics under consideration.

Keywords: inverse extremal problem, extremal value of a characteristic, pre-asymptotic analysis of a circuit.

Received: 12th August, 2022 / Revised: 25th August, 2022 /
Accepted: 31st August, 2022 / First online: 20th September, 2022

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes
Research Article

Please cite this article in press as:
E n a t s k a y a N. Yu. Probabilistic models for the analysis of inverse extremal problems in combinatorics, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 3, pp. 573–591. EDN: AWBYGO. DOI: 10.14498/vsgtu1947 (In Russian).

Authors' Details:
Nataliya Yu. Enatskaya https://orcid.org/0000-0003-1241-7543
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics;
e-mail: nat1943@mail.ru

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submit the final manuscript to print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This research received no external funding.

References

1. Afanas'ev M. Yu., Suvorov B. P. *Issledovanie operatsii v ekonomike. Modeli, zadachi, resheniia* [Operations Research in Economics. Models, Tasks, Solutions]. Moscow, INFRA-M, 2003, 202 pp. (In Russian)
2. Baranov V. I., Stechkin B. S. *Ekstremal'nye kombinatornye zadachi i ikh prilozheniia* [Extremal Combinatorial Problems and Their Applications]. Moscow, Fizmatlit, 2004, 240 pp. (In Russian). EDN: RXGTQD.
3. Kolchin V. F. On the limiting behavior of extreme order statistics in a polynomial scheme, *Theory Probab. Appl.*, 1969, vol. 14, no. 3, pp. 458–469. DOI: https://doi.org/10.1137/1114058.
4. Khakimullin E.R. Asymptotic behavior of the maximum occupancy in an equiprobable scheme of allocation of particles by complexes, *Math. Notes*, 1981, vol. 30, no. 2, pp. 626–633. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01708846.
5. Viktorova I. I. Asymptotic behavior of maximum of an equiprobable polynomial scheme, *Math. Notes*, 1969, vol. 5, no. 3, pp. 184–191. EDN: ZZYIEX. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01388624.
6. Enatskaya N. Yu. Probabilistic models of combinatorial schemes, *Bulletin of the South Ural State University, Ser. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2020, vol. 13, no. 3, pp. 103–111 (In Russian). EDN: DKMIUC. DOI: https://doi.org/10.14529/mmp200312.
7. Enatskaya N. Yu. Analysis of combinatorial schemes in the pre-asymptotic region of parameter change, *Proceedings of the Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences*, 2018, no. 7, pp. 117–133 (In Russian). EDN: XRQZZR. DOI: https://doi.org/10.17076/mat750.