Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 27, № 1. С. 64–80
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1952
EDN: HTKOLW

УДК 517.968.7

Исследование задачи Коши для одного уравнения дробного порядка с оператором Римана–Лиувилля

***И. И. Хасанов*[1], *Д. И. Акрамова*[1], *А. А. Рахмонов*[2]**

[1] Бухарский государственный университет,
Узбекистан, 705018, Бухара, ул. Мухаммада Икбала, 11.
[2] Институт математики имени В.И. Романовского
Академии наук Республики Узбекистан,
Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университетская, 46.

Аннотация

Статья посвящена решению задачи Коши для дифференциального уравнения с дробной производной Римана–Лиувилля. В данном случае начальное условие ставится естественным образом и доказывается, что построенное для этой задачи решение является регулярным. В первую очередь строится фундаментальное решение и проводится анализ его свойств. Затем, используя эти свойства, изучается решение задачи Коши для однородного уравнения. Кроме того, в отличие от других задач такого типа, в данной работе решение задачи Коши, поставленной для неоднородного уравнения, получено в явном виде при помощи принципа Дюамеля и трехпараметрической функции Миттаг–Леффлера. В результате применения дополнительных условий к данным задачам также продемонстрировано, что это решение является классическим.

Ключевые слова: дробные производные Римана–Лиувилля, задача Коши, функция Грина, функция Миттаг–Леффлера, принцип Дюамеля.

Получение: 5 сентября 2022 г. / Исправление: 12 марта 2023 г. /
Принятие: 17 марта 2023 г. / Публикация онлайн: 24 марта 2023 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Научная статья

Образец для цитирования
Хасанов И. И., Акрамова Д. И., Рахмонов А. А. Исследование задачи Коши для одного уравнения дробного порядка с оператором Римана–Лиувилля // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 1. С. 64–80. EDN: HTKOLW. DOI: 10.14498/vsgtu1952.

Сведения об авторах

Иброхим Ихтиерович Хасанов https://orcid.org/0000-0002-9634-5550
преподаватель; каф. дифференциальных уравнений; e-mail: ihasanov998@gmail.com

Дилшода Исроил кизи Акрамова https://orcid.org/0000-0001-9596-9401
преподаватель; каф. математического анализа; e-mail: akramova.shoda@mail.ru

Аскар Ахмадович Рахмонов https://orcid.org/0000-0002-7641-9698
кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник;
e-mail: araxmonov@mail.ru

1. Постановка задачи и основной результат. Рассмотрим задачу Коши для дробного дифференциального уравнения порядков $0 < \alpha, \beta \leqslant 1$

$$u_t + D^{1-\alpha}_{0+,t}u - D^{1-\beta}_{0+,t}u_{xx} = f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t \leqslant T \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где $f(x,t)$ и $\varphi(x)$ — заданные функции и $(D^{\gamma}_{0+,t}g)(t)$ — дробная производная в смысле Римана—Лиувилля по переменной t, определяемая равенством [1, p. 69]:

$$(D^{\gamma}_{0+,t}g)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{g(\tau)}{(t-\tau)^{\gamma}}d\tau, \quad 0 < \gamma < 1,$$

$$D^{\gamma}_{0+,t}g(t) = g^{(\gamma)}(t), \quad \gamma \in \{0,1\}.$$

В данной работе мы рассмотрим следующую задачу.

Задача. *Найти регулярное решение $u(x,t)$ уравнения (1) при $0 < \alpha, \beta \leqslant 1$ в области $\mathbb{R}^2_T := \{(x,t) : x \in \mathbb{R}, 0 < t \leqslant T\}$, удовлетворяющее (1), (2).*

Определение. Функция $u(x,t) \in C_b(\mathbb{R};[0,T])$ называется классическим (регулярным) решением задачи (1), (2) для заданных $f \in C_b(\mathbb{R};[0,T])$ и $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ такая, что $\frac{\partial}{\partial t}u$, $D^{1-\alpha}_{0+,t}u$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}D^{1-\beta}_{0+,t}u \in C_b(\mathbb{R};(0,T])$. Здесь $C_b(\mathbb{R};(0,T])$ — пространство непрерывных ограниченных функций с sup-нормой по x и непрерывной по t.

В работах [2–5] были рассмотрены задачи по нахождению классического решения уравнений параболического типа, подобных (1), (2). В работе [2] исследовано дифференциальное уравнение дробной диффузии с оператором дискретно распределенного дифференцирования. Свойства фундаментального решения изучались с помощью функции Райта. В работе [3] построена функция Грина для уравнения (1) и показано, что в случае $\beta = 1$ найденное решение переходит в ранее известное классическое решение. В работах [4, 5] рассмотрена видоизмененная задача Коши для нагруженного параболического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Исследования в работах [6, 7] направлены на получение явного решения n-мерного уравнения аномальной диффузии в бесконечной области с ненулевым начальным условием и условием обращения в нуль на бесконечности. Показано, что это уравнение может быть получено из параболического интегро-дифференциального уравнения с памятью, ядром которого является $t^{-\alpha}E_{1-\alpha,1-\alpha}(-t^{1-\alpha})$, $\alpha \in (0,1)$, где $E_{\alpha,\beta}$ — функция Миттаг—Леффлера. На основе преобразований Лапласа и Фурье, свойств H-функции Фокса и теоремы о свертке получено явное решение уравнения аномальной диффузии.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $0 < \alpha, \beta \leqslant 1$, $\varphi(x) \in C_b(\mathbb{R})$ и $f(x,t)$ удовлетворяет условию Гельдера по крайней мере по одной из переменных. Тогда существует единственное регулярное решение уравнения (1) в области $\mathbb{R}^2_+$, удовлетворяющее начальному условию (2), и оно имеет вид*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} G(x-y,t)\varphi(y)dy + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}} G(x-y,t-\tau)f(y,\tau)dy,$$

где

$$G(x,t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{\alpha k}\int_{\mathbb{R}} E_{\beta,1+\alpha k}^{k+1}(-\xi^2 t^\beta)e^{-i\xi x}d\xi.$$

2. Обозначения и вспомогательные сведения. Функцией Миттаг—Леффлера называется целая функция, определяемая рядом

$$E_\alpha(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{\Gamma(\alpha j+1)}, \quad z,\alpha\in\mathbb{C}, \quad \Re(\alpha)>0.$$

Также функцией Миттаг—Леффлера называют сумму более общего ряда:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{\Gamma(\alpha j+\beta)}, \quad z,\alpha,\beta\in\mathbb{C}, \quad \Re(\alpha)>0.$$

Таким образом, $E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z)$.

Утверждение 1 [1, p. 26]. *Пусть* $0<\alpha<2$ *и* $\beta\in\mathbb{R}$ — *произвольные постоянные. Предположим, что* γ *удовлетворяет неравенству* $\pi\alpha/2<\gamma<$ $<\min\{\pi,\pi\alpha\}$. *Тогда существует такое постоянное* $c=c(\alpha,\beta,\gamma)>0$, *что*

$$|E_{\alpha,\beta}(z)|\leqslant\frac{c}{1+|z|}, \quad \gamma\leqslant|\arg(z)|\leqslant\pi.$$

Утверждение 2 [8, p. 47]. *Для* $0<\alpha<1$, $t>0$ *имеем* $0<E_\alpha(-t)<1$. *Кроме того,* $E_\alpha(-t)$ *вполне монотонна*:

$$(-1)^n\frac{d^n}{dt^n}E_\alpha(-t)\geqslant 0, \quad \forall n\in\mathbb{N}_0 := \{0,1,2,\dots\}.$$

Обобщенная функция Миттаг—Леффлера определяется следующим образом:

$$E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\frac{z^k}{k!}, \quad z,\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}, \quad \Re(\alpha)>0.$$

Здесь

$$(\gamma)_n = \frac{\Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(\gamma)} \quad \text{и} \quad (\gamma)_0\equiv 1 \quad (\Re(z)>-n;\ n\in\mathbb{N}; z\notin\{0,-1,-2,\dots\});$$

$H(z)$ — функция Фокса, которая определяется с помощью интеграла типа Меллина—Барнса следующим образом [8, p. 14]:

$$H(z) = H_{p,q}^{m,n}\left[z\middle|\begin{matrix}(a_p,A_p)\\(b_q,B_q)\end{matrix}\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_L\Theta(s)z^{-s}ds,$$

где

$$\Theta(s) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+B_js)\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j-A_js)}{\prod\limits_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-B_js)\prod\limits_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j+A_js)},$$

L — некоторый контур, разделяющий полюса двух множителей в числителе; $0 \leqslant n \leqslant p$, $1 \leqslant m \leqslant q$, A_l, $B_j \in \mathbb{R}_+$, a_l, $b_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $l = 1, 2, \ldots, p$, $j = 1, 2, \ldots, q$.

Свойство 1. *Если одно из* (a_j, A_j) $\quad j = 1, \ldots, n$ *равно одному из* (b_j, B_j), $j = m+1, \ldots, q$, *или одно из* (b_j, B_j), $j = 1, \ldots, m$, *равно одному из* (a_j, A_j), $j = n+1, \ldots, p$, *то* H*-функция сводится к одному из низших порядков* p *и* q, *а также* n *(или* m*) уменьшаются на единицу, и при* $n \geqslant 1$ *и* $q > m$ *имеет вид*

$$H^{m,n}_{p,q}\left[z\middle|\begin{matrix}(a_1, A_1), \ldots, (a_p, A_p)\\(b_1, B_1), \ldots, (b_{q-1}, B_{q-1}), (a_1, A_1)\end{matrix}\right] = \\ = H^{m,n-1}_{p-1,q-1}\left[z\middle|\begin{matrix}(a_2, A_2), \ldots, (a_p, A_p)\\(b_1, B_1), \ldots, (b_{q-1}, B_{q-1})\end{matrix}\right],$$

при $m \geqslant 1$ *и* $p > n$ *имеет вид*

$$H^{m,n}_{p,q}\left[z\middle|\begin{matrix}(a_1, A_1), \ldots, (a_{p-1}, A_{p-1}), (b_1, B_1)\\(b_1, \ldots, B_1), \ldots, (b_q, B_q),\end{matrix}\right] = \\ = H^{m,n-1}_{p-1,q-1}\left[z\middle|\begin{matrix}(a_1, A_1), \ldots, (a_{p-1}, A_{p-1})\\(b_2, B_2), \ldots, (b_q, B_q)\end{matrix}\right].$$

Свойство 2. *Имеет место равенство*

$$H^{m,n}_{p,q}\left[z\middle|\begin{matrix}(a_p, A_p)\\(b_q, B_q)\end{matrix}\right] = H^{m,n}_{p,q}\left[\frac{1}{z}\middle|\begin{matrix}(1-b_q, B_q)\\(1-a_p, A_p)\end{matrix}\right].$$

Свойство 3 [9, p. 11]. *Если* $\sigma \in \mathbb{C}$, *то справедлива следующая формула*:

$$z^{\sigma} H^{m,n}_{p,q}\left[z\middle|\begin{matrix}(a_p, A_p)\\(b_q, B_q)\end{matrix}\right] = H^{m,n}_{p,q}\left[z\middle|\begin{matrix}(a_p + \sigma A_p, A_p)\\(b_q + \sigma B_q, B_q)\end{matrix}\right].$$

Обобщенная функция Миттаг—Леффлера $E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(z)$ имеет следующее представления через H-функцию Фокса [9, p. 25, Eq. (1.137)]:

$$E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} H^{1,1}_{1,2}\left[-z\middle|\begin{matrix}(1-\gamma, 1)\\(0, 1), (1-\beta, \alpha)\end{matrix}\right].$$

Кроме того, справедливы следующие леммы.

Лемма 1. *Преобразование Лапласа функции* $t^{\beta-1}E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(\pm\omega t^{\alpha})$ *определяется следующей формулой*:

$$L\left[t^{\beta-1}E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(\pm\omega t^{\alpha})\right](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\beta-1} E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(\pm\omega t^{\alpha}) dt = \frac{s^{\alpha\gamma-\beta}}{(s^{\alpha} \mp \omega)^{\gamma}},$$

где $|\omega/s^{\alpha}| < 1$.

Лемма 2. *Для произвольных* α *и* β, $\mu > 0$, *и* $a \in \mathbb{R}$ *справедлива следующая формула*:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x} E^{(m)}_{\alpha,\beta}(-a|\xi|^{\mu}) d\xi =$$
$$= (2\pi)^{n/2} |x|^{1-n/2} \int_0^{\infty} |\xi|^{n/2} E^{(m)}_{\alpha,\beta}(-a|\xi|^{\mu}) J_{n/2-1}(|x||\xi|) d|\xi|,$$

где $\alpha > 0$, β — *произвольное комплексное число*, $J_{n/2-1}(\cdot)$ — *функция Бесселя, а* $E^{(m)}_{\alpha,\beta}(\cdot)$ — m*-ные производные функции типа Миттаг–Леффлера, которые могут быть выражены через* H*-функции Фокса* [9]:

$$E^{(m)}_{\alpha,\beta}(z) = H^{1,1}_{1,2}\left[-z\Big|\begin{matrix}(-m,1)\\(0,1),(1-(\alpha m+\beta),\alpha)\end{matrix}\right].$$

Лемма 3 [9, p. 57]. *Пусть* $\gamma > 0$ *или* $\gamma = \mu = 0$ *и* $\Re(\kappa) < -1$, *где*

$$\gamma := \sum_{j=1}^{n} A_j - \sum_{j=n+1}^{p} A_j + \sum_{j=1}^{m} B_j - \sum_{j=m+1}^{q} B_j, \quad \mu := \sum_{j=1}^{q} B_j - \sum_{j=1}^{p} A_j,$$

$$\kappa := \sum_{j=1}^{q} b_j - \sum_{j=1}^{p} a_j + \frac{p-q}{2}.$$

Если ρ, ν, $b \in \mathbb{C}$, $\sigma > 0$ *удовлетворяют условиям*

$$\Re(\rho) + \nu + \sigma \min_{1\leqslant j\leqslant m}\left[\frac{\Re(b_j)}{B_j}\right] > -1$$

для $\Re(\nu) > -1/2$ *и*

$$\Re(\rho) + \sigma \min_{1\leqslant j\leqslant n}\left[\frac{1}{A_j} - \frac{\Re(a_j)}{A_j}\right] < \frac{3}{2},$$

то для a, $b > 0$ *имеет место следующее равенство*:

$$\int_0^{\infty} x^{\lambda-1} J_{\nu}(ax) H^{m,n}_{p,q}\left[bx^{\sigma}\Big|\begin{matrix}(a_p,A_p)\\(b_q,B_q)\end{matrix}\right] dx =$$
$$= \frac{2^{\lambda-1}}{a^{\lambda}} H^{m,n+1}_{p+2,q}\left[b\Big(\frac{2}{a}\Big)^{\sigma}\Big|\begin{matrix}(1-(\lambda+\nu)/2,\sigma/2),(a_p,A_p),(1-(\lambda-\nu)/2,\sigma/2)\\(b_q,B_q)\end{matrix}\right].$$

3. Фундаментальное решение и его свойства. Рассмотрим однородное уравнение

$$u_t + D^{1-\alpha}_{0+,t} u - D^{1-\beta}_{0+,t} u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t \leqslant T \tag{3}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$. Тогда задача* (3), (4) *имеет единственное классическое решение, определяемое формулой*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} G(x-y,t)\varphi(y)dy, \quad 0 < t \leqslant T, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

где

$$G(x,t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{\alpha k}\int_{\mathbb{R}} E^{k+1}_{\beta,1+\alpha k}(-\xi^2 t^\beta)e^{-i\xi x}d\xi.$$

Перед доказательством теоремы 2 приведем некоторые свойства функции $G(x,t)$.

Функцию Грина $G(x,t)$ можно записать в следующем виде:

$$G(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{\alpha k-\beta/2}}{k!}H^{0,2}_{2,1}\left[\frac{4t^\beta}{x^2}\middle|\begin{matrix}(1,1),(1/2-k,1)\\ (\beta/2-\alpha k,\beta)\end{matrix}\right].$$

Действительно, сначала на основе работы [1, p. 43] обобщенную функцию типа Миттаг—Леффлера приведем к двухпараметрическому виду. Из леммы 2 следует, что

$$G(x,t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{\alpha k}\int_{\mathbb{R}} E^{k+1}_{\beta,1+\alpha k}(-\xi^2 t^\beta)e^{-i\xi x}d\xi =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{\alpha k}}{k!}\int_{\mathbb{R}} E^{(k)}_{\beta,1+\alpha k-\beta k}(-\xi^2 t^\beta)e^{-i\xi x}d\xi.$$

Отсюда, используя лемму 2 еще раз и заменив функцию Миттаг—Леффлера функцией H-Фокса, получим следующий вид для функции Грина:

$$G(x,t) = \sqrt{\frac{|x|}{2\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{\alpha k}}{k!}\int_0^\infty |\xi|^{1/2}E^{(k)}_{\beta,1+\alpha k-\beta k}(-\xi^2 t^\beta)J_{-1/2}(|x||\xi|)d|\xi| =$$
$$= \sqrt{\frac{|x|}{2\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{\alpha k}}{k!}\int_0^\infty |\xi|^{1/2}H^{1,1}_{1,2}\left[\xi^2 t^\beta\middle|\begin{matrix}(-k,1)\\ (0,1),(-\alpha k,\beta)\end{matrix}\right]J_{-1/2}(|x||\xi|)d|\xi|.$$

Далее, используя лемму 3, свойства 1 и 3 H-функции Фокса, получим

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{\alpha k}}{k!}H^{1,2}_{3,2}\left[\frac{4t^\beta}{x^2}\middle|\begin{matrix}(1/2,1),(-k,1),(0,1)\\ (0,1),(-\alpha k,\beta)\end{matrix}\right] =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{\alpha k}}{k!}H^{0,2}_{2,1}\left[\frac{4t^\beta}{x^2}\middle|\begin{matrix}(1/2,1),(-k,1)\\ (-\alpha k,\beta)\end{matrix}\right] =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{\alpha k-\beta/2}}{k!}H^{0,2}_{2,1}\left[\frac{4t^\beta}{x^2}\middle|\begin{matrix}(1,1),(1/2-k,1)\\ (\beta/2-\alpha k,\beta)\end{matrix}\right].$$

Лемма 4. *Функция $G(x,t)$ удовлетворяет следующим равенствам:*

$$G_t(x,t) + D_{0+,t}^{1-\alpha} G(x,t) - D_{0+,t}^{1-\beta} G_{xx}(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t \leqslant T,$$

$$G(x,0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} d\xi = \delta(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

$$\int_{\mathbb{R}} G(x,t)dx = E_\alpha(-t^\alpha), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{7}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, а также при $|x| \to 0$ имеют место оценки

$$\begin{gathered} |G(x,t)| \leqslant C \frac{|x|}{t^\beta} \exp\Big(-\frac{t^{\alpha-\beta}x^2}{4}\Big), \\ |G_t(x,t)| \leqslant C \frac{|x|}{t^{1+\beta}} \exp\Big(-\frac{t^{\alpha-\beta}x^2}{4}\Big), \\ |D_{0+,t}^{1-\alpha} G(x,t)| \leqslant C \frac{|x|}{t^{1+\beta-\alpha}} \exp\Big(-\frac{t^{\alpha-\beta}x^2}{4}\Big), \\ |D_{0+,t}^{1-\beta} G_{xx}(x,t)| \leqslant C \frac{|x|}{t^{1+\beta-\alpha}} \exp\Big(-\frac{t^{\alpha-\beta}x^2}{4}\Big), \end{gathered} \tag{8}$$

при $|x| \to \infty$ — оценки

$$\begin{gathered} |G(x,t)| \leqslant \frac{C}{|x|} \exp\Big[-\Big(\frac{x^2}{4}\Big)^{\alpha/\beta}\Big], \\ |G_t(x,t)| \leqslant \frac{C}{|x|^{1+2/\beta}} \exp\Big[-\Big(\frac{x^2}{4}\Big)^{\alpha/\beta}\Big], \\ |D_{0+,t}^{1-\alpha} G(x,t)| \leqslant \frac{C}{|x|^{1+2/\beta-2\alpha/\beta}} \exp\Big[-\Big(\frac{x^2}{4}\Big)^{\alpha/\beta}\Big], \\ |D_{0+,t}^{1-\beta} G_{xx}(x,t)| \leqslant \frac{C}{|x|^{1+2/\beta-2\alpha/\beta}} \exp\Big[-\Big(\frac{x^2}{4}\Big)^{\alpha/\beta}\Big] \end{gathered} \tag{9}$$

для $0 < t_0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство теоремы 2. Сначала докажем равенство (7). Из свойства $E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(0) = 1/\Gamma(\beta)$ для $G(x,t)$ имеем равенство

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} G(x,t)dx &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{\alpha k} \int_{\mathbb{R}} E_{\beta,1+\alpha k}^{k+1}(-\xi^2 t^\beta) e^{-i\xi x} d\xi dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{\alpha k} \int_{\mathbb{R}} E_{\beta,1+\alpha k}^{k+1}(-\xi^2 t^\beta) \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} dx d\xi = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{\alpha k} \int_{\mathbb{R}} E_{\beta,1+\alpha k}^{k+1}(-\xi^2 t^\beta) \delta(\xi) d\xi = E_\alpha(-t^\alpha). \end{aligned}$$

Последнее равенство получено из определений дельта-функции Дирака и обобщенной функции типа Миттаг—Леффлера.

Используя теорему 1.2 из работы [9, p. 19] при $|x| \to 0$, получим

$$\left| H^{0,2}_{2,1}\left[\frac{4t^\beta}{x^2}\middle|\begin{matrix}(1,1),(1/2-k,1)\\(\beta/2-\alpha k,\beta)\end{matrix}\right]\right| \leqslant C\left(\frac{x^2}{4t^\beta}\right)^{1/2+k}.$$

Отсюда для функции Грина $G(x,t)$ имеем оценку

$$|G(x,t)| \leqslant \frac{C_1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}t^{\alpha k-\beta/2}\left(\frac{x^2}{4t^\beta}\right)^{1/2+k} \leqslant C\frac{|x|}{t^\beta}\exp\left(-\frac{t^{\alpha-\beta}x^2}{4}\right).$$

При $|x| \to \infty$, используя неравенство

$$\left| H^{0,2}_{2,1}\left[\frac{4t^\beta}{x^2}\middle|\begin{matrix}(1,1),(1/2-k,1)\\(\beta/2-\alpha k,\beta)\end{matrix}\right]\right| \leqslant C\left(\frac{x^2}{4t^\beta}\right)^{1/2-\alpha k/\beta},$$

имеем оценку

$$|G(x,t)| \leqslant \frac{C_1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}t^{\alpha k-\beta/2}\left(\frac{x^2}{4t^\beta}\right)^{1/2-\alpha k/\beta} \leqslant \frac{C}{|x|}\exp\left[-\left(\frac{x^2}{4}\right)^{\alpha/\beta}\right].$$

Найдем оценки для $G_t(x,t)$. Поскольку подынтегральные функции в $G(x,t)$ непрерывны, с помощью свойства [8, p. 99]

$$\frac{d}{dz}\left[z^{\beta-1}E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(az^\alpha)\right] = z^{\beta-2}E^{\gamma}_{\alpha,\beta-1}(az^\alpha)$$

получим

$$G_t(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{|x|\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{\alpha k-\alpha}}{k!}H^{0,2}_{2,1}\left[\frac{4t^\beta}{x^2}\middle|\begin{matrix}(1/2,1),(-k,1)\\(-\alpha k-\alpha,\beta)\end{matrix}\right]\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{\alpha k-\beta/2}}{k!}\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\Gamma(-s)\Gamma(1/2+k-s)}{\Gamma(\alpha k+1-\beta/2-\beta s)}\left(\frac{4t^\beta}{x^2}\right)^{-s}ds\right) =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{\alpha k-\beta/2-1}}{k!}H^{0,2}_{2,1}\left[\frac{4t^\beta}{x^2}\middle|\begin{matrix}(1,1),(1/2-k,1)\\(1+\beta/2-\alpha k,\beta)\end{matrix}\right].$$

Далее, применяя теорему 1.2 из работы [9, p. 19], получим оценку при $|x| \to \infty$:

$$\left| H^{0,2}_{2,1}\left[\frac{4t^\beta}{x^2}\middle|\begin{matrix}(1,1),(1/2-k,1)\\(1+\beta/2-\alpha k,\beta)\end{matrix}\right]\right| \leqslant C\left(\frac{x^2}{4t^\beta}\right)^{1/2-\alpha k/\beta+1/\beta},$$

используя которую, получаем следующую оценку:

$$|G_t(x,t)| \leqslant C_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{\alpha k-\beta/2-1}}{k!}\left(\frac{x^2}{4t^\beta}\right)^{1/2-\alpha k/\beta+1/\beta} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{|x|^{1+2/\beta}} \exp\Big[-\Big(\frac{x^2}{4}\Big)^{\alpha/\beta}\Big].$$

При $|x| \to 0$ находим оценку

$$\left| H^{0,2}_{2,1}\left[\frac{4t^\beta}{x^2}\middle| \begin{matrix}(1,1),(1/2-k,1)\\(1+\beta/2-\alpha k,\beta)\end{matrix}\right]\right| \leqslant C\Big(\frac{x^2}{4t^\beta}\Big)^{-1/2-k}$$

и следующую оценку для функции Грина $G_t(x,t)$:

$$|G_t(x,t)| \leqslant \frac{C_1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\alpha k-\beta/2-1}}{k!}\Big(\frac{x^2}{4t^\beta}\Big)^{-1/2-k} \leqslant C\frac{|x|}{t^{\beta+1}} \exp\Big[-\frac{x^2 t^{\alpha-\beta}}{4}\Big].$$

Для вычисления производной дробного порядка воспользуемся следующим свойством функции Миттаг—Леффлера [8, p. 99]:

$$\big(D^\alpha_{0+,t}\big[t^{\gamma-1}E^\delta_{\beta,\gamma}(at^\beta)\big]\big)(x) = x^{\gamma-\alpha-1}E^\delta_{\beta,\gamma-\alpha}(ax^\beta).$$

Для дальнейших исследований нам понадобится дробная производная функции $t^{\alpha k-\beta/2-\beta s}$ порядка $1-\alpha$ по t:

$$\begin{aligned}
D^{1-\alpha}_{0+,t} t^{\alpha k-\beta/2-\beta s} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t \tau^{\alpha k-\beta/2-\beta s}(t-\tau)^{\alpha-1}d\tau = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d}{dt} t^{\alpha k-\beta/2-\beta s+\alpha}\frac{\Gamma(\alpha k-\beta/2-s\beta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha k-\beta/2-s\beta+\alpha+1)} = \\
&= t^{\alpha k-\beta/2\beta s+\alpha-1}\frac{\Gamma(\alpha k-\beta/2-s\beta+1)}{\Gamma(\alpha k-\beta/2-s\beta+\alpha)}.
\end{aligned}$$

Отсюда для дробной производной порядка $1-\alpha$ по t функции Грина получим

$$\begin{aligned}
&D^{1-\alpha}_{0+,t} G(x,t) = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\alpha k-\beta/2+\alpha-1}}{2\pi i\, k!} \int_L \frac{\Gamma(-s)\Gamma(1/2+k-s)}{\Gamma(\alpha k+\alpha-\beta/2-\beta s)}\Big(\frac{4t^\beta}{x^2}\Big)^{-s} ds = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\alpha k-\beta/2+\alpha-1}}{k!} H^{0,2}_{2,1}\left[\frac{4t^\beta}{x^2}\middle| \begin{matrix}(1,1),(1/2-k,1)\\(1-\alpha+\beta/2-\alpha k,\beta)\end{matrix}\right].
\end{aligned}$$

Найдем оценку для $D^{1-\alpha}_{0+,t}G(x,t)$ при $|x| \to \infty$ и $|x| \to 0$. Применяя теорему 1.2 из работы [9, p. 19], получим

$$\left| H^{0,2}_{2,1}\left[\frac{4t^\beta}{x^2}\middle| \begin{matrix}(1,1),(1/2-k,1)\\(1+\beta/2-\alpha-\alpha k,\beta)\end{matrix}\right]\right| \leqslant C\Big(\frac{x^2}{4t^\beta}\Big)^{1/2-(1-\alpha-\alpha k)/\beta}, \quad |x| \to \infty,$$

$$\left| H^{0,2}_{2,1}\left[\frac{4t^\beta}{x^2}\middle| \begin{matrix}(1,1),(1/2-k,1)\\(1+\beta/2-\alpha-\alpha k,\beta)\end{matrix}\right]\right| \leqslant C\Big(\frac{x^2}{4t^\beta}\Big)^{-1/2-k}, \quad |x| \to 0;$$

$$|D^{1-\alpha}_{0+,t}G(x,t)| \leqslant C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\alpha k-\beta/2+\alpha-1}}{k!}\Big(\frac{x^2}{4t^\beta}\Big)^{1/2-(1-\alpha-\alpha k)/\beta} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{|x|^{1+2/\beta-2\alpha/\beta}} \exp\Big[-\Big(\frac{x^2}{4}\Big)^{\alpha/\beta}\Big],$$

$$|D^{1-\alpha}_{0+,t}G(x,t)| \leqslant C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\alpha k-\beta/2+\alpha-1}}{k!} \Big(\frac{x^2}{4t^\beta}\Big)^{-1/2-k} \leqslant$$

$$\leqslant C\frac{|x|}{t^{1+\beta-\alpha}} \exp\Big[-\frac{t^{\alpha-\beta}x^2}{4}\Big].$$

Вычислим вторую производную по x от функции Грина:

$$G_{xx}(x,t) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\alpha k-3\beta/2}}{k!} H^{2,1}_{3,2}\left[\frac{x^2}{4t^\beta}\middle|\begin{matrix}(-2,2),(1-3\beta/2+\alpha k,\beta)\\(-1,1),(-1/2+k,1),(0,2)\end{matrix}\right],$$

где

$$H^{2,1}_{3,2}\left[\frac{x^2}{4t^\beta}\middle|\begin{matrix}(-2,2),(1-3\beta/2+\alpha k,\beta)\\(-1,1),(-1/2+k,1),(0,2)\end{matrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Gamma(-1+s)\Gamma(k-1/2+s)\Gamma(3-2s)}{\Gamma(1-2s)\Gamma(\alpha k-3\beta/2+\beta s+1)}\Big(\frac{x^2}{4t^\beta}\Big)^{-s} ds,$$

и дробную производную функции $G_{xx}(x,t)$:

$$D^{1-\beta}_{0+,t}G_{xx}(x,t) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2\pi i\, k!}\times$$

$$\times\int_L \frac{\Gamma(-1+s)\Gamma(k-1/2+s)\Gamma(3-2s)}{\Gamma(1-2s)\Gamma(\alpha k-3\beta/2+\beta s+1)}\Big(\frac{x^2}{4}\Big)^{-s} D^{1-\beta}_{0+,t} t^{\alpha k-3\beta/2+\beta s} ds =$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{\alpha k-\beta/2-1}}{2\pi i\, k!}\times$$

$$\times\int_L \frac{\Gamma(-1+s)\Gamma(k-1/2+s)\Gamma(3-2s)}{\Gamma(1-2s)\Gamma(\alpha k-\beta/2+\beta s)}\Big(\frac{x^2}{4t^\beta}\Big)^{-s} ds =$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{\alpha k-\beta/2-1}}{k!} H^{2,1}_{3,2}\left[\frac{x^2}{4t^\beta}\middle|\begin{matrix}(-2,2),(\alpha k-\beta/2,\beta)\\(-1,1),(-1/2+k,1),(0,2)\end{matrix}\right].$$

Теперь перейдем к непосредственному доказательству теоремы 2.

Применяя преобразования Фурье и Лапласа к задаче (3), (4) по переменным x и t, получаем

$$s\hat{\tilde{u}}(\xi,s) - \tilde{u}(\xi,0) + s^{1-\alpha}\hat{\tilde{u}} + \xi^2 s^{1-\beta}\hat{\tilde{u}} = 0, \quad \xi\in\mathbb{R},\ s>0,$$
$$\tilde{u}(\xi,0) = \tilde{\varphi}(\xi).$$

Отсюда имеем

$$\hat{\tilde{u}} = \frac{\tilde{\varphi}(\xi)}{s+s^{1-\alpha}+\xi^2 s^{1-\beta}}. \tag{10}$$

Применяя обратные преобразования Фурье и Лапласа к уравнению (10), получим

$$\frac{\tilde{\varphi}(\xi)}{s+s^{1-\alpha}+\xi^2 s^{1-\beta}} = \frac{1}{s+s^{1-\alpha}}\cdot\frac{\tilde{\varphi}(\xi)}{1+\xi^2\frac{s^{1-\beta}}{s+s^{1-\alpha}}} =$$
$$= \frac{\tilde{\varphi}(\xi)}{s+s^{1-\alpha}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-\xi^2)^n\frac{s^{(1-\beta)n}}{(s+s^{1-\alpha})^n} =$$
$$= \tilde{\varphi}(\xi)\sum_{n=0}^{\infty}(-\xi^2)^n\frac{s^{\alpha(n+1)-(\beta n+1)}}{(s^\alpha+1)^{n+1}} =$$
$$= \tilde{\varphi}(\xi)\sum_{n=0}^{\infty}L\big\{t^{\beta n}E_{\alpha,\beta n+1}(-t^{-\alpha})\big\} =$$
$$= \tilde{\varphi}(\xi)L\Bigg\{\sum_{n=0}^{\infty}(-\xi^2 t^\beta)^n\sum_{k=0}\frac{(n+1)_k(-t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+\beta n+1)n!}\Bigg\} =$$
$$= \tilde{\varphi}(\xi)L\Bigg\{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\frac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(n+1)}(-t^\alpha)^k(-\xi^2t^\beta)^n}{\Gamma(\alpha k+\beta n+1)\Gamma(k+1)}\Bigg\} =$$
$$= \tilde{\varphi}(\xi)L\Bigg\{\sum_{k=0}^{\infty}(-t^\alpha)^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(k+1)_n(-t^{\beta\xi^2})^n}{\Gamma(\alpha k+\beta n+1)n!}\Bigg\} =$$
$$= \tilde{\varphi}(\xi)L\Bigg\{\sum_{k=0}^{\infty}(-t^\alpha)^kE_{\beta,\alpha k+1}^{k+1}(-t^\beta\xi^2)\Bigg\};$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\sum_{k=0}^{\infty}(-t^\alpha)^kE_{\beta,\alpha k+1}^{k+1}(-t^\beta\xi^2)\tilde{\varphi}(\xi)e^{-ix\xi}d\xi =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{-ix\xi}\sum_{k=0}^{\infty}(-t^\alpha)^kE_{\beta,\alpha k+1}^{k+1}(-t^\beta\xi^2)\int_{\mathbb{R}}e^{i\xi y}\varphi(y)dyd\xi =$$
$$= \int_{\mathbb{R}}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{-i\xi(x-y)}\sum_{k=0}^{\infty}(-t^\alpha)^kE_{\beta,\alpha k+1}^{k+1}(-t^\beta\xi^2)d\xi\right]\varphi(y)dy =$$
$$= \int_{\mathbb{R}}G(x-y,t)\varphi(y)dy. \quad (11)$$

Заметим, что если в (11) $t=0$, то в силу (6) имеем

$$u(x,0) = \int_{\mathbb{R}}G(x-y,0)\varphi(y)dy = \int_{\mathbb{R}}\delta(x-y)\varphi(y)dy = \varphi(x).$$

Теперь покажем, что полученное выше решение является классическим. Применяя (7) в (5), имеем

$$|u(x,t)| = \left|\int_{\mathbb{R}}G(x-y,t)\varphi(y)dy\right| \leqslant \|\varphi\|_{C_b(\mathbb{R})}\left|\int_{\mathbb{R}}G(x-y,t)dy\right| \leqslant \|\varphi\|_{C_b(\mathbb{R})}.$$

Отсюда
$$\|u\|_{C(\mathbb{R};[0,T])} \leqslant \|\varphi\|_{C_b(\mathbb{R})}.$$

Поскольку $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$, с учетом (9) получим следующую оценку:

$$|u_t(x,t)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial}{\partial t} G(x-y,t)\right| |\varphi(y)| dy \leqslant C \int_{\operatorname{supp}(\varphi)} |\varphi(y)| dy \leqslant C\|\varphi\|_{C_b(\mathbb{R})}.$$

Это означает, что
$$\|u_t\|_{C(\mathbb{R};[0,T])} \leqslant \|\varphi\|_{C_b(\mathbb{R})}. \tag{12}$$

Аналогичным образом получим

$$\left\|D^{1-\alpha}_{0+,t} u\right\|_{C(\mathbb{R};[0,T])} \leqslant \|\varphi\|_{C_b(\mathbb{R})}, \quad \left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{1-\alpha}_{0+,t} u\right\|_{C(\mathbb{R};[0,T])} \leqslant \|\varphi\|_{C_b(\mathbb{R})}. \tag{13}$$

Теорема 2 доказана. □

Теорема 3. *Пусть $f(x,t) \in C_b(\mathbb{R};[0,T])$. Тогда единственное классическое решение уравнения*

$$\omega_t(x,t;\tau) + D^{1-\alpha}_{\tau+,t} \omega(x,t;\tau) - D^{1-\beta}_{\tau+,t} \omega_{xx}(x,t;\tau) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ 0 < \tau < t \leqslant T, \tag{14}$$

удовлетворяющее условию

$$\omega(x,t;\tau)\big|_{t=\tau} = f(x,\tau), \tag{15}$$

имеет вид
$$\omega(x,t;\tau) = \int_{\mathbb{R}} G(x-y,t-\tau) f(y,\tau) dy,$$
где G определяется, как в теореме 2.

Доказательство теоремы 3 проводится с использованием результатов теоремы 2 и леммы 1.

4. Принцип Дюамеля. Рассмотрим неоднородную начальную задачу

$$u_t + D^{1-\alpha}_{0+,t} u - D^{1-\beta}_{0+,t} u_{xx} = f(x,t), \quad x \in \mathbb{R},\ 0 < t \leqslant T, \tag{16}$$
$$u(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4 (Принцип Дюамеля). *Пусть $f \in C_b(\mathbb{R};[0,T])$. Тогда единственное классическое решение задачи* (16), (17) *задается формулой*

$$u(x,t) = \int_0^t \omega(x,t;\tau) d\tau, \tag{18}$$

где $\omega(x,t;\tau)$ — классическое решение задачи (14), (15).

Доказательство. Поскольку $\omega(x,t;\tau)$ — классическое решение начальной задачи (14), (15), из условий (12), (13) следует, что функции ω, ω_t,

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{1-\beta}_{\tau+,t}\omega$, $D^{1-\alpha}_{\tau+,t}\omega \in C(\mathbb{R}\times(0,T])$ ограничены. Таким образом, в дальнейшем мы можем дифференцировать функцию (18) под интегралом.

Покажем, что

$$u(x,t) = \int_0^t \omega(x,t;\tau)d\tau$$

является решением начальной задачи (16), (17). Продифференцируем последнее равенство по t:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \omega(x,t;\tau)\big|_{\tau=t} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\omega(x,t;\tau)d\tau. \tag{19}$$

Поскольку $\omega, \omega_t, D^{1-\alpha}_{0+,t}\omega$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{1-\beta}_{0+,t}\omega$ — непрерывны и ограничены, применяя теорему Фубини, получаем

$$D^{1-\alpha}_{0+,t}u(x,t) = D^{1-\alpha}_{0+,t}\int_0^t \omega(x,t;\tau)d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\int_\tau^t \omega(x,s,\tau)(t-s)^{\alpha-1}ds.$$

Обозначим

$$W(x,t;\tau) = \int_\tau^t \omega(x,s;\tau)(t-s)^{\alpha-1}ds.$$

Применяя к $\int_0^t W(x,t;\tau)d\tau$ формулу (19), имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t W(x,t;\tau)d\tau = W(x,s;\tau)\big|_{\tau=t} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}W(x,t;\tau)d\tau.$$

Так как $\omega(x,t;\tau)$ — непрерывная функция,

$$W(x,t;\tau)\big|_{\tau=t} = \lim_{\tau\to t}\int_\tau^t \omega(x,s;\tau)(t-s)^{\alpha-1}ds = 0.$$

Из теоремы 3 следует, что функция ω является классическим решением задачи (14), (15), тогда

$$D^{1-\alpha}_{0+,t}u(x,t) = \int_0^t D^{1-\alpha}_{\tau+,t}\omega(x,t;\tau)d\tau, \tag{20}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}D^{1-\beta}_{0+,t}u(x,t) = \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2}D^{1-\beta}_{\tau+,t}\omega(x,t;\tau)d\tau. \tag{21}$$

С использованием (19), (20) и (21) уравнение (16) сводится к виду

$$\begin{aligned} u_t + D^{1-\alpha}_{0+,t}u - D^{1-\beta}_{0+,t}u_{xx} = \\ = \omega(x,t;\tau)\big|_{\tau=t} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\omega(x,t;\tau)d\tau + \int_0^t D^{1-\alpha}_{\tau+,t}\omega(x,t;\tau)d\tau - \\ - \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2}D^{1-\beta}_{\tau+,t}\omega(x,t;\tau)d\tau = \end{aligned}$$

$$= \omega(x,t;\tau)\big|_{\tau=t} + \int_0^t \Big[\frac{\partial}{\partial t}\omega(x,t;\tau) + D^{1-\alpha}_{\tau+,t}\omega(x,t;\tau) - \\ - \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{1-\beta}_{\tau+,t}\omega(x,t;\tau)\Big] d\tau = f(x,t).$$

При этом $u(x,0) = 0$. Следовательно,

$$u(x,t) = \int_0^t \omega(x,t;\tau)d\tau$$

является решением задачи (16), (17).

Покажем регулярность решения. Применяя (7) в (18), имеем

$$|u(x,t)| \leqslant \|f\|_{C_b(\mathbb{R};[0,T])} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(x-y,t-\tau)dyd\tau \right| \leqslant \\ \leqslant |tE_{\alpha,2}(-t^\alpha)| \cdot \|f\|_{C_b(\mathbb{R};[0,T])} \leqslant C\|f\|_{C_b(\mathbb{R};[0,T])}$$

при $0 \leqslant t \leqslant T$. Аналогично доказывается регулярность u_t, $D^{1-\alpha}_{0+,t}u$ и $D^{1-\beta}_{0+,t}u_{xx}$ с использованием свойств (8), (9). Теорема 4 доказана. □

Таким образом, в теореме 2 доказаны существование и единственность решения однородного уравнения с неоднородным начальным условием (3), (4), в теореме 3 приведено решение вспомогательной задачи (14), (15), а в теореме 4 доказана разрешимость неоднородного уравнения с однородным начальным условием (16), (17). Из этих трех теорем следует существование и единственность решения неоднородного уравнения с неоднородным начальным условием (1), (2), т.е. теорема 1 доказана.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарность. Авторы благодарны рецензентам за тщательное прочтение статьи, ценные предложения и комментарии.

Библиографический список

1. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations* / North-Holland Mathematics Studies. vol. 204. Amsterdam: Elsevier, 2006. xx+523 pp. EDN: RLZKLZ. DOI: https://doi.org/10.1016/s0304-0208(06)x8001-5.
2. Псху А. В. Уравнение дробной диффузии с оператором дискретно распределенного дифференцирования // *Сиб. электрон. матем. изв.*, 2016. Т. 13. С. 1078–1098. EDN: XRNEPH. DOI: https://doi.org/10.17377/semi.2016.13.086.
3. Паровик Р. И. Задача Коши для нелокального уравнения диффузии-адвекции радона во фрактальной среде // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010. № 1(20). С. 127–132. EDN: NBOEJN. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu742.

4. Мамчуев М. О. Видоизмененная задача коши для нагруженного параболического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами // *Диффер. уравн.*, 2015. Т. 51, № 9. С. 1147–1153. EDN: UVEYJV. DOI: https://doi.org/10.1134/S0374064115090034.
5. Мамчуев М. О. Фундаментальное решение нагруженного параболического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами // *Диффер. уравн.*, 2015. Т. 51, № 5. С. 611–620. EDN: TRUTTF. DOI: https://doi.org/10.1134/S0374064115050052.
6. Durdiev D. K., Shishkina E. L., Sitnik S. M. The explicit formula for solution of anomalous diffusion equation in the multi-dimensional space // *Lobachevskii J. Math.*, 2021. vol. 42, no. 6. pp. 1264–1273. EDN: HGPFMT. DOI: https://doi.org/10.1134/S199508022106007X ; arXiv: 2009.10594 [math.CA]. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2009.10594.
7. Sultanov M. A., Durdiev D. K., Rahmonov A. A. Construction of an explicit solution of a time-fractional multidimensional differential equation // *Mathematics*, 2021. vol. 9, no. 17, 2052. EDN: HZEAME. DOI: https://doi.org/10.3390/math9172052.
8. Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F., Rogosin S. V. *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications* / Springer Monographs in Mathematics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2014. xiv+443 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-43930-2.
9. Mathai A. M., Saxena R. K., Haubold H. J. *The H-Function. Theory and Applications*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2010. xiv+268 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0916-9.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 1, pp. 64–80
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1952

MSC: 35R11

Investigation of the Cauchy problem for one fractional order equation with the Riemann–Liouville operator

I. I. Hasanov[1]***, D. I. Akramova***[1]***, A. A. Rahmonov***[2]

[1] Bukhara State University,
11, st. Muhammad Ikbol, Bukhara, 705018, Uzbekistan.
[2] Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky
of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
46, st. Universitetskaya, Tashkent, 100174, Uzbekistan.

Abstract

The article is dedicated to solving the Cauchy problem for a differential equation with a Riemann–Liouville fractional derivative. The initial condition is formulated in a natural way and it is proven that the resulting solution is regular. Firstly, a fundamental solution is constructed and its properties are analyzed. Then, based on these properties, the solution to the homogeneous equation in the Cauchy problem is studied. Furthermore, unlike other problems of this type, the solution to the Cauchy problem presented for a nonhomogeneous equation is explicitly obtained in this work using the Duhamel's principle and the three-parameter Mittag–Leffler function. By applying additional conditions to these problems, it is also demonstrated that this solution is classical.

Keywords: Riemann–Liouville fractional derivative, Cauchy problem, Green function, Mittag–Leffler function, Duhamel's principle.

Received: 5th September, 2022 / Revised: 12th March, 2023 /
Accepted: 17th March, 2023 / First online: 24th March, 2023

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest regarding the authorship and publication of this article.

Differential Equations and Mathematical Physics
Research Article

Please cite this article in press as:
Hasanov I. I., Akramova D. I., Rahmonov A. A. Investigation of the Cauchy problem for one fractional order equation with the Riemann–Liouville operator, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 1, pp. 64–80. EDN: HTKOLW. DOI: 10.14498/vsgtu1952 (In Russian).

Authors' Details:

Ibrohim I. Hasanov https://orcid.org/0000-0002-9634-5550
Teacher; Dept. of Differential Equation; e-mail: ihasanov998@gmail.com

Dilshoda I. Akramova https://orcid.org/0000-0001-9596-9401
Teacher; Dept. of Mathematical Analysis; e-mail: akramova.shoda@mail.ru

Askar A. Rahmonov https://orcid.org/0000-0002-7641-9698
Cand. Phys. & Math. Sci.; Senior Researcher; e-mail: araxmonov@mail.ru

Authors' contributions and responsibilities. All authors participated in developing the concept of the article and writing the manuscript. The authors are fully responsible for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The research was conducted without funding.

Acknowledgments. The authors thank the reviewers for their careful reading of the paper, valuable suggestions, and comments.

References

1. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 204. Amsterdam, Elsevier, 2006, xx+523 pp. EDN: RLZKLZ. DOI: https://doi.org/10.1016/s0304-0208(06)x8001-5.
2. Pskhu A. V. Fractional diffusion equation with discretely distributed differentiation operator, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2016, vol. 13, pp. 1078–1098. EDN: XRNEPH. DOI: https://doi.org/10.17377/semi.2016.13.086.
3. Parovik R. I. Cauchy problem for the nonlocal equation diffusion-advection radon in fractal media, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2010, no. 1(20), pp. 127–132. EDN: NBOEJN. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu742.
4. Mamchuev M. O. Modified cauchy problem for a loaded second-order parabolic equation with constant coefficients, *Diff. Equat.*, 2015, vol. 51, no. 9, pp. 1137–1144. EDN: VAHISF. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266115090037.
5. Mamchuev M. O. Fundamental solution of a loaded second-order parabolic equation with constant coefficients, *Diff. Equat.*, 2015, vol. 51, no. 5, pp. 620–629. EDN: UEWBJX. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266115050055.
6. Durdiev D. K., Shishkina E. L., Sitnik S. M. The explicit formula for solution of anomalous diffusion equation in the multi-dimensional space, *Lobachevskii J. Math.*, 2021, vol. 42, no. 6, pp. 1264–1273. EDN: HGPFMT. DOI: https://doi.org/10.1134/S199508022106007X; arXiv: 2009.10594 [math.CA]. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2009.10594.
7. Sultanov M. A., Durdiev D. K., Rahmonov A. A. Construction of an explicit solution of a time-fractional multidimensional differential equation, *Mathematics*, 2021, vol. 9, no. 17, 2052. EDN: HZEAME. DOI: https://doi.org/10.3390/math9172052.
8. Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F., Rogosin S. V. *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications*, Springer Monographs in Mathematics. Berlin, Heidelberg, Springer, 2014, xiv+443 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-43930-2.
9. Mathai A. M., Saxena R. K., Haubold H. J. *The H-Function. Theory and Applications.* Berlin, Heidelberg, Springer, 2010, xiv+268 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0916-9.