Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 26, № 3. С. 544–555
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1946
EDN: EBBGFK

УДК 517.958:531.32

Общий принцип максимума давления в стационарных течениях невязкого газа

Г. Б. Сизых

Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Россия, 141700, Долгопрудный, Институтский пер., 9.

Аннотация

В рамках уравнений Эйлера рассматривается возможность достижения экстремальных значений давления во внутренней точке стационарного течения невязкого газа. Течение может быть небаротропным. Известный (Г.Б. Сизых, 2018) дозвуковой принцип максимума давления (ДПМД) нельзя применять в трансзвуковых и в сверхзвуковых областях течений. В условиях классического принципа максимума давления К. Трусделла (1953) отсутствует ограничение на значения местных чисел Маха, однако он обладает рядом особенностей, не позволяющих применять его для верификации численных расчетов так же, как это можно делать при использовании ДПМД в дозвуковых областях. Обнаруживается неизвестный ранее принцип максимума давления: найдена функция производных параметров течения, которая должна иметь определенный знак (различный для минимума и для максимума давления) в точке, в которой давление достигает строгого или нестрогого локального экстремума. Этот принцип максимума давления назван «общим» (ОПМД), поскольку в его условия не входят баротропность, ограничение на значения местных чисел Маха и предположение о том, что газ подчиняется уравнению Менделеева–Клапейрона. Одним из следствий ОПМД является вывод о том, что из условий принципа максимума давления К. Трусделла можно исключить требование баротропности. ОПМД предлагается использовать для верификации численных расчетов течения идеального газа за отошедшим скачком уплотнения, формирующимся при сверхзвуковом обтекании тел, а также для проверки численных расчетов обтекания тел вязким газом в областях, удаленных от источников завихренности, где влиянием вязкости можно пренебречь.

Ключевые слова: уравнения Эйлера, принцип максимума давления, невязкий газ, совершенный газ, точные решения, Q-параметр.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

Образец для цитирования
Сизых Г. Б. Общий принцип максимума давления в стационарных течениях невязкого газа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 3. С. 544–555. EDN: EBBGFK. DOI: 10.14498/vsgtu1946.

Сведения об авторе
Григорий Борисович Сизых https://orcid.org/0000-0001-5821-8596
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. высшей математики;
e-mail: o1o2o3@yandex.ru

Получение: 11 августа 2022 г. / Исправление: 16 сентября 2022 г. / Принятие: 20 сентября 2022 г. / Публикация онлайн: 28 сентября 2022 г.

Введение. В настоящей статье рассматриваются стационарные течения как идеального (невязкого) совершенного (выполняется уравнение состояния Менделеева—Клапейрона) с постоянными теплоемкостями c_p и c_v газа, так и идеального газа с произвольным уравнением состояния. Полная система уравнений движения газа первого типа (включающая уравнение Эйлера в форме Громеки—Ламба) для стационарных течений имеет следующий вид [1–3]:

$$\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} = -\rho^{-1}\boldsymbol{\nabla} p - \boldsymbol{\nabla}(V^2/2), \quad V = |\mathbf{V}|, \quad \mathbf{\Omega} = \mathbf{rot}\,\mathbf{V}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) = 0, \tag{2}$$

$$\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla}(p\rho^{-k}) = 0, \tag{3}$$

где $\mathbf{V}$ — вектор скорости, $\rho > 0$ — плотность, $p > 0$ — давление, $k = c_p/c_v > 1$ — показатель адиабаты Пуассона. Рассматриваются области, в которых параметры течения (давление, плотность и компоненты скорости) дважды непрерывно дифференцируемы по координатам.

В случае газа с другим уравнением состояния первые два уравнения остаются без изменений, а третье уравнение становится другим. Уравнение (3) следует из закона сохранения энергии, выполнение которого для идеального совершенного газа с постоянными теплоемкостями c_p и c_v означает адиабатичность течения [1–3], что равносильно сохранению энтропийной функции $\sigma = p\rho^{-k}$ вдоль линий тока. При этом на различных линиях тока энтропийная функция может принимать различные значения. Если энтропийная функция $\sigma = p\rho^{-k}$ постоянна во всем течении (одинакова на всех линях тока), то плотность можно представить функцией одного только давления, и течение будет баротропным. Но в общем случае энтропийная функция принимает различные значения на различных линиях тока, и течение может быть небаротропным. Такие течения возникают, например, за отошедшим головным скачком, возникающим при обтекании равномерным сверхзвуковым потоком тела с затупленной носовой частью. Кроме того, некоторые свойства таких течений связаны со свойствами течений вязкого газа. Речь идет о дозвуковом принципе максимума давления (ДПМД) [4]. Этот недавно обнаруженный принцип верен для дозвуковых областей течений, параметры которых подчиняются системе (1)–(3). В условия ДПМД входит знак Q-параметра (второго скалярного инварианта тензора скоростей деформаций). Если u, v и w — компоненты скорости $\mathbf{V}$ в прямоугольной декартовой системе координат, то Q-параметр может быть представлен в виде

$$Q = \frac{1}{2}\bigl\{\Omega^2 - (\boldsymbol{\nabla} u)^2 - (\boldsymbol{\nabla} v)^2 - (\boldsymbol{\nabla} w)^2\bigr\}, \tag{4}$$

где $\Omega = |\mathbf{\Omega}|$. Из ДПМД следует (далее — следствие ДПМД), что *если давление достигает строгого или нестрогого минимума во внутренней точке течения, то Q-параметр в этой точке должен быть неотрицательным, а во* *внутренней точке максимума давления Q-параметр должен быть неположительным.*

Для проверки расчетов течений за отошедшим головным скачком, насколько известно автору настоящей работы, ДПМД еще не использовался. При этом в [4] было предложено использовать проверку выполнения нового принципа для дополнительной верификации численных расчетов течений вязкого газа в областях, удаленных от источников завихренности, где в достаточно малых окрестностях точки экстремума применима модель небаротропного идеального газа, и должно выполнятся сформулированное выше следствие ДПМД. Разумеется, что выполнение следствия ДПМД еще не означает правильности решения, но его нарушение означает ошибочность решения.

Этот подход показал свою эффективность в серии работ В. В. Вышинского с соавторами [5–12]. В работе [5] проведен расчет обтекания фюзеляжа вертолета с оперением и шасси. В [6] на примере расчета обтекания параллелепипеда решалась задача о моделировании обтекания фрагментов ландшафта (плохообтекаемых тел) атмосферным ветром. В работе [7] проведены расчеты ветровой нагрузки на колесо обозрения. Содержание расчетов работ [8–12] видно из их названий. Все расчеты [5–12] подвергались дополнительной верификации путем проверки выполнения следствия ДПМД. В некоторых из этих работ, например [8, 11], результаты расчета демонстрируют выполнение этого следствия, что авторами рассматривается как подтверждение высокого качества полученных решений. В других работах, например [5–7, 9], в первоначальных расчетах наблюдалось нарушение следствия ДПМД, приходилось увеличивать число итераций, размеры расчетной области, модифицировать и сгущать расчетную сетку в некоторых областях течения. В итоге удавалось получать решения, в которых следствие ДПМД оказывалось выполненным.

В работе [12] на примерах численных расчетов дозвукового обтекания компоновок летательных аппаратов и их элементов продемонстрирована эффективность применения проверки выполнения следствия ДПМД в качестве независимой верификации решений для выявления «слабых» мест в расчетах, которые приводят к снижению точности, а в ряде случаев — к получению недостоверных результатов.

Таким образом, полученный в [4] ДПМД оказался востребованным. Поэтому представляется актуальным получить принцип максимума давления (ПМД) без ограничений на величину местного числа Маха в точках рассматриваемой области. Этому и посвящена настоящая статья.

1. Принцип максимума давления Трусделла. В статье [13] К. Трусделл привел ряд примеров, показывающих, что величина

$$\mathrm{W_K} = (1 - 4Q/\boldsymbol{\Omega}^2)^{-1/2}$$

лучше, чем $|\boldsymbol{\Omega}|$, отражает интуитивное представление физиков о том, насколько сложней завихренное течение по сравнению с движением жидкости как твердого тела или по сравнению со сдвиговым течением. В результате Трусделл предложил считать $\mathrm{W_K}$ «второй мерой завихренности». В теоретической аэрогидродинамике это предложение до сих пор не принято, но приведенные им примеры представляют самостоятельный интерес. Один из таких примеров — принцип максимума давления в баротропных течениях идеального газа. Этот ПМД справедлив для течений с любыми значениями местных чисел Маха. В условия ПМД Трусделла входят неравенства $\mathrm{W_K} \leqslant 1$, $\mathrm{W_K} \geqslant 1$ и равенство $\mathrm{W_K} = 1$, равносильные неравенствам $Q \leqslant 0$, $Q \geqslant 0$ и равенству $Q = 0$ соответственно. Учитывая это, сформулируем стационарный вариант ПМД Трусделла с использованием Q-параметра вместо $\mathrm{W_K}$.

Баротропный ПМД Трусделла. *Во внутренней точке области G стационарного баротропного течения идеального газа, где давление непостоянно, оно не может принимать минимального значения, если во всей области $Q \leqslant 0$ и $(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln\rho) \leqslant 0$; максимального и минимального значений, если во всей области $Q = 0$ и $(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln\rho) = 0$; максимального значения, если во всей области $Q \geqslant 0$ и $(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln\rho) \geqslant 0$.*

Достоинством этого ПМД является отсутствие ограничений на значение местного числа Маха. Его главный недостаток — отсутствие утверждений для случаев $Q \leqslant 0$, $(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln\rho) \geqslant 0$ и $Q \geqslant 0$, $(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln\rho) \leqslant 0$, в которых верификация расчетов с помощью ПМД Трусделла становится невозможной. Другой недостаток — невозможность при верификации ограничиться вычислением производных параметров течения в точке экстремума давления, как это можно делать при использовании следствия ДПМД (см. выделенное курсивом во введении). Поясним это на примере верификации расчета течения идеального совершенного газа с постоянными теплоемкостями (выполняется уравнение (3)), в котором давление достигает минимума в некоторой внутренней точке A.

Из ПМД Трусделла следует, что в любой окрестности точки A должна быть точка, в которой нарушено условие, состоящее из одновременного выполнения условий $Q \leqslant 0$ и $(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln\rho) \leqslant 0$. Рассмотрим последовательность таких точек, стремящуюся к A. В точках последовательности или $Q > 0$, или $(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln\rho) > 0$, или верны оба эти строгие неравенства. Поэтому хотя бы одно из строгих неравенств $Q > 0$ и $(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}) \times (\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln\rho) > 0$ выполняется на бесконечном числе точек последовательности (на некоторой подпоследовательности). Отсюда в силу непрерывности получаем, что в точке A должна быть неотрицательной хотя бы одна из величин Q и $(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln\rho)$. Это следствие не позволяет «отфильтровывать» неверные решения, поскольку неравенство $(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln\rho) \geqslant 0$ всегда окажется выполненным. Действительно, из (3) следует, что $(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln\rho) = \frac{1}{k}\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln p)$. Используя известную формулу векторного анализа для градиента скалярного произведения и учитывая, что ротор градиента равен нулю, имеем

$$(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln\rho) = \frac{1}{k}\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln p) = -\frac{1}{kp^2}(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}p)^2 + \\ + \frac{1}{kp}\mathbf{V}\cdot((\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\nabla}p) + \frac{1}{kp}\mathbf{V}\cdot((\boldsymbol{\nabla}p\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{V}) + \frac{1}{kp}\mathbf{V}\cdot(\boldsymbol{\nabla}p\times\boldsymbol{\Omega}).$$

В точке A градиент давления равен нулю. Поэтому

$$(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln\rho)(A) = \frac{1}{kp}\mathbf{V}\cdot((\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\nabla}p)(A).$$

Правая часть есть произведение $V^2/(kp)$ на вторую производную давления по направлению скорости в точке A (в этом можно убедиться, записав правую часть в прямоугольной системе координат, у которой одна из осей сонаправлена со скоростью $\mathbf{V}$ в точке A). Одно из необходимых условий минимума состоит в том, что такая вторая производная неотрицательна. Поэтому $(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln\rho)(A)\geqslant 0$, что показывает невозможность ограничиться вычислением производных параметров течения в точке минимума при использовании ПМД Трусделла.

Как будет показано в следующем разделе, ПМД Трусделла справедлив и для небаротропных течений. Однако даже с учетом применимости к небаротропным течениям ПМД Трусделла сохраняет описанные выше недостатки, затрудняющие, а в некоторых случаях — делающие невозможной верификацию расчетов.

2. Общий принцип максимума давления. Рассмотрим стационарное течение невязкого газа (с произвольным уравнением состояния) в пространственной области G. Параметры течения подчиняются, в частности, уравнениям (1) и (2). (Уравнение (3) может иметь другой вид, но оно в настоящем разделе использоваться не будет.) Применяя оператор дивергенции к уравнению (1), получим

$$\rho^{-1}\Delta p-\rho^{-2}\boldsymbol{\nabla}p\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho=\Omega^2-\mathbf{V}\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\Omega}-\Delta V^2/2, \tag{5}$$

где Δ — оператор Лапласа. Используя координатную запись операторов, можно убедиться в верности следующего тождества:

$$\Delta V^2/2\equiv\mathbf{V}\cdot\Delta\mathbf{V}+(\boldsymbol{\nabla}u)^2+(\boldsymbol{\nabla}v)^2+(\boldsymbol{\nabla}w)^2.$$

Вместе с другим известным векторным тождеством $\mathbf{V}\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\Omega}\equiv\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\mathrm{div}\,\mathbf{V}-\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{V}$ это позволяет записать (5) в виде

$$\rho^{-1}\Delta p-\rho^{-2}\boldsymbol{\nabla}p\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho+\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathrm{div}\mathbf{V}=\Omega^2-(\boldsymbol{\nabla}u)^2-(\boldsymbol{\nabla}v)^2-(\boldsymbol{\nabla}w)^2. \tag{6}$$

Из уравнения неразрывности (2) следует, что $\mathrm{div}\,\mathbf{V}=-\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln\rho$, и поэтому $\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\mathrm{div}\,\mathbf{V}=-\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln\rho)$. Подставляя последнее равенство в (6), получаем

$$\rho^{-1}\Delta p-\rho^{-2}\boldsymbol{\nabla}p\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho=\Omega^2-(\boldsymbol{\nabla}u)^2-(\boldsymbol{\nabla}v)^2-(\boldsymbol{\nabla}w)^2+\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln\rho),$$

или

$$\rho^{-1}\Delta p-\rho^{-2}\boldsymbol{\nabla}p\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho=2Q+\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln\rho). \tag{7}$$

Зафиксируем произвольно выбранную прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ и запишем левую часть (7) в координатной форме:

$$a_{11}\frac{\partial^2p}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2p}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2p}{\partial y^2}+2a_{13}\frac{\partial^2p}{\partial x\partial z}+2a_{23}\frac{\partial^2p}{\partial y\partial z}+a_{33}\frac{\partial^2p}{\partial z^2}+ \\ +b_1\frac{\partial p}{\partial x}+b_2\frac{\partial p}{\partial y}+b_3\frac{\partial p}{\partial z}=f, \tag{8}$$

где $f=2Q+\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln\rho)$, $a_{11}=a_{22}=a_{33}=\rho^{-1}$, $a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$, $b_1=-\rho^{-2}\dfrac{\partial\rho}{\partial x}$, $b_2=-\rho^{-2}\dfrac{\partial\rho}{\partial y}$, $b_3=-\rho^{-2}\dfrac{\partial\rho}{\partial z}$.

Для выяснения экстремальных свойств решения этого уравнения используем следствие теоремы Хопфа [14, 15], приведенное в [16].

Следствие теоремы Хопфа. *Пусть во всех точках ограниченной области G коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}$ уравнения (8) являются коэффициентами положительно определенной квадратичной формы A. Пусть, далее, для любой точки $M(x,y,z) \in G$ существуют числа $\omega = \omega(x,y,z) > 0$ и $\Delta = \Delta(x,y,z) > 0$ такие, что замкнутый шар $\overline{U}(M;\omega)$ целиком лежит в области G и в нем все коэффициенты уравнения (8) ограничены и выполняется неравенство* $\det A > \Delta$.

И пусть во всех точках области G выполняется неравенство $f \leqslant 0$. Тогда если решение $p \in C^2(G)$ уравнения (8) непрерывно в замкнутой области $\overline{G}$, то $p \geqslant \min\limits_{\partial G} p$ во всей области G. При этом, если $p \neq const$ в G, равенство $p = \min\limits_{\partial G} p$ возможно только на границе ∂G. (Аналогично для максимума при $f \geqslant 0$.)

Левая часть (8) удовлетворяет всем условиям этого следствия теоремы Хопфа, и его выводы зависят от знака правой части. В итоге приходим к основному результату.

Общий принцип максимума давления (ОПМД). *Пусть все газодинамические параметры $(\mathbf{V}, \rho, p)$ стационарного течения идеального (невязкого) газа являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями координат в некоторой ограниченной области G, а давление p непрерывно на замыкании $\overline{G}$. И пусть в G выполняются уравнения (1), (2), а величина Q определяется формулой (4). Тогда если давление непостоянно в G, то справедливы следующие утверждения:*

1) *если во всех точках G выполняется условие $2Q + \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla} \ln \rho) \leqslant 0$, то давление p достигает минимума на $\overline{G}$ на границе и только на границе области G;*
2) *если во всех точках G выполняется условие $2Q + \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla} \ln \rho) \geqslant 0$, то давление p достигает максимума на $\overline{G}$ на границе и только на границе области G;*
3) *если во всех точках G выполняется условие $2Q + \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla} \ln \rho) = 0$, то давление p достигает минимума и максимума на $\overline{G}$ на границе и только на границе области G.*

Этот ПМД здесь предложено назвать «общим» по трем причинам:
1) он верен как для баротропных, так и для небаротропных течений (поскольку в доказательстве баротропность не используется);
2) в нем отсутствуют ограничения на значения местных чисел Маха;
3) он верен для течений невязкого газа с произвольным уравнением состояния (а не только для совершенного газа), поскольку в доказательстве не используется уравнение (3).

Следствием ОПМД является следующее утверждение.

Следствие ОПМД. *Пусть все газодинамические параметры $(\mathbf{V}, \rho, p)$ стационарного течения идеального (невязкого) газа являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями координат в некоторой окрестности точки экстремума давления A (которая есть внутренняя точка течения), и пусть в этой окрестности выполняются уравнения (1), (2), а величина Q*

определяется формулой (4). *Тогда если давление достигает в точке A строгого или нестрогого минимума, то величина $2Q + \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla} \ln \rho)$ в этой точке должна быть неотрицательной, а если давление достигает в точке A строгого или нестрогого максимума, то величина $2Q + \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla} \ln \rho)$ должна быть неположительной.*

Это следствие позволяет при верификации ограничиться вычислением производных параметров течения в точке экстремума давления так же, как это можно делать при использовании следствия ДПМД. Заметим, что в дозвуковых областях течения удобнее применять ДПМД, содержащий более простые условия и не требующий вычисления вторых производных.

Сравнивая приведенные выше формулировки (баротропного) ПМД Трусделла и ОПМД, можно убедиться в том, что первый ПМД есть следствие второго (но не наоборот). Область применения ОПМД шире и включает в себя область применения ПМД Трусделла (см. описание в первом разделе «главного недостатка» ПМД Трусделла). Поэтому ОПМД представляет собой обобщение ПМД Трусделла. Из сравнения формулировок также видно, что ПМД Трусделла оказывается верен и для небаротропных течений.

Как и в случае с ДПМД, можно использовать проверку выполнения ОПМД для дополнительной верификации численных расчетов течений вязкого газа в областях, удаленных от источников завихренности, где в достаточно малых окрестностях точки экстремума применима модель небаротропного идеального газа и должно выполняться сформулированное выше следствие ОПМД. Заметим, что многие другие закономерности течений невязкого газа, например, интегральные инварианты [17–19], справедливы для вязкого газа, только если вязкостью можно пренебречь во всем поле течения, что, как правило, невозможно.

3. Применение ОПМД для верификации расчетов течений совершенного газа. При проверке расчетов течений в рамках модели идеального совершенного газа можно пользоваться уравнением (3). Наличие этого уравнения в полной системе уравнений движения помогает в некоторых случаях упростить проверку следствия ОПМД и не вычислять вторые производные (не вычислять $\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla} \ln \rho)$). Речь идет о следующем.

Как было показано в первом разделе на примере минимума, в точке экстремума A, являющейся внутренней точкой течения, знак $\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla} \ln \rho)(A)$ совпадает со знаком второй производной по направлению скорости (точки торможения не рассматриваются, так как для дозвуковых областей проще применять ДПМД). В точке минимума такая вторая производная неотрицательна, а в точке максимума — неположительна. Поэтому *если в точке минимума давления* (*в численном расчете*) *окажется, что* $Q \geqslant 0$, *то, поскольку величина* $2Q + \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla} \ln \rho)$, *входящая в условие следствия ОПМД, «автоматически» оказывается неотрицательной, величину* $\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla} \ln \rho)$ *можно не вычислять — в численном расчете следствие ОПМД будет выполнено. Аналогично, если в точке максимума давления* (*в численном расчете*) *окажется, что* $Q \leqslant 0$, *то величину* $\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla} \ln \rho)$ *можно не вычислять — в численном расчете следствие ОПМД будет выполнено.*

В других случаях для применения следствия ОПМД необходимо вычислять $2Q + \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla} \ln \rho)$ в точке A. При этом представляется полезным использовать тот факт, что (см. первый раздел) величина $\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla} \ln \rho)(A)$

равна произведению $V^2/(kp)$ на вторую производную давления по направлению скорости $\mathbf{V}$ в точке A.

Заключение. Получен принцип максимума давления для стационарных небаротропных течений газа. В условиях этого принципа нет требований к значениям местного числа Маха, и он верен для течений невязкого газа с произвольным уравнением состояния. Поэтому было предложено назвать его «общим» (ОПМД). Для дозвуковых областей проще и удобнее применять ДПМД, но для трансзвуковых и сверхзвуковых областей в настоящее время ОПМД — это единственный известный принцип максимума. Предлагается использовать *следствие* ОПМД для верификации расчетов стационарных течений идеального газа (например, за отошедшим головным скачком) и расчетов течений вязкого газа в областях, удаленных от источников завихренности, где в достаточно малых окрестностях внутренней точки экстремума применима модель небаротропного течения идеального газа. При этом в случае модели идеального совершенного газа предлагается использовать результат третьего раздела.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Автор несет полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарность. Автор благодарен рецензенту за тщательное прочтение статьи и ценные предложения и комментарии.

Библиографический список

1. Седов Л. И. *Механика сплошной среды.* Т. 2. М.: Наука, 1973. 584 с.
2. Batchelor G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1967. xviii+615 pp.
3. Лойцянский Л. Г. *Механика жидкости и газа.* М.: Дрофа, 2003. 840 с.
4. Вышинский В. В., Сизых Г. Б. О верификации расчетов стационарных дозвуковых течений и о форме представления результатов // *Матем. моделирование*, 2018. Т. 30, № 6. С. 21–38. EDN: XQMWMX.
5. Anikin V. A., Vyshinsky V. V., Pashkov O. A., Streltsov E. V. Using the maximum pressure principle for verification of calculation of stationary subsonic flow // *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Ser. Mechanical Engineering*, 2019. no. 6. pp. 4–16. EDN: XORYQW. DOI: https://doi.org/10.18698/0236-3941-2019-6-4-16.
6. Вышинский В. В., Зоан К. Т. Численное моделирование обтекания фрагментов ландшафта и вопросы верификации решений // *Уч. зап. ЦАГИ*, 2020. Т. 51, № 6. С. 60–68. EDN: GGKJCX.
7. Айрапетов А. Б., Вышинский В. В., Катунин А. В. К вопросу о верификации расчетов стационарных дозвуковых течений около плохообтекаемых тел // *Уч. зап. ЦАГИ*, 2021. Т. 52, № 1. С. 34–40. EDN: YWTAMA.
8. Вышинский В. В., Зоан К. Т. Аэродинамика самолета в возмущенной атмосфере // *Труды МФТИ*, 2021. Т. 13, № 2. С. 40–48. EDN: NJOMFE. DOI: https://doi.org/10.53815/20726759_2021_13_2_40.
9. Вышинский В. В., Зоан К. Т. Обтекание горного ландшафта в окрестности аэропорта Дананг атмосферным ветром и вопросы безопасности полета // *Научн. вестн. МГТУ ГА*, 2021. Т. 24, № 6. С. 27–41. EDN: ZNMMDG. DOI: https://doi.org/10.26467/2079-0619-2021-24-6-27-41.

10. Айрапетов А. Б., Вышинский В. В., Катунин А. В. Обтекание пролетных конструкций объездной дороги аэропорта Адлер и вопросы безопасности посадки // *Уч. зап. ЦАГИ*, 2021. Т. 52, № 6. С. 41–49. EDN: XFZYOF.
11. Vyshinsky V. V., Chinh D. C. Study of aerodynamic characteristics of an aircraft during approach to landing in a disturbed atmosphere // *Vietnam J. Mech.*, 2022. vol. 44, no. 2. pp. 133–152. DOI: https://doi.org/10.15625/0866-7136/16760.
12. Брутян М. А., Вышинский В. В., Раздобарин А. М. Применение критериев независимой верификации решений для повышения качества численных расчетов // *Уч. зап. ЦАГИ*, 2022. Т. 53, № 4. С. 26–32. EDN: PPTOCU.
13. Truesdell C. Two measures of vorticity // *J. Rational Mech. Anal.*, 1953. vol. 2, no. 2. pp. 173–217. DOI: https://doi.org/10.1512/iumj.1953.2.52009.
14. Hopf E. Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus // *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften*, 1927. vol. 19. pp. 147–152 (In German).
15. Miranda C. *Partial Differential Equations of Elliptic Type*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1970. xii+370 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-87773-5.
16. Беспорточный А. И., Бурмистров А. Н., Сизых Г. Б. Вариант теоремы Хопфа // *Труды МФТИ*, 2016. Т. 8, № 1. С. 115–122. EDN: VSMAAX.
17. Сизых Г. Б. Система ортогональных криволинейных координат на изоэнтропийной поверхности за отошедшим скачком уплотнения // *ПММ*, 2020. Т. 84, № 3. С. 304–310. EDN: JLOYTW. DOI: https://doi.org/10.31857/S0032823520020071.
18. Сизых Г. Б. Второе интегральное обобщение инварианта Крокко для 3D-течений за отошедшим головным скачком // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 3. С. 588–595. EDN: LRHSER. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1861.
19. Сизых Г. Б. Интегральный инвариант течений идеального газа за отошедшим скачком уплотнения // *ПММ*, 2021. Т. 85, № 6. С. 742–747. EDN: SRMQIO. DOI: https://doi.org/10.31857/S0032823521060102.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 3, pp. 544–555
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1946

MSC: 76N15, 76J20

General principle of maximum pressure in stationary flows of inviscid gas

G. B. Sizykh

Moscow Institute of Physics and Technology
(National Research University),
9, Institutskiy per., Dolgoprudny, 141700, Russian Federation.

Abstract

Within the framework of the Euler equations, the possibility of achieving extreme pressure values at the inner point of a stationary flow of a nonviscous gas is considered. The flow can be non-barotropic. The well-known (G.B. Sizykh, 2018) subsonic principle of maximum pressure (SPMP) cannot be applied in transonic and supersonic flow regions. Under the conditions of the classical principle of maximum pressure by C. Truesdell (1953), there is no restriction on the values of local Mach numbers, but it has a number of features that do not allow it to be used to verify numerical calculations in the same way as it can be done when using SPMP in subsonic regions. A previously unknown principle of maximum pressure is discovered: a function of derivative flow parameters is found, which must have a certain sign (different for minimum and for maximum pressure) at the point where the pressure reaches a strict or nonstrict local extremum. This principle of maximum pressure is called "general" (GPMP) because its conditions do not include barotropicity, restrictions on the values of local Mach numbers, and the assumption that the gas obeys the Mendeleev–Clapeyron equation. One of the consequences of GPMP is the conclusion that the requirement of barotropicity can be excluded from the conditions of Truesdell's principle of maximum pressure. It is proposed to use GPMP to verify numerical calculations of the ideal gas flow behind a detached shock wave formed in a supersonic flow around bodies and to verify numerical calculations of a viscous gas flow around bodies in regions remote from sources of vorticity, where the effect of viscosity can be neglected.

Keywords: Euler equations, principle of maximum pressure, inviscid gas, perfect gas, exact solutions, Q-parameter.

Received: 11th August, 2022 / Revised: 16th September, 2022 /
Accepted: 20th September, 2022 / First online: 28th September, 2022

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes
Research Article

Please cite this article in press as:
Sizykh G. B. General principle of maximum pressure in stationary flows of inviscid gas, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 3, pp. 544–555. EDN: EBBGFK. DOI: 10.14498/vsgtu1946 (In Russian).

Author's Details:
Grigory B. Sizykh https://orcid.org/0000-0001-5821-8596
Cand. Phys. & Math. Sci; Associate Professor; Dept. of Higher Mathematics;
e-mail: o1o2o3@yandex.ru

Competing interests. I have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. The author assumes full responsibility for the submission of the final manuscript in print. I approve the final version of the manuscript.

Funding. The research has not received funding.

Acknowledgments. The author thanks the referee for careful reading of the paper and for valuable suggestions and comments.

References

1. Sedov L. I. *A Course in Continuum Mechanics*, vol. 2, Physical Foundations and Formulations of Problems. Groningen, Wolters-Noordhoff Publ., 1971, xxi+309 pp.
2. Batchelor G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1967, xviii+615 pp.
3. Loytsyansky L. G. *Mechanics of Liquids and Gases*, International Series of Monographs in Aeronautics and Astronautics, vol. 6. Oxford, Pergamon Press, 1966, xii+804 pp.
4. Vyshinsky V. V., Sizykh G. B. The verification of the calculation of stationary subsonic flows and the presentation of the results, *Math. Models Comput. Simul.*, 2019, vol. 11, no. 1, pp. 97–106. EDN: XVQXUH. DOI: https://doi.org/10.1134/S2070048219010162.
5. Anikin V. A., Vyshinsky V. V., Pashkov O. A., Streltsov E. V. Using the maximum pressure principle for verification of calculation of stationary subsonic flow, *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Ser. Mechanical Engineering*, 2019, no. 6, pp. 4–16. EDN: XORYQW. DOI: https://doi.org/10.18698/0236-3941-2019-6-4-16.
6. Vyshinsky V. V., Zoan K. T. Numerical simulation of the flow around landscape fragments and solution verification, *TsAGI Science Journal*, 2020, vol. 51, no. 6, pp. 641–650. DOI: https://doi.org/10.1615/TsAGISciJ.2021037822.
7. Airapetov A. B., Vyshinsky V. V., Katunin A. V. On the verification of calculations of stationary subsonic flows around bluff bodies, *Uch. Zap. TsAGI*, 2021, vol. 52, no. 1, pp. 34–40 (In Russian). EDN: YWTAMA.
8. Vyshinsky V. V., Zoan K. T. Aircraft aerodynamics in a disturbed atmosphere, *Proc. of MIPT*, 2021, vol. 13, no. 2, pp. 40–48 (In Russian). EDN: NJOMFE. DOI: https://doi.org/10.53815/20726759_2021_13_2_40.
9. Vyshinsky V. V., Zoan K. T. Atmospheric wind flow of mountain landscape in the surroundings of Danang airport and flight safety problems, *Civil Aviation High Technologies*, 2021, vol. 24, no. 6, pp. 27–41 (In Russian). EDN: ZNMMDG. DOI: https://doi.org/10.26467/2079-0619-2021-24-6-27-41.
10. Airapetov A. B., Vyshinsky V. V., Katunin A. V. Flow around the span structures of the Adler airport bypass road and landing safety issues, *Uch. Zap. TsAGI*, 2021, vol. 52, no. 6, pp. 41–49 (In Russian). EDN: XFZYOF.
11. Vyshinsky V. V., Chinh D. C. Study of aerodynamic characteristics of an aircraft during approach to landing in a disturbed atmosphere, *Vietnam J. Mech.*, 2022, vol. 44, no. 2, pp. 133–152. DOI: https://doi.org/10.15625/0866-7136/16760.
12. Brutyan M. A., Vyshinsky V. V., Razdobarin A. M. Application of criteria for independent verification of solutions to improve the numerical calculations quality, *Uch. Zap. TsAGI*, 2022, vol. 53, no. 4, pp. 26–32 (In Russian). EDN: PPTOCU.
13. Truesdell C. Two measures of vorticity, *J. Rational Mech. Anal.*, 1953, vol. 2, no. 2, pp. 173–217. DOI: https://doi.org/10.1512/iumj.1953.2.52009.
14. Hopf E. Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften*, 1927, vol. 19, pp. 147–152 (In German).
15. Miranda C. *Partial Differential Equations of Elliptic Type*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1970, xii+370 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-87773-5.

16. Besportochny A. I., Burmistrov A. N., Sizykh G. B. Version of the Hopf theorem, *Proc. of MIPT*, 2016, vol. 8, no. 1, pp. 115–122 (In Russian). EDN: VSMAAX.
17. Sizykh G. B. System of orthogonal curvilinear coordinates on the isentropic surface behind a detached bow shock wave, *Fluid Dyn.*, 2020, vol. 55, no. 7, pp. 899–903. EDN: EZXXWK. DOI: https://doi.org/10.1134/S0015462820070095.
18. Sizykh G. B. Second integral generalization of the Crocco invariant for 3D flows behind detached bow shock wave, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 588–595 (In Russian). EDN: LRHSER. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1861.
19. Sizykh G. B. Integral invariant of ideal gas flows behind a detached bow shock, *Fluid Dyn.*, 2021, vol. 56, no. 8, pp. 1027–1030. EDN: FWLWLT. DOI: https://doi.org/10.1134/S0015462821080097.