Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 26, № 4. С. 650–671
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1950
EDN: CXCQCU

УДК 517.95

Колебания пластины с граничными условиями «шарнир–заделка»

К. Б. Сабитов[1,2]

[1] Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологии, Россия, 453103, Стерлитамак, пр. Ленина, 49.
[2] Самарский государственный технический университет, Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Изучена начальная задача для уравнения колебаний прямоугольной пластины с граничными условиями типа «шарнир–заделка». Установлено энергетическое неравенство, из которого следует единственность решения поставленной начально-граничной задачи. Доказаны соответствующие теоремы существования и устойчивости решения задачи в классах регулярных и обобщенных решений. Существование решения поставленной задачи проводится методом спектрального анализа и оно построено в виде суммы ортогонального ряда по системе собственных функций соответствующей двумерной спектральной задачи, которая строится методом разделения переменных. Дано полное обоснование сходимости построенного трехмерного ряда в классе регулярных решений рассматриваемого уравнения. Обобщенное решение определяется как равномерный предел последовательности регулярных решений начально-граничной задачи.

Ключевые слова: уравнение колебаний прямоугольной пластины, начально-граничная задача, энергетическое неравенство, единственность, ряд, существование, устойчивость.

Получение: 25 августа 2022 г. / Исправление: 7 ноября 2022 г. / Принятие: 11 декабря 2022 г. / Публикация онлайн: 28 декабря 2022 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Научная статья

Образец для цитирования
Сабитов К. Б. Колебания пластины с граничными условиями «шарнир–заделка» // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 4. С. 650–671. EDN: CXCQCU. DOI: 10.14498/vsgtu1950.

Сведения об авторе
Камиль Басирович Сабитов https://orcid.org/0000-0001-9516-2704
доктор физико-математических наук; главный научный сотрудник[1]; профессор; каф. высшей математики[2]; e-mail: sabitov_fmf@mail.ru

1. Постановка задачи. Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка [1, с. 394]

$$Lu \equiv u_{tt} + \alpha^2 \Delta^2 u = F(x, y, t), \tag{1}$$

которое моделирует поперечные колебания тонкой однородной прямоугольной пластины толщины h (при этом ее толщина полагается малой по сравнению с другими размерами) со сторонами p и q, где $\alpha^2 = EJ/(\rho h)$; EJ — жесткость пластинки; ρ — масса на единицу площади пластинки; E — модуль упругости материала; J — момент инерции; $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$; $F(x, y, t)$ — непрерывная внешняя сила, рассчитанная на единицу площади пластинки; $u(x, y, t)$ — смещение точки (x, y) пластинки в момент времени.

Отметим, что многие задачи о колебаниях мембран, пластинок имеют важное прикладное значение в строительной механике, авиастроении, машиностроении, судостроении и т.д., которые изучены в известных работах ([2, с. 444–449], [3, с. 211–219], [4, с. 132–133], [5, с. 248–258], [6, с. 35–69] и др.).

Для определения колебания (смещения) $u(x, y, t)$ точек (x, y) пластинки нужно задать граничные условия на краях $x = 0$, $x = p$, $y = 0$ и $y = q$. Вид граничных условий зависит от способа закрепления соответствующих краев. В этой работе изучим случай, когда стороны $x = 0$ и $x = p$ шарнирно закреплены, а стороны $y = 0$ и $y = q$ наглухо заделаны:

$$\begin{cases} u(0, y, t) = u_{xx}(0, y, t) = u(p, y, t) = u_{xx}(p, y, t) = 0, & 0 \leqslant y \leqslant q,\ 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u(x, 0, t) = u_y(x, 0, t) = u(x, q, t) = u_y(x, q, t) = 0, & 0 \leqslant x \leqslant p,\ 0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \tag{2}$$

Начальные условия такие же, как и в случае колебаний мембраны:

$$u(x, y, t)\big|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad u_t(x, y, t)\big|_{t=0} = \psi(x, y), \quad 0 \leqslant x \leqslant p, \quad 0 \leqslant y \leqslant q. \tag{3}$$

Введем обозначения:

$$Q = \big\{(x, y, t) | (x, y) \in D,\ 0 < t < T\big\}, \quad D = \big\{(x, y) | 0 < x < p,\ 0 < y < q\big\},$$

где p, q и T — заданные положительные числа, и поставим следующую начально-граничную задачу.

Задача 1. *Найти функцию $u(x, y, t)$ со свойствами*

$$u(x, y, t) \in C^{4,2}_{xy,t}(\overline{Q}), \tag{4}$$

$$Lu(x, y, t) \equiv F(x, y, t), \quad (x, y, t) \in Q, \tag{5}$$

которая удовлетворяет начальным условиям (3) и граничным условиям (2), где $F(x, y, t)$, $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — заданные достаточно гладкие функции, символ $C^{n,m}_{xy,t}(D)$ означает множество функций, имеющих непрерывные частные производные по переменным x, y и t соответственно до n-го и m-го порядка включительно на множестве D, n, $m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Отметим, что в работе [2, с. 444–449] путем представления решения в виде двойного ряда

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}(t) \sin\frac{m\pi x}{p} \sin\frac{n\pi y}{q}$$

и использования интегралов энергий найдены собственные частоты и форма собственных колебаний прямоугольной пластины в случае шарнирного закрепления на краях. В монографии [3, с. 211–219] исследуются колебания с условиями (2). Здесь сначала изучается задача, в постановке которой все края свободно оперты, затем на ее основе достаточно сложным путем исследуется поставленная задача. Полученные результаты являются приближенными.

В работе [4, с. 132–133] предлагается вариационный метод нахождения собственных частот колебаний.

В монографии [5, с. 250–251] отмечается аналог задачи с условиями (2) в идейном уровне без подробных исследований.

В книге [6, с. 35–69] используется метод асимптотических разложений по малому параметру для нахождения приближенных значений собственных частот и формы собственных колебаний пластины с различными режимами на краях. Но вопросы по построению решений в явной форме и обоснованию корректности поставленной нами задачи не изучены. В работах [7–11] изучены начально-граничные и обратные задачи для одномерного уравнения балки. В работе [12] в случае шарнирного закрепления пластины на краях доказаны теоремы существования и устойчивости решения начально-граничной задачи в классах регулярных и обобщенных решений.

В настоящей работе исследуется задача (2)–(5) (задача 1) для уравнения колебаний прямоугольной пластины с граничными условиями «шарнир–заделка», т.е. с условиями (2). Установлено энергетическое неравенство, из которого следует единственность решения поставленной начально-граничной задачи. Для этой задачи доказаны теоремы существования и устойчивости решения в классах регулярных и обобщенных решений. При этом решение построено в явном виде.

2. Энергетическое неравенство. Единственность решения.

Теорема 1. *Если существует решение начально-граничной задачи (2)–(5), то при любом $t \in [0, T]$ для решения $u(x, y, t)$ справедливо неравенство*

$$\iint_D \left[u_t^2 + \alpha^2(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)\right] dxdy \leqslant \\ \leqslant e^T \left[\iint_D \left[\psi^2 + \alpha^2(\varphi_{xx}^2 + 2\varphi_{xy}^2 + \varphi_{yy}^2)\right] dxdy + \right. \\ \left. + \iiint_Q F^2(x, y, t)\, dxdydt\right]. \quad (6)$$

Отметим, что интеграл

$$E_0(t) = \frac{1}{2}\iint_D \left[\rho h u_t^2 + EJ(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)\right] dxdy = \\ = \rho h \frac{1}{2}\iint_D \left[u_t^2 + \alpha^2(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)\right] dxdy = \rho h E(t)$$

представляет собой закон сохранения энергии свободных колебаний однородной пластинки при нулевых граничных условиях (2).

Действительно, кинетическая энергия движущейся пластинки состоит из поступательного движения элемента $dxdy$ параллельно смещению $u(x,y,t)$ и определяется интегралом

$$K(t) = \frac{1}{2}\iint_D \rho h u_t^2 dxdy,$$

где ρh — масса на единицу поверхности пластинки.

Потенциальная энергия колебаний пластинки зависит от жесткости EJ при изгибе и находится интегралом [2, с. 446]:

$$\Pi(t) = \frac{1}{2}\iint_D EJ(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)dxdy.$$

Следовательно, интеграл $E_0(t) = K(t) + \Pi(t)$ представляет собой полную энергию свободных поперечных колебаний пластинки.

Доказатеvльство теоремы 1. Рассмотрим тождество

$$u_t Lu = \frac{1}{2}\big[u_t^2 + \alpha^2(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)\big]'_t + \\ + \alpha^2\big(u_t u_{xxx} - u_{tx}u_{xx} + u_t u_{xyy} - u_{ty}u_{xy}\big)'_x + \\ + \alpha^2\big(u_t u_{yyy} - u_{ty}u_{yy} + u_t u_{xxy} - u_{tx}u_{xy}\big)'_y$$

и, интегрируя его по области $Q_\tau = Q \cap \{t < \tau\}$, $0 < \tau \leqslant T$, будем иметь

$$E(\tau) - E(0) + J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = \iiint_{Q_\tau} F u_t dxdydt, \tag{7}$$

где

$$J_1 = \alpha^2 \iint_{S_1} (u_t u_{xxx} - u_{tx}u_{xx} + u_t u_{xyy} - u_{ty}u_{xy})\big|_{x=p} dydt,$$

$$J_2 = \alpha^2 \iint_{S_2} (u_t u_{yyy} - u_{ty}u_{yy} + u_t u_{xxy} - u_{tx}u_{xy})\big|_{y=q} dxdt,$$

$$J_3 = \alpha^2 \iint_{S_3} (u_t u_{xxx} - u_{tx}u_{xx} + u_t u_{xyy} - u_{ty}u_{xy})\big|_{x=0} dydt,$$

$$J_4 = \alpha^2 \iint_{S_4} (u_t u_{yyy} - u_{ty}u_{yy} + u_t u_{xyy} - u_{tx}u_{xy})\big|_{y=0} dxdt,$$

S_i — грани параллелепипеда Q_τ, лежащие соответственно на плоскостях $x = p$, $y = q$, $x = 0$ и $y = 0$.

Пусть выполнены граничные условия (2): $u = u_{xx} = 0$ при $x = 0$ и $x = p$. Тогда $u_t = u_{ty} = 0$ при $x = 0$ и $x = p$, поэтому интегралы $J_1 = J_3 = 0$. Аналогично $u_t = u_{tx} = u_{yx} = 0$ при $y = 0$ и $y = q$. В силу этого $J_2 = J_4$.

Тогда из равенства (7) следует, что

$$E(\tau) \leqslant E(0) + \frac{1}{2}\iiint_{Q_\tau} F^2(x,y,t)dxdydt + \frac{1}{2}\iiint_{Q_\tau} u_t^2 dxdydt = \\ = A + \frac{1}{2}\int_0^\tau dt \iint_{D_1 \cup D_2} u_t^2 dxdy \leqslant A + \int_0^\tau E(t)dt, \tag{8}$$

где

$$A = E(0) + \frac{1}{2}\iiint_{Q_\tau} F^2(x,y,t)\,dxdydt.$$

Отсюда, следуя [13, с. 77], получим

$$A + \int_0^T E(t)dt \leqslant Ae^T. \tag{9}$$

Тогда из неравенств (8), (9) следует оценка (6). □

Следствие 1. *Если в условиях теоремы 1 правая часть $F(x,y,t)$ уравнения (1) равна нулю, то при любом $t \in [0,T]$ справедливо равенство*

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2}\iint_D \left[\psi^2(x,y) + \alpha^2(\varphi_{xx}^2 + 2\varphi_{xy}^2 + \varphi_{yy}^2)\right]dxdy. \tag{10}$$

Равенство (10) означает, что полная энергия собственных колебаний однородной пластины остается в течение всего процесса колебаний постоянной и равной ее начальной энергии.

Справедливость равенства (10) следует из соотношения (7).

Следствие 2 (Теорема единственности). *Если существует функция $u(x,y,t)$, удовлетворяющая условиям (2)–(5), то она определяется единственным образом.*

Доказательство. Пусть существуют функции $u_1(x,y,t)$ и $u_2(x,y,t)$, которые удовлетворяют условиям следствия 2. Тогда их разность $u_1(x,y,t) - u_2(x,y,t) = u(x,y,t)$ принадлежит классу (4), удовлетворяет однородному уравнению $Lu \equiv 0$ в Q, нулевым начальным условиям $u(x,y,0) = u_t(x,y,0) \equiv 0$ и граничным условиям (2). Для такого решения из равенства (10) имеем

$$E(t) = \frac{1}{2}\iint_Q \left[u_t^2 + \alpha^2(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)\right]dxdy = 0$$

при любом $t \in [0,T]$. Данное равенство возможно только тогда, когда $u_t \equiv 0$, $u_{xx} \equiv 0$, $u_{xy} \equiv 0$ и $u_{yy} \equiv 0$ в области Q. Из этих условий следует, что $u(x,y,t) = ax + by + c$, где a, b и c — произвольные постоянные. По условию эта функция должна удовлетворять граничным условиям (2) и нулевым начальным условиям. Из этих условий следует, что $a = b = c = 0$. Следовательно, $u(x,y,t) \equiv 0$ в $\overline{Q}$. □

3. Колебания пластины с граничными условиями «шарнир–заделка». В уравнении (1) разделим переменные $u(x,y,t) = v(x,y)f(t)$. Тогда относительно $v(x,y)$ получим спектральную задачу

$$\Delta^2 v - \lambda^2 v = 0, \quad (x,y) \in D, \tag{11}$$

$$v(0,y) = v_{xx}(0,y) = v(p,y) = v_{xx}(p,y) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant q, \tag{12}$$

$$v(x,0) = v_y(x,0) = v(x,q) = v_y(x,q) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant p. \tag{13}$$

Решение спектральной задачи (11)–(13) будем искать в виде $v(x,y) = X(x)Y(y)$. Тогда из уравнения (11) будем иметь

$$\frac{X^{IV}}{X} = -\frac{Y^{IV}}{Y} - 2\frac{Y''}{Y}\frac{X''}{X} + \lambda^2 = -\mu^2.$$

Допустим, что $X'' = -C_0 X$, где $C_0 = \mathrm{const} > 0$. Тогда получим

$$X^{IV}(x) + \mu^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < p, \tag{14}$$

$$Y^{IV}(y) - 2C_0 Y''(y) - (\mu^2 + \lambda^2)Y(y) = 0, \quad 0 < y < q. \tag{15}$$

Из условия $X'' = -C_0 X$ вытекает, что $X^{IV} = -C_0 X'' = C_0^2 X$. Следовательно, из уравнения (14) получим, что $\mu^2 = -C_0^2$, и относительно $X(x)$ имеем спектральную задачу

$$X^{IV}(x) - C_0^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < p, \tag{16}$$

$$X(0) = X''(0) = X(p) = X''(p) = 0. \tag{17}$$

Обозначим через L дифференциальный оператор, порожденный дифференциальным выражением X^{IV} на множестве функций $C^4(0,p) \cap C^3[0,p]$, удовлетворяющих граничным условиям (17). Этот оператор является самосопряженным, так как задача, сопряженная задаче (16) и (17), совпадает с исходной. Отсюда следует, что все собственные значения оператора L являются действительными числами, и собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны на $[0,p]$. Система собственных функций полна в пространстве $L_2[0,p]$. При этом оператор L является положительным, поэтому каждое собственное значение является неотрицательным и простым. Собственные функции задачи (16), (17) и соответствующие им собственные значения имеют следующий вид [10]:

$$X_m(x) = \sqrt{2/p}\,\sin d_m x, \tag{18}$$

$$C_0^2 = d_m^4 = (\pi m/p)^4, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{19}$$

Для функций $Y(y)$ на основании (15) и (13) имеем следующую задачу:

$$Y''(y) - 2C_0 Y''(y) - (\lambda^2 - C_0^2)Y(y) = 0, \;\; 0 < y < q. \tag{20}$$

$$Y(0) = Y'(0) = Y(q) = y'(q) = 0. \tag{21}$$

Для дифференциального уравнения (20) составим характеристическое уравнение

$$k^4 - 2C_0 k^2 + C_0^2 - \lambda^2 = 0,$$

имеющее корни

$$k_1 = \sqrt{C_0 + \lambda} = \alpha,\; k_2 = -\alpha,\; k_3 = \sqrt{C_0 - \lambda} = i\sqrt{\lambda - C_0} = i\beta,\; k_4 = -i\beta.$$

Здесь считаем, что $C_0 + \lambda > 0$, $C_0 - \lambda < 0$. Тогда дифференциальное уравнение (20) имеет общее решение

$$Y(y) = a_1 \operatorname{ch} \alpha y + a_2 \operatorname{sh} \alpha y + a_3 \cos \beta y + a_4 \sin \beta y, \tag{22}$$

где a_i — произвольные постоянные.

Удовлетворив функции (22) первым двум условиям из (21), найдем

$$a_3 = -a_1, \quad a_4 = -\frac{\alpha}{\beta}a_2.$$

Тогда функция (22) примет вид

$$Y(y) = a_1(\operatorname{ch}\alpha y - \cos\beta y) + a_2\Big(\operatorname{sh}\alpha y - \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta y\Big). \tag{23}$$

Теперь удовлетворим функцию (23) двум последним условиям из (21):

$$\begin{cases} a_1(\operatorname{ch}\alpha q - \cos\beta q) + a_2\Big(\operatorname{sh}\alpha q - \dfrac{\alpha}{\beta}\sin\beta q\Big) = 0, \\ a_1(\alpha\operatorname{sh}\alpha q + \beta\sin\beta q) + a_2\alpha(\operatorname{ch}\alpha q - \cos\beta q) = 0. \end{cases}$$

Для определения β приравняем к нулю определитель этой системы:

$$2\alpha\beta - 2\alpha\beta\operatorname{ch}\alpha q\cos\beta q - (\beta^2 - \alpha^2)\operatorname{sh}\alpha q\sin\beta q = 0. \tag{24}$$

Уравнение (24) перепишем в виде

$$\sin(\beta q + \gamma) = \frac{2\alpha\beta}{A}, \tag{25}$$

где $\gamma = \arcsin\dfrac{2\alpha\beta\operatorname{ch}\alpha q}{A}$,

$$A = \sqrt{(2\alpha\beta\operatorname{ch}\alpha q)^2 + (\beta^2-\alpha^2)^2\operatorname{sh}^2\alpha q} = \sqrt{4\alpha^2\beta^2 + (\alpha^2+\beta^2)^2\operatorname{sh}^2\alpha q}.$$

Из уравнения (25) найдем

$$\beta = \frac{1}{q}\Big[\pi n + (-1)^n\arcsin\frac{2\alpha\beta}{A} - \gamma\Big], \quad n \in \mathbb{N}, \tag{26}$$

так как правая часть уравнения (25) больше нуля и меньше единицы.

Полученное равенство (26) относительно β является нелинейным уравнением. Для обоснования существования его решения рассмотрим функциональное уравнение

$$\beta = f(\beta) = \frac{1}{q}\Big[\pi n + (-1)^n\arcsin\frac{2\alpha\beta}{A} - \gamma\Big]$$

при фиксированном n.

Как известно, для разрешимости такого уравнения достаточно того, чтобы $|f'(\beta)| < 1$. Найдем производную:

$$f'(\beta) = \frac{2\alpha(\alpha^2+3\beta^2)\operatorname{sh}\alpha q}{A^2}\Big[(-1)^n + \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}\operatorname{ch}\alpha q\Big].$$

Отсюда получим оценку

$$|f'(\beta)| \leqslant \frac{2\alpha(\alpha^2+3\beta^2)\big[\alpha^2-\beta^2+(\alpha^2+\beta^2)\operatorname{ch}\alpha q\big]}{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)^2\operatorname{sh}\alpha q} = \\ = \frac{4\alpha(\alpha^2+3\beta^2)\big(\alpha^2\operatorname{ch}^2\frac{\alpha q}{2}+\beta^2\operatorname{sh}^2\alpha q\big)}{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)^2\operatorname{sh}\alpha q} = \\ = \frac{2\alpha(\alpha^2+3\beta^2)\big(\alpha^2+(\alpha^2+\beta^2)\operatorname{sh}^2\frac{\alpha q}{2}\big)}{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)^2\operatorname{sh}\alpha q},$$

которая меньше 1 при больших β, следовательно, и при больших α (так как $\alpha > \beta$).

Тогда уравнение (26) имеет по крайней мере одно решение. Придавая n различные значения, получим счетное множество значений β_n, которые находятся из уравнения (25). При больших n справедлива асимптотическая формула

$$\beta_n \approx \pi n/q.$$

Соответствующая система собственных функций имеет вид

$$\widetilde{Y}_{nm}(y) = \\ = \frac{\beta_n\operatorname{sh}\alpha_{nm}q-\alpha_{nm}\sin\beta_n q}{\operatorname{ch}\alpha_{nm}q-\cos\beta_n q}(\cos\beta_n y-\operatorname{ch}\alpha_{nm}y)+\beta_n\operatorname{sh}\alpha_{nm}y-\alpha_{nm}\sin\beta_n y = \\ = A_{nm}(\cos\beta_n y-\operatorname{ch}\alpha_{nm}y)+\beta_n\operatorname{sh}\alpha_{nm}y-\alpha_{nm}\sin\beta_n y = \\ = \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha_{nm}q-\cos\beta_n q}\big[\beta_n(\operatorname{sh}\alpha_{nm}q\cos\beta_n y-\operatorname{sh}\alpha_{nm}y\cos\beta_n q) - \\ - \beta_n\operatorname{sh}\alpha_{nm}(q-y)-\alpha_{nm}\sin\beta_n(q-y) + \\ + \alpha_{nm}(\operatorname{ch}\alpha_{nm}y\sin\beta_n q-\operatorname{ch}\alpha_{nm}q\sin\beta_n y)\big], \quad (27)$$

которая, вообще говоря, зависит от номера m, так как $\alpha^2 = C_0+\lambda = 2C_0 + \beta_n^2 = 2d_m^2+\beta_n^2$ зависит от n и m.

Ортогональность системы собственных функций (27) задачи (20), (21) следует из того, что дифференциальный оператор, определенный дифференциальным выражением $Y^{IV}-2C_0Y''$ на множестве функций $C^4(0,q)\cap C^3[0,q]$, удовлетворяющих граничным условиям (21), является самосопряженным.

Найдем норму элементов системы собственных функций (27):

$$\|\widetilde{Y}_{nm}\|^2 = \int_0^q \widetilde{Y}^2_{nm}(y)dy = \\ = \int_0^q \big[A^2_{nm}(\cos\beta_n y-\operatorname{ch}\alpha_{nm}y)^2+2A_{nm}(\cos\beta_n y-\operatorname{ch}\alpha_{nm}y)\times \\ \times(\beta_n\operatorname{sh}\alpha_{nm}y-\alpha_{nm}\sin\beta_n y)+(\beta_n\operatorname{sh}\alpha_{nm}y-\alpha_{nm}\sin\beta_n y)^2\big]dy = \\ = J_1+J_2+J_3.$$

Вычислим интегралы J_i:

$$J_1 = A^2_{nm}\int_0^q\big(\cos^2\beta_n y-2\cos\beta_n y\operatorname{ch}\alpha_{nm}y+\operatorname{ch}^2\alpha_{nm}y\big)dy =$$

$$= \frac{A_{nm}^2}{2}\Big(q+\frac{\sin 2\beta_n q}{2\beta_n}\Big) - \frac{2A_{nm}^2}{\alpha_{nm}^2+\beta_n^2}\big[\alpha_{nm}\cos\beta_n q\,\mathrm{sh}\,\alpha_{nm}q + \beta_n\sin\beta_n q\,\mathrm{ch}\,\alpha_{nm}q\big] + \\ + \frac{A_{nm}^2}{2}\Big(q+\frac{\mathrm{sh}\,2\alpha_{mn}q}{2\alpha_{nm}}\Big),$$

$$J_2 = 2A_{nm}\int_0^q \big(\beta_n\cos\beta_n y\,\mathrm{sh}\,\alpha_{nm}y - \alpha_{nm}\cos\beta_n y\sin\beta_n y - \\ - \beta_n\,\mathrm{ch}\,\alpha_{nm}y\,\mathrm{sh}\,\alpha_{nm}y + \alpha_{nm}\,\mathrm{ch}\,\alpha_{nm}y\sin\beta_n y\big)\,dy = \\ = \frac{2A_{nm}\beta_n}{\alpha_{nm}^2+\beta_n^2}\big[\alpha_{nm}\cos\beta_n q\,\mathrm{ch}\,\alpha_{nm}q + \beta_n\sin\beta_n q\,\mathrm{sh}\,\alpha_{nm}q - \alpha_{nm}\big] - \\ - 2A_{nm}\alpha_{nm}\frac{\sin^2\beta_n q}{2\beta_n} - 2A_{nm}\beta_n\frac{\mathrm{sh}^2\,\alpha_{nm}q}{2\alpha} + \\ + \frac{2A_{nm}\alpha_{nm}}{\alpha_{nm}^2+\beta_n^2}\big[\alpha_{nm}\sin\beta_n q\,\mathrm{sh}\,\alpha_{nm}q - \beta_n\cos\beta_n q\,\mathrm{ch}\,\alpha_{nm}q + \beta_n\big] = \\ = -\frac{A_{nm}}{\alpha_{nm}\beta_n}(\beta_n\,\mathrm{sh}\,\alpha_{nm}q - \alpha_{nm}\sin\beta_n q)^2,$$

$$J_3 = \int_0^q \big(\beta_n^2\,\mathrm{sh}^2\,\alpha_{nm}y - 2\beta_n\alpha_{nm}\,\mathrm{sh}\,\alpha_{nm}y\sin\beta_n y + \alpha_{nm}^2\sin^2\beta_n y\big)\,dy = \\ = \frac{\beta_n^2}{2}\Big(\frac{\mathrm{sh}\,2\alpha_{nm}q}{2\alpha_{nm}} - q\Big) - \frac{2\beta_n\alpha_{nm}}{\alpha_{nm}^2+\beta_n^2}\big(\alpha_{nm}\sin\beta_n q\,\mathrm{ch}\,\alpha_{nm}q - \beta_n\cos\beta_n q\,\mathrm{sh}\,\alpha_{nm}q\big) + \\ + \frac{\alpha_{nm}^2}{2}\Big(q - \frac{\sin 2\beta_n q}{2\beta_n}\Big).$$

Предварительно с учетом равенства (24) вычислим

$$\frac{2A_{nm}^2}{\alpha_{nm}^2+\beta_n^2}\big[\alpha_{nm}\cos\beta_n q\,\mathrm{sh}\,\alpha_{nm}q + \beta_n\sin\beta_n q\,\mathrm{ch}\,\alpha_{nm}q\big] + \\ + \frac{2\beta_n\alpha_{nm}}{\alpha_{nm}^2+\beta_n^2}\big(\alpha_{nm}\sin\beta_n q\,\mathrm{ch}\,\alpha_{nm}q - \beta_n\cos\beta_n q\,\mathrm{sh}\,\alpha_{nm}q\big) = \\ = \frac{2}{\alpha_{nm}^2+\beta_n^2}\big[(A_{nm}^2-\beta_n^2)\alpha_{nm}\cos\beta_n q\,\mathrm{sh}\,\alpha_{nm}q + \\ + (A_{nm}^2+\alpha_{nm}^2)\beta_n\sin\beta_n q\,\mathrm{ch}\,\alpha_{nm}q\big] = 2A_{nm}\sin\beta_n q\,\mathrm{sh}\,\alpha_{nm}q.$$

Тогда будем иметь

$$\|\widetilde{Y}_{nm}\|^2 = \Big(A_{nm}^2 + \frac{\alpha_{nm}^2-\beta_n^2}{2}\Big)q + \frac{A_{nm}^2}{4}\Big(\frac{\sin 2\beta_n q}{\beta_n} + \frac{\mathrm{sh}\,2\alpha_{nm}q}{\alpha_{nm}}\Big) + \\ + \frac{\beta_n^2\,\mathrm{sh}\,2\alpha_{nm}q}{4\alpha_{nm}} - \frac{\alpha_{nm}^2}{4\beta_n}\sin 2\beta_n q - 2A_{nm}\sin\beta_n q\,\mathrm{sh}\,\alpha_{nm}q - \\ - \frac{A_{nm}}{\alpha_{nm}\beta_n}\big(\beta_n\,\mathrm{sh}\,\alpha_{nm}q - \alpha\sin\beta_n q\big)^2 =$$

$$= \Big(A_{nm}^2 + \frac{\alpha_{nm}^2 - \beta_n^2}{2}\Big)q + \frac{A_{nm}^2}{4}\Big(\frac{\sin 2\beta_n q}{\beta_n} + \frac{\operatorname{sh} 2\alpha_{nm} q}{\alpha_{nm}}\Big) + \frac{\beta_n^2}{4\alpha_{nm}} \operatorname{sh} 2\alpha_{nm} q - \\ - \frac{\alpha_{nm}^2}{4\beta_n} \sin 2\beta_n q - \frac{A_{nm}\beta_n}{\alpha_{nm}} \operatorname{sh}^2 \alpha_{nm} q - \frac{A_{nm}\alpha_{nm}}{\beta_n} \sin^2 \beta_n q. \quad (28)$$

Ортонормированная система собственных функций задачи (20), (21) определяется по формуле

$$Y_{nm}(y) = \frac{1}{\|\widetilde{Y}_{nm}\|}\widetilde{Y}_{nm}(y), \quad (29)$$

где $\widetilde{Y}_{nm}(y)$ находятся по формуле (27), норма $\|\widetilde{Y}_{nm}\|$ — из формулы (28), а собственные значения β_n — из равенства (26).

На основании найденных собственных функций (18) и (29) одномерных спектральных задач (16), (17) и (20), (21) построим собственные функции

$$v_{mn}(x, y) = X_{mn}(x)Y_{nm}(y), \quad (30)$$

которые соответствуют собственным значениям

$$\lambda_{mn} = d_m^2 + \beta_n^2, \quad (31)$$

где d_m и β_n находятся из формул (19) и (26) соответственно.

Следуя работам [10, 14], введем функции

$$u_{mn}(t) = \iint_D u(x, y, t)v_{mn}(x, y)dxdy, \quad (32)$$

где $u(x, y, t)$ — решение начально-граничной задачи (2)–(5).

Дифференцируя равенство (32) по $t \in (0, T)$ дважды и учитывая уравнение (1), получим

$$u''_{mn}(t) = \iint_D F(x, y, t)v_{mn}(x, y)dxdy - \\ - \alpha^2 \iint_D \big(u_{xxxy} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy}\big)v_{mn}(x, y)dxdy. \quad (33)$$

Интегрируя по частям с учетом граничных условий (2) и (12), (13), имеем

$$\iint_D u_{xxxx}v_{mn}(x, y)dxdy = d_m^4 \iint_D uv_{mn}(x, y)dxdy,$$

$$\iint_D u_{yyyy}v_{mn}(x, y)dxdy = \\ = \int_0^p X_{mn}(x)dx \int_0^q u_{yyyy}Y_{nm}(y)dy = \iint_D u(x, y)X_{mn}(x)Y_{nm}^{IV}(y)dxdy = \\ = \iint_D u(x, y)X_{mn}(x)\big[2C_0Y''_{nm} + (\lambda_{mn}^2 - C_0^2)Y_{nm}(y)\big]dxdy =$$

$$= 2d_m^2 \iint_D uX_{mn}(x)Y''_{nm}(y)dxdy + (\lambda_{mn}^2 - d_m^4)\iint_D uv_{mn}(x,y)dxdy,$$

$$\iint_D u_{xxyy}v_{mn}(x,y)dxdy = \int_0^q Y_{nm}(y)dy \int_0^p u_{yyxx}X_{mn}(x)dx =$$
$$= -d_m^2 \iint_D u_{yy}X_{mn}(x)Y_{nm}(y)dxdy = -d_m^2 \int_0^p X_{mn}(x)dx \int_0^q u_{yy}Y_{nm}(y)dy =$$
$$= -d_m^2 \iint_D u(x,y)X_{mn}(x)Y''_{nm}(y)dxdy.$$

Подставляя найденные значения этих интегралов в равенство (33), получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно $u_{mn}(t)$:

$$u''_{mn}(t) + \alpha^2\lambda_{mn}^2 u_{mn}(t) = F_{mn}(t), \tag{34}$$

где

$$F_{mn}(t) = \iint_D F(x,y,t)v_{mn}(x,y)dxdy.$$

Общее решение дифференциального уравнения (34) находится по формуле

$$u_{mn} = a_{mn}\cos\alpha\lambda_{mn}t + b_{mn}\sin\alpha\lambda_{mn}t + \widetilde{F}_{mn}(t), \tag{35}$$

где

$$\widetilde{F}_{mn}(t) = \frac{1}{\omega_{mn}}\int_0^t F_{mn}(s)\sin[\omega_{mn}(t-s)]ds, \quad \omega_{mn} = \alpha\lambda_{mn}, \tag{36}$$

a_{mn} и b_{mn} — произвольные постоянные. Для определения неизвестных a_{mn} и b_{mn} воспользуемся начальными условиями (3) и формулой (32):

$$u_{mn}(0) = \iint_D u(x,y,0)v_{mn}(x,y)dxdy =$$
$$= \iint_D \varphi(x,y)v_{mn}(x,y)dxdy = \varphi_{mn}, \tag{37}$$

$$u'_{mn}(0) = \iint_D u_t(x,y,0)v_{mn}(x,y)dxdy =$$
$$= \iint_D \psi(x,y)v_{mn}(x,y)dxdy = \psi_{mn}. \tag{38}$$

Удовлетворив функции (35) начальным условиям (37) и (38), найдем

$$a_{mn} = \varphi_{mn}, \quad b_{mn} = \frac{\psi_{mn}}{\alpha\lambda_{mn}}.$$

Подставляя найденные значения a_{mn} и b_{mn} в формулу (35), получим явный вид функций

$$u_{mn}(t) = \varphi_{mn}\cos\omega_{mn}t + \frac{\psi_{mn}}{\omega_{mn}}\sin\omega_{mn}t + \widetilde{F}_{mn}(t). \tag{39}$$

На основании частных решений (39) и (30) решение задачи (2)–(5) можно определить в виде суммы ряда Фурье

$$u(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t) v_{mn}(x,y). \tag{40}$$

Лемма 1. *При $y \in [0,q]$ и больших n и m справедливы оценки*

$$|Y_{nm}^i(y)| \leqslant M_i \alpha_{nm}^i, \quad i = \overline{0,4},$$

где здесь и далее M_i — положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от α, p, q и T.

Доказательство. Из формулы (27) следует, что при больших n и m

$$|\widetilde{Y}_{nm}^i(y)| \leqslant \widetilde{M}_{i+1} \alpha_{nm}^i, \quad i = \overline{0,4}. \tag{41}$$

Здесь $\widetilde{M}_i$ — также положительные постоянные.

Оценим норму $\|\tilde{Y}_{nm}\|$. Для этого равенству (28) придадим несколько иной вид:

$$\|\widetilde{Y}_{nm}\|^2 = \Big(A_n^2 + \frac{\alpha_{nm}^2 - \beta_n^2}{2}\Big) q + \frac{\operatorname{sh}\alpha_{nm} q}{2\alpha}\big[(A_n^2 + \beta_n^2)\operatorname{ch}\alpha_{nm} q - 2A_n\beta_n \operatorname{sh}\alpha_{nm} q\big] + $$
$$+ \frac{\sin\beta_n q}{2\beta_n}\big[(A_n^2 - \alpha_{nm}^2)\cos\beta_n q - 2A_n\alpha_{nm}\sin\beta_n q\big] =$$
$$= \Big(A_n^2 + \frac{\alpha_{nm}^2 - \beta_n^2}{2}\Big) q + \frac{\operatorname{sh}\alpha_{nm} q}{2\alpha_{nm}}\big[(A_n - \beta_n)^2 e^{\alpha_{nm} q} + (A_n + \beta_n)^2 e^{-\alpha_{nm} q}\big] +$$
$$+ \frac{A_n^2 + \alpha_{nm}^2}{2\beta_n}\sin\beta_n q \cos(\beta_n q + \gamma_{nm}),$$

где $\gamma_{nm} = \arccos \dfrac{A_n^2 - \alpha_{nm}^2}{A_n^2 + \alpha_{nm}^2}$.

Поскольку $A_n \sim \beta_n$ при больших n и m, отсюда следует, что $\|\widetilde{Y}_{nm}\| \sim \alpha_{nm}$. Тогда в силу неравенств (41) следует справедливость оценок, указанных в лемме 1. □

Лемма 2. *При любом $t \in [0,t]$ справедливы оценки*

$$|u_k(t)| \leqslant M_5\Big(|\varphi_{mn}| + \frac{1}{\lambda_{mn}}|\psi_{mn}| + \frac{1}{\lambda_{mn}}\|F_{mn}\|\Big), \tag{42}$$

$$|u_k''(t)| \leqslant M_6\big(\lambda_{mn}^2|\varphi_{mn}| + \lambda_{mn}|\psi_{mn}| + \lambda_{mn}\|F_{mn}\|\big), \tag{43}$$

где $\|F_{mn}\| = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} |F_{mn}(t)|$.

Справедливость оценок (42) и (43) следует из формул (39), (36) и леммы 1.

Формально из ряда (40) почленным дифференцированием составим ряды

$$u_{tt} = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}''(t) v_{mn}(x,y), \tag{44}$$

$$u_{xxxx} = \sum_{m,n=1}^{\infty} d_m^4 u_{mn}(t) v_{mn}(x,y), \tag{45}$$

$$\begin{aligned} u_{yyyy} = &\sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t) X_m(x) Y_{nm}^{IV}(y) = \\ &= \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t) X_m(t) \big[2d_m^2 Y_{nm}''(y) + (\lambda_{nm}^2 - d_m^4) Y_{nm}(y)\big] = \\ &= 2\sum_{m,n=1}^{\infty} d_m^2 u_{mn}(t) X_m(t) Y_{nm}''(y) + \sum_{m,n=1}^{\infty} \beta_n^2 \alpha_{nm}^2 u_{mn}(t) v_{nm}(x,y), \end{aligned} \tag{46}$$

$$u_{xxyy} = -\sum_{m,n=1}^{\infty} d_m^2 u_{mn}(t) X_m(x) Y_{mn}''(y). \tag{47}$$

Ряд (40) при $(x,y,t) \in \overline{Q}$ на основании лемм 1 и 2 мажорируется рядом

$$M_7 \sum_{m,n=1}^{\infty} \big(|\varphi_{mn}| + \lambda_{mn}^{-1}|\psi_{mn}| + \lambda_{mn}^{-1}\|F_{mn}\|\big). \tag{48}$$

А ряды (44)–(47) аналогично при $(x,y,t) \in \overline{Q}$ на основании лемм 1 и 2 мажорируются рядом

$$M_8 \sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_{mn}^4 \big(|\varphi_{mn}| + \lambda_{mn}^{-1}|\psi_{mn}| + \lambda_{mn}^{-1}\|F_{mn}\|\big). \tag{49}$$

Прежде обоснуем сходимость числового ряда (48).

Лемма 3. *Пусть*

$$\varphi(x,y) \in C_{x,y}^{2,2}(\overline{D}), \quad \varphi(0,y) = \varphi(p,y) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant q;$$

$$\varphi^{(2,0)}(x,0) = \varphi^{(2,0)}(x,q) = \varphi^{(2,1)}(x,0) = \varphi^{(2,1)}(x,q) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant p;$$

$$\psi(x,y) \in C_{x,y}^{1,1}(\overline{D}), \quad \psi(0,y) = \psi(p,y) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant q;$$

$$\psi^{(1,0)}(x,0) = \psi^{(1,0)}(x,q) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant p;$$

$$F(x,y,t) \in C(\overline{Q}) \cap C_{x,y}^{1,1}(\overline{D}), \quad F(0,y,t) = F(p,y,t) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant q,\ 0 \leqslant t \leqslant T;$$

$$F_x(x,0,t) = F_x(x,q,t) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant p,\ 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Тогда имеют место оценки

$$|\varphi_{mn}| \leqslant \frac{M_9}{d_m^2 \beta_n^2}, \quad |\psi_{mn}| \leqslant \frac{M_{10}}{d_m \beta_n}, \quad \|F_{mn}\| \leqslant \frac{M_{11}}{d_m \beta_n}. \tag{50}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проинтегрируем интеграл в (37) по частям два раза по переменной x. Тогда имеем

$$\varphi_{mn} = -\frac{1}{d_m^2}\iint_D \varphi^{(2,0)}_{(x,y)} v_{mn}(x,y)dxdy =$$
$$= -\frac{1}{d_m^2}\int_0^p X_m(x)dx\int_0^q \varphi^{(2,0)} Y_{nm}(y)dy. \quad (51)$$

Внутренний интеграл снова два раза проинтегрируем по частям:

$$\int_0^q \varphi^{(2,0)} Y_{nm}(y)dy = \varphi^{(2,0)}(x,y)Y^{(1)}_{nm}(y)\Big|_0^q - \int_0^q \varphi^{(2,1)}(x,y)Y^{(1)}_{nm}(y)dy, \quad (52)$$

где

$$Y^{(1)}_{nm}(y) = \frac{1}{\|\widetilde{Y}_{nm}\|}\int \widetilde{Y}_{nm}(y)dy =$$
$$= \frac{1}{\|\widetilde{Y}_{nm}\|}\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha_{nm}q - \cos\beta_n q}\Big[\operatorname{sh}\alpha_{nm}q\sin\beta_n y - \frac{\beta_n}{\alpha_{nm}}\operatorname{ch}\alpha_{nm}y\cos\beta_n q +$$
$$+ \frac{\beta_n}{\alpha_{nm}}\operatorname{ch}\alpha_{nm}(q-y) - \frac{\alpha_{nm}}{\beta_n}\cos\beta_n(q-y) + \operatorname{sh}\alpha_{nm}y\sin\beta_n q -$$
$$- \frac{\alpha_{nm}}{\beta_n}\operatorname{ch}\alpha_{nm}q\sin\beta_n y\Big] = \frac{1}{\beta_n}\overline{Y}^{(1)}_{nm}(y);$$

функция $\overline{Y}^{(1)}_{nm}(y)$ ограничена при больших n и m.

Тогда равенство (52) примет вид

$$\int_0^q \varphi^{(2,0)}(x,y)Y_{nm}(y)dy = -\frac{1}{\beta_n}\int_0^q \varphi^{(2,1)}(x,y)\overline{Y}^{(1)}_{nm}(y)dy =$$
$$= -\frac{1}{\beta_n}\int_0^q \varphi^{(2,2)}(x,y)Y^{(2)}_{nm}(y)dy. \quad (53)$$

Здесь

$$Y^{(2)}_{nm}(y) = \int \overline{Y}^{(1)}_{nm}(y)dy =$$
$$= \frac{1}{\beta_n}\frac{\alpha_{nm}}{\|\widetilde{Y}_{nm}\|}\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha_{nm}q - \cos\beta_n q}\Big[-\frac{\beta_n}{\alpha_{nm}}\operatorname{sh}\alpha_{nm}q\cos\beta_n y -$$
$$- \frac{\beta_n^3}{\alpha_{nm}^3}\operatorname{sh}\alpha_{nm}y\cos\beta_n q - \frac{\beta_n^3}{\alpha_{nm}^3}\operatorname{sh}\alpha_{nm}(q-y) + \sin\beta_n(q-y) +$$
$$+ \frac{\beta_n^2}{\alpha_{nm}^2}\operatorname{ch}\alpha_{nm}y\sin\beta_n q - \operatorname{ch}\alpha_{nm}q\sin\beta_n q\Big] = \frac{1}{\beta_n}\overline{Y}^{(2)}_{nm}(y); \quad (54)$$

функция $\overline{Y}^{(2)}_{nm}(y)$ также ограничена при больших n и m. С учетом представления (54) равенство (53) примет вид

$$\int_0^q \varphi^{(2,0)}(x,y)Y_{nm}(y)dy = \frac{1}{\beta_n^2}\int_0^q \varphi^{(2,2)}(x,y)\overline{Y}^{(2)}_{nm}(y)dy. \quad (55)$$

Тогда из равенств (51) и (55) вытекает справедливость первой оценки из (50). Аналогично получим представления

$$\psi_{mn} = \frac{1}{d_m}\sqrt{\frac{2}{p}}\int_0^p \cos d_m x dx \int_0^q \psi^{(1,0)}(x,y)Y_{nm}(y)dy = \\ = \frac{1}{d_m\beta_n}\sqrt{\frac{2}{p}}\iint_D \psi^{(1,1)}(x,y)\cos d_m(x)\overline{Y}^{(1)}_{nm}(y)dxdy,$$

$$F_{mn}(t) = \frac{1}{d_m\beta_n}\sqrt{\frac{2}{p}}\iint_D F^{(1,1)}(x,y,t)\cos d_m(x)\overline{Y}^{(1)}_{nm}(y)dxdy,$$

на основании которых убеждаемся в справедливости остальных оценок из (50). □

В силу оценок (50) ряд (48) при $m,\ n \geqslant N_0$, N_0 — достаточно большое натуральное число, мажорируется сходящимся рядом

$$M_{12}\sum_{m,n>N_0}^{\infty} \frac{1}{d_m^2\beta_n^2} + \frac{1}{(d_m^2+\beta_n^2)d_m\beta_n} \leqslant M_{13}\sum_{m,n>N_0}^{\infty}\frac{1}{m^2n^2}. \tag{56}$$

Для обоснования сходимости ряда (49) нужны дополнительные условия для заданных функций $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ и $F(x,y,t)$.

Лемма 4. *Пусть*

$$\varphi(x,y)\in C^{10}(\overline{D}),\ \varphi(0,y)=\varphi(p,y)=\varphi^{(2,2)}(0,y)=\varphi^{(2,2)}(p,y)=0,\ 0\leqslant y\leqslant q;$$

$$\varphi^{(2,0)}(x,q)=\varphi^{(2,0)}(x,0)=\varphi^{(2,1)}(x,q)=\varphi^{(2,1)}(x,0)=0,$$

$$\varphi^{(2,4)}(x,0)=\varphi^{(2,4)}(x,q)=\varphi^{(2,5)}(x,0)=\varphi^{(2,5)}(x,q)=0,$$

$$\varphi^{(4,2)}(x,0)=\varphi^{(4,2)}(x,q)=\varphi^{(4,3)}(x,0)=\varphi^{(4,3)}(x,q)=0,\ 0\leqslant x\leqslant p;$$

$$\psi(x,y)\in C^{6}(\overline{D}),\ \psi(0,y)=\psi(p,y)=\psi^{(2,2)}(0,y)=\psi^{(2,2)}(p,y)=0,\ 0\leqslant y\leqslant q;$$

$$\psi^{(2,0)}(x,q)=\psi^{(2,0)}(x,0)=\psi^{(2,1)}(x,q)=\psi^{(2,1)}(x,0)=0,$$

$$F(x,y,t)\in C(\overline{Q})\cap C^6_{x,y}(\overline{D}),\quad F(0,y,t)=F(p,y,t)=F^{(2,2)}_{x,y}(0,y,t)= \\ =F^{(2,2)}_{x,y}(p,y,t)=0,\quad 0\leqslant y\leqslant q,\ 0\leqslant t\leqslant T;$$

$$F^{(2,0)}_{x,y}(x,0,t)=F^{(2,0)}_{x,y}(x,q,t)=F^{(2,1)}_{x,y}(x,0,t)= \\ =F^{(2,1)}_{x,y}(x,q,t)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant p,\ 0\leqslant t\leqslant T.$$

Тогда имеют место оценки

$$|\varphi_{mn}|\leqslant\frac{M_{14}}{d_m^2\beta_n^4\alpha_{mn}^4},\quad |\psi_{mn}|\leqslant\frac{M_{15}}{d_m^2\beta_n^2\alpha_{nm}^2},\quad \|F_{mn}\|\leqslant\frac{M_{16}}{d_m^2\beta_n^2\alpha_{nm}^2}.$$

Доказательство. Рассмотрим равенство (37). Интегрируя в нем по частям два раза по переменной x, получим

$$\varphi_{mn} = \iint_D \varphi(x,y) v_{mn}(x,y) dxdy = -\frac{1}{d_m^2} \iint_D \varphi^{(2,0)}(x,y) v_{mn}(x,y) dxdy. \quad (57)$$

Затем интеграл в правой части равенства (57) представим в виде

$$\iint_D \varphi^{(2,0)}(x,y) v_{mn}(x,y) dxdy = \int_0^p X_m(x)dx \int_0^q \varphi^{(2,0)}(x,y) Y_{nm}(y) dy =$$
$$= \frac{1}{\lambda_{nm}^2 - d_m^4} \int_0^p X_m(x)dx \int_0^q \varphi^{(2,0)} \left[Y_{nm}^{IV}(y) - 2d_m^2 Y_{nm}''(y) \right] dy.$$

Снова интегрируя по частям, будем иметь

$$\iint_D \varphi^{(2,0)}(x,y) v_{mn}(x,y) dxdy =$$
$$= \frac{1}{\beta_n^2 \alpha_{nm}^2} \iint_D \left[\varphi^{(2,4)}(x,y) + 2\varphi^{(4,2)}(x,y) \right] v_{nm}(x,y) dxdy. \quad (58)$$

Рассмотрим интеграл в правой части равенства (58) и представим его в виде

$$\iint_D \left[\varphi^{(2,4)}(x,y) + 2\varphi^{(4,2)}(x,y) \right] v_{nm}(x,y) dxdy =$$
$$= \int_0^p X_m(x)dx \int_0^q \left[\varphi^{(2,4)}(x,y) + 2\varphi^{(4,2)}(x,y) \right] Y_{nm}(y) dy =$$
$$= \int_0^p X_m(x)dx \frac{1}{\beta_n^2 \alpha_{mn}^2} \int_0^q \left[\varphi^{(2,4)}(x,y) + 2\varphi^{(4,2)}(x,y) \right] \left[Y_{nm}^{IV}(y) - 2d_m^2 Y_{nm}''(y) \right] dy =$$
$$= \frac{1}{\beta_n^2 \alpha_{mn}^2} \int_0^p X_m(x)dx \int_0^q \left[\varphi^{(2,8)}(x,y) - 2d_m^2 \varphi^{(2,6)}(x,y) + \right.$$
$$\left. + 2\varphi^{(4,6)}(x,y) - 4d_m^2 \varphi^{(4,4)}(x,y) \right] Y_n(y) dy =$$
$$= \frac{1}{\beta_n^2 \alpha_{mn}^2} \iint_D \left[\varphi^{(2,8)}(x,y) + 4\varphi^{(4,6)}(x,y) + 4\varphi^{(6,4)}(x,y) \right] v_{nm}(x,y) dxdy. \quad (59)$$

Тогда равенство (57) с учетом (58) и (59) примет вид

$$\varphi_{mn} = -\frac{1}{d_m^2 \beta_n^4 \alpha_{mn}^4} \iint_D \left[\varphi^{(2,8)}(x,y) + 4\varphi^{(4,6)}(x,y) + \right.$$
$$\left. + 4\varphi^{(6,4)}(x,y) \right] v_{nm}(x,y) dxdy. \quad (60)$$

Аналогично (57) и (58) имеем

$$\psi_{mn} = -\frac{1}{d_m^2 \beta_n^4 \alpha_{mn}^4} \iint_D \left[\psi^{(2,4)}(x,y) + 2\psi^{(4,2)}(x,y) \right] v_{nm}(x,y) dxdy. \quad (61)$$

$$F_{mn}(t) = -\frac{1}{d_m^2\beta_n^2\alpha_{mn}^2}\iint_D \big[F^{(2,4)}(x,y,t) + 2F^{(4,2)}(x,y,t)\big]v_{nm}(x,y)dxdy. \quad (62)$$

Из представлений (60)–(62) следует справедливость оценок (56). □

В силу леммы 4, т.е. на основании оценок (56), ряд (49) при m, $n > N_0$ оценивается сходящимся рядом

$$M_{17}\sum_{m,n>N_0}^{+\infty}\Big(\frac{1}{d_m^2\beta_n^4} + \frac{\alpha_{mn}^2}{d_m^2\beta_n^2\lambda_{mn}}\Big) \leqslant M_{18}\sum_{m,n>N_0}^{+\infty}\frac{1}{(mn)^2}.$$

Следовательно, доказана следующая

Теорема 2. *Если функции $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ и $F(x,y,t)$ удовлетворяют условиям лемм 3 и 4, то существует единственное решение задачи (2)–(5) в классе $C^{4,2}_{xy,t}(\overline{Q})$, которое определяется суммой ряда (40).*

Теперь установим устойчивость решения поставленной задачи от начальных функций $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ и правой части $F(x,y,t)$.

Теорема 3. *Для решения (40) задачи (2)–(5) имеют место следующие оценки:*

$$\|u(x,y,t)\|_{L_2(D)} \leqslant M_{19}\big(\|\varphi(x,y)\|_{L_2(D)} + \\ + \|\psi(x,y)\|_{L_2(D)} + \max_t \|F(x,y,t)\|_{L_2(D)}\big), \quad (63)$$

$$\|u(x,y,t)\|_{C(\overline{Q})} \leqslant M_{20}\big(\|\varphi(x,y)\|_{C^4(\overline{D})} + \|\psi(x,y)\|_{C(\overline{D})} + \|F(x,y,t)\|_{C(\overline{D})}\big). \quad (64)$$

Доказательство. Поскольку система (30) ортонормирована в $L_2(D)$, из формулы (40) на основании оценки (42) получим

$$\|u(x,y,t)\|^2_{L_2(D)} = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}^2(t) \leqslant 3M_5^2\sum_{m,n=1}^{\infty}\big(|\varphi_{mn}|^2 + |\psi_{mn}|^2 + \|F_{mn}\|^2\big) = \\ = 3M_5^2\big(\|\varphi(x,y)\|^2_{L_2(D)} + \|\psi(x,y)\|^2_{L_2(D)} + \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|F(x,y,t)\|^2_{L_2(D)}\big),$$

так как в силу неравенства Бесселя

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} F_{mn}^2(t) \leqslant ||F(x,y,t)||^2_{L_2(D)} \leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|F(x,y,t)\|^2_{L_2(D)}$$

следует справедливость оценки

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\|F_{mn}\|^2 = \sum_{m,n=1}^{\infty}\big(\max_{0\leqslant t\leqslant T}|F_{mn}(t)|\big)^2 = \\ = \sum_{m,n=1}^{\infty}\max_{0\leqslant t\leqslant T}F_{mn}^2(t) \leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|F(x,y,t)\|^2_{L_2(D)} \leqslant pq\|F(x,y,t)\|^2_{C(\overline{Q})}.$$

Отсюда и получим оценку (63).

Пусть (x, y, t) — произвольная точка из $\overline{Q}$. Тогда из (40) с учетом оценки (42) имеем

$$|u(x,y,t)| \leqslant \frac{2M_0}{\sqrt{pq}} \sum_{m,n=1}^{\infty} \Big(|\varphi_{mn}| + \frac{1}{\lambda_{mn}} |\psi_{mn}| + \frac{1}{\lambda_{mn}} \|F_{mn}\| \Big). \tag{65}$$

По условиям леммы 3 коэффициент φ_{mn} можно представить в виде

$$\varphi_{mn} = -\frac{1}{d_m^2 \beta_n^2} \iint_D \varphi^{(2,2)}(x,y) X_m(x) \overline{Y}_{nm}^{(2)}(y)\, dxdy. \tag{66}$$

Из равенства (31) при больших m, n следует, что

$$\left(\frac{\pi}{d}\right)^2 (m^2 + n^2) \leqslant \lambda_{mn} \leqslant \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 (m^2+n^2), \quad d = \max\{p, q\},\ l = \min\{p,q\}. \tag{67}$$

Тогда из неравенства (65) с учетом (66) и (67), используя неравенство Коши—Буняковского, получим

$$\begin{aligned}
&|u(x,y,t)| \leqslant \\
&\leqslant \widetilde{M}_5 \Big[\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{d_m^2 \beta_n^2} \max_{\overline{D}} |\varphi^{(2,2)}(x,y)| + \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2+n^2} \big(|\psi_{mn}| + \|F_{mn}\| \big) \Big] \leqslant \\
&\leqslant \widetilde{M}_6 \Big[\max_{\overline{D}} |\varphi^{(2,2)}(x,y)| + \Big(\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2+n^2)^2} \Big)^{1/2} \Big(\sum_{m,n=1}^{\infty} |\psi_{mn}|^2 \Big)^{1/2} + \\
&\qquad + \Big(\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2+n^2)^2} \Big)^{1/2} \Big(\sum_{m,n=1}^{\infty} \|F_{mn}\|^2 \Big)^{1/2} \Big] \leqslant \\
&\leqslant \widetilde{M}_7 \big(\max_{\overline{D}} |\varphi^{(2,2)}(x,y)| + \|\psi(x,y)\|_{L_2(D)} + \max_{0\leqslant t\leqslant T} \|F(x,y,t)\|_{L_2(D)} \big) \leqslant \\
&\qquad \leqslant M_{20} \big(\|\varphi(x,y)\|_{C^4(\overline{D})} + \|\psi(x,y)\|_{C(\overline{D})} + \|F(x,y,t)\|_{C(\overline{Q})} \big),
\end{aligned}$$

что и доказывает справедливость оценки (64). □

Таким образом, нами полностью доказана корректность постановки задачи (2)–(5) (задачи 1). При этом отметим, что при доказательстве теоремы 2 существования решения задачи на начальные условия (3) наложены достаточно сильные условия гладкости. Если ввести понятие обобщенного решения этой задачи, то эти условия можно значительно ослабить.

Определение 1. Решение задачи (2)–(5) (задачи 1) из класса $C_{xy,t}^{4,2}(\overline{Q})$ назовем классическим или регулярным решением этой задачи.

Определение 2. Функцию $u(x,y,t)$ будем называть обобщенным решением задачи (2)–(5) (задачи 1), если существует последовательность $u_n(x,y,t)$ регулярных решений задачи (2)–(5) с начальными данными

$$u_n(x,y,t) = \varphi_n(x,y), \quad u_{n\,t}(x,y,0) = \psi_n(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D},$$

и правыми частями $F_n(x,y,t)$, $(x,y,t)\in\overline{Q}$, равномерно сходящаяся к функции $u(x,y,t)$ на $\overline{Q}$; при этом функции $\varphi_n(x,y)$, $\psi_n(x,y)$ и $F_n(x,y,t)$ удовлетворяют условиям теоремы 2, они и производные $\dfrac{\partial^4\varphi_n(x,y)}{\partial x^i\partial y^j}$, $0\leqslant i,j\leqslant 4$, сходятся равномерно на $\overline{D}$ и $\overline{Q}$ соответственно к функциям $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$, $\dfrac{\partial^4\varphi(x,y)}{\partial x^i\partial y^j}$ и $F(x,y,t)$.

Теорема 4. *Если функции $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ и $F(x,y,t)$ удовлетворяют условиям леммы 3, то существует единственное и устойчивое обобщенное решение задачи* (2)–(5), *которое определяется суммой ряда* (40) *и является непрерывной на $\overline{Q}$ функцией.*

Доказательство. Пусть функции $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ и $F(x,y,t)$ удовлетворяют условиям леммы 3. Тогда существуют последовательности функций $\varphi_n(x,y)$, $\psi_n(x,y)$ и $F_n(x,y,t)$, удовлетворяющие условиям определения 2. По функциям $\varphi_n(x,y)$, $\psi_n(x,y)$ и $F_n(x,y,t)$ на основании теоремы 2 построим последовательность $u_n(x,y,t)$ регулярных решений задачи (2)–(5). В силу линейности изучаемой задачи разность $u_n(x,y,t)-u_m(x,y,t)$ является решением задачи (2)–(5) с начальными функциями $\varphi_n(x,y)-\varphi_m(x,y)$, $\psi_n(x,y)-\psi_m(x,y)$ и правой частью $F_n(x,y,t)-F_m(x,y,t)$. Тогда в силу оценки (64) при любых n, $m\in\mathbb{N}$ имеем

$$\|u_n-u_m\|_{C(\overline{D})}\leqslant M_{20}\big(\|\varphi_n-\varphi_m\|_{C^4(\overline{D})}+ \\ +\|\psi_n-\psi_m\|_{C(\overline{D})}+\|F_n(x,y,t)-F_m(x,y,t)\|_{C(\overline{D})}\big). \qquad (68)$$

По условию последовательности $\dfrac{\partial^4\varphi_n(x,y)}{\partial x^i\partial y^j}$, $0\leqslant i,j\leqslant 4$, $\psi_n(x,y)$ и $F_n(x,y,t)$ сходятся равномерно на $\overline{D}$ и $\overline{Q}$ соответственно к функциям $\dfrac{\partial^4\varphi(x,y)}{\partial x^i\partial y^j}$, $\psi(x,y)$ и $F(x,y,t)$. Следовательно, для них справедлив критерий Коши о равномерной сходимости. Поэтому из оценки (68) следует справедливость критерия Коши и для последовательности $u_n(x,y,t)$. Тогда она сходится равномерно на $\overline{Q}$ к единственной непрерывной функции $u(x,y,t)$, определенной рядом (40). Из доказательства теоремы 3 следует, что для обобщенного решения задачи (2)–(5) справедлива оценка (64), что и означает устойчивость такого решения. □

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Автор несет полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1966. 724 с.
2. Тимошенко С. П. *Колебания в инженерном деле.* М.: Физматлит, 1967. 444 с.

3. Тимошенко С. П., Войновский–Кригер С. *Пластинки и оболочки.* М.: Наука, 1966. 636 с.
4. Гулд С. *Вариационные методы в задачах о собственных значениях: Введение в метод промежуточных задач Вайнштейна.* М.: Мир, 1970. 328 с.
5. Филиппов А. П. *Колебания деформируемых систем.* М.: Машиностроение, 1970. 734 с.
6. Андрианов И. В., Данишевский В. В., Иванков А. О. *Асимптотические методы в теории колебаний балок и пластин.* Днепропетровск: Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры, 2010. 217 с.
7. Сабитов К. Б. Колебания балки с заделанными концами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 2. С. 311–324. EDN: UGXNZR. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1406.
8. Сабитов К. Б. К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок // *Диффер. уравн.*, 2017. Т. 53, № 1. С. 89–100. EDN: XRBXOV. DOI: https://doi.org/10.1134/S0374064117010083.
9. Сабитов К. Б. Начальная задача для уравнения колебаний балок // *Диффер. уравн.*, 2017. Т. 53, № 5. С. 665–671. EDN: YSXNEH. DOI: https://doi.org/10.1134/S0374064117050090.
10. Сабитов К. Б., Акимов А. А. Начально-граничная задача для нелинейного уравнения колебаний балки // *Диффер. уравн.*, 2020. Т. 56, № 5. С. 632–645. EDN: FUQBLD. DOI: https://doi.org/10.1134/S0374064120050076.
11. Сабитов К. Б. Обратные задачи для уравнения колебаний балки по определению правой части и начальных условий // *Диффер. уравн.*, 2020. Т. 56, № 6. С. 773–785. EDN: ZUQBSX. DOI: https://doi.org/10.1134/S0374064120060096.
12. Сабитов К. Б. Начально-граничные задачи для уравнения колебаний прямоугольной пластины // *Изв. вузов. Матем.*, 2021. № 10. С. 60–70. EDN: RZSSHV. DOI: https://doi.org/10.26907/0021-3446-2021-10-60-70.
13. Сабитов К. Б. *Уравнения математической физики.* М.: Физматлит, 2013. 352 с. EDN: UIDCGZ.
14. Young D. Vibration of rectangular plates by the Ritz method // *J. Appl. Mech.*, 1950. vol. 17, no. 4. pp. 448–453. DOI: https://doi.org/10.1115/1.4010175.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 4, pp. 650–671
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1950

MSC: 35M12

Vibrations of plate with boundary "hinged attachment" conditions

K. B. Sabitov[1,2]

[1] Ufa University of Science and Technology, Sterlitamak Branch,
49, pr. Lenina, Sterlitamak, 453103, Russian Federation.
[2] Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

In the paper, the initial problem for the equation of vibrations of a rectangular plate with boundary conditions of the "hinged attachment" type is studied. An energy inequality is established, from which the uniqueness of the solution of the stated initial-boundary problem follows. The corresponding existence and stability theorems for the solution of the problem in the classes of regular and generalized solutions are proved. The existence of a solution to the problem posed is carried out by the method of spectral analysis and it is constructed as the sum of an orthogonal series over a system of eigenfunctions corresponding to a two-dimensional spectral problem, which is constructed by the method of separation of variables. A complete substantiation of the convergence of the constructed three-dimensional series in the class of regular solutions of the considered equation is given. The generalized solution is defined as the uniform limit of the sequence of regular solutions of the initial boundary value problem.

Keywords: equation of vibrations of a rectangular plate, initial boundary value problem, energy inequality, uniqueness, series, existence, stability.

Received: 25th August, 2022 / Revised: 7th November, 2022 /
Accepted: 11th December, 2022 / First online: 28th December, 2022

Competing interests. I have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. The author assumes full responsibility for the submission of the final manuscript in print. I approve the final version of the manuscript.

Funding. The research has not received funding.

Differential Equations and Mathematical Physics
Research Article

Please cite this article in press as:
Sabitov K. B. Vibrations of plate with boundary "hinged attachment" conditions, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 4, pp. 650–671. EDN: CXCQCU. DOI: 10.14498/vsgtu1950 (In Russian).

Author's Details:
Kamil B. Sabitov https://orcid.org/0000-0001-9516-2704
Dr. Phys. & Math. Sci.; Chief Researcher[1]; Professor; Dept. of Higher Mathematics[2];
e-mail: sabitov_fmf@mail.ru

References

1. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1966, 724 pp. (In Russian)
2. Timoshenko S. P. *Kolebaniia v inzhenernom dele* [Fluctuations in Engineering]. Moscow, Fizmatlit, 1967, 444 pp. (In Russian)
3. Timoshenko S. P., Woinowsky–Krieger S. *Plastinki i obolochki* [Theory of Plates and Shells]. Moscow, Nauka, 1966, 636 pp.
4. Gould S. *Variatsionnye metody v zadachakh o sobstvennykh znacheniiakh: Vvedenie v metod promezhutochnykh zadach Vainshteina* [Variational Methods for Eigenvalue Problems: An Introduction to the Weinstein Method of Intermediate Problem]. Moscow, Mir, 1970, 328 pp. (In Russian)
5. Filippov A. P. *Kolebaniia deformiruemykh sistem* [Oscillations of Deformable Systems]. Moscow, Mashinostroenie, 1970, 734 pp. (In Russian)
6. Andrianov I. V., Danishevskii V. V., Ivankov A. O. *Asimptoticheskie metody v teorii kolebanii balok i plastin* [Asymptotic Methods in the Theory of Vibrations of Beams and Plates]. Dnepropetrovsk, Prydniprovska State Academy of Civil Engineering and Architecture, 2010, 217 pp.
7. Sabitov K. B. Fluctuations of a beam with clamped ends, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 2, pp. 311–324 (In Russian). EDN: UGXNZR. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1406.
8. Sabitov K. B. A remark on the theory of initial-boundary value problems for the equation of rods and beams, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 1, pp. 86–98. EDN: YVJCOJ. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266117010086.
9. Sabitov K. B. Cauchy problem for the beam vibration equation, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 5, pp. 658–664. EDN: XNIRNN. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266117050093.
10. Sabitov K. B., Akimov A. A. Initial-boundary value problem for a nonlinear beam vibration equation, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 5, pp. 621–634. EDN: VFFDXC. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266120050079.
11. Sabitov K. B. Inverse problems of determining the right-hand side and the initial conditions for the beam vibration equation, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 6, pp. 761–774. EDN: ULGVTX. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266120060099.
12. Sabitov K. B. Initial-boundary value problems for equation of oscillations of a rectangular plate, *Russian Math.*, 2021, vol. 65, no. 10, pp. 52–62. EDN: FCMYHQ. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X21100054.
13. Sabitov K. B. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Fizmatlit, 2013, 352 pp. (In Russian). EDN: UIDCGZ.
14. Young D. Vibration of rectangular plates by the Ritz method, *J. Appl. Mech.*, 1950, vol. 17, no. 4, pp. 448–453. DOI: https://doi.org/10.1115/1.4010175.