



УДК 539.374

Задача Гадолина о сборке двухслойного вала горячей посадкой с испытанием соединения на отрыв

А. А. Буренин, А. В. Ткачева, С. В. Фирсов

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН

Хабаровского Федерального исследовательского центра ДВО РАН,
Россия, 681005, Комсомольск-на-Амуре, Металлургов, 1.

Аннотация

Изучается прочность соединения в сборке с натягом двухслойного вала, произведенной с помощью операции горячей посадки. Материалы деталей сборки считаются идеальными упругопластическими с пределами пластичности, существенно зависимиыми от температуры. В расчетах принимаются условия плоского деформированного состояния. Испытания соединения на отрыв производятся при помощи вращения сборки вокруг ее оси, когда отрывные усилия создаются в форме центробежных сил инерции. Показано, что с ростом скорости вращения натяг в сборке падает. Рассчитывается предельная из возможных угловая скорость вращения, при которой натяг в сборке исчезает.

Ключевые слова: упругость, пластичность, сборка с натягом, горячая посадка, температурные напряжения, вращение упругопластического цилиндра.

Получение: 15 мая 2022 г. / Исправление: 2 сентября 2022 г. /

Принятие: 20 сентября 2022 г. / Публикация онлайн: 26 сентября 2022 г.

Механика деформируемого твердого тела

Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Буренин А. А., Ткачева А. В., Фирсов С. В. Задача Гадолина о сборке двухслойного вала горячей посадкой с испытанием соединения на отрыв // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 3. С. 480–499. EDN: [MVCIJF](#). DOI: [10.14498/vsgtu1928](https://doi.org/10.14498/vsgtu1928).

Сведения об авторах

Анатолий Александрович Буренин  <https://orcid.org/0000-0003-4502-9547>

доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН; главный научный сотрудник; лаб. проблем создания и обработки материалов и изделий; e-mail: burenin@iacp.dvo.ru

Анастасия Валерьевна Ткачева  <https://orcid.org/0000-0003-1795-0021>

кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; лаб. проблем создания и обработки материалов и изделий; e-mail: 4nansi4@mail.ru

Сергей Викторович Фирсов  <https://orcid.org/0000-0001-7446-6231>

младший научный сотрудник; лаб. проблем создания и обработки материалов и изделий; e-mail: firsov.s.new@yandex.ru

Введение. В машиностроении часто используются составные детали механизмов и машин, полученные сборкой посредством операции горячей посадки [1]. Такие детали кроме их функциональной предназначенности могут обладать иными преимуществами перед сплошными. Характерным примером тому являются двухслойные преднапряженные стволы артиллерийских орудий, конструкция которых была предложена академиком А. В. Гадолиным [2]. Стволы такой конструкции оказались способными выдерживать повышенные уровни давления пороховых газов, что способствовало повышению прицельной дальности стрельбы. Технология сборки способом горячей посадки проста и заключается в нагревании охватываемого элемента сборки до назначаемой температуры и помещения внутрь него холодного охватываемого элемента. При этом подбором размеров добиваются непосредственного контакта данных элементов сборки по их общей цилиндрической поверхности с момента времени, близкого к моменту посадки. После остывания сборки в комнатных условиях образуется достаточно прочное неразъемное соединение.

Оценки натяга в сборке первоначально брались из решения краевых задач теории температурных напряжений в упругих телах [3,4]. Учет влияния необратимых (пластических) деформаций на распределение итоговых остаточных напряжений и натяга в сборке стал возможным только в результате развития приближенных численных методов расчета и соответствующего вычислительного инструментария [5–10]. В связи с этим отметим, что деформированные состояния осесимметричных тел с учетом сформированных областей пластического течения рассматривались в работах [11–15]. Выяснилось, что для упрощения математического аппарата, представляющего возможность получить точное решение задачи, в качестве классических кусочно-линейных пластических потенциалов можно использовать условия пластического течения — условия пластического течения максимальных касательных напряжений (условия Треска—Сен-Венана) или максимальных приведенных напряжений (условия Ишлинского—Ивлева). Однако еще Д. Бленд заметил [11], что в таком случае пластическая область может разделиться на части, в которых напряжения подчинены различным граням и ребрам кусочно-линейных поверхностей нагружения (разным граням и ребрам наклонных призм Треска или Ивлева в пространстве главных напряжений). Данное обстоятельство существенно усложняет расчеты температурных напряжений в рассматриваемый момент времени. Более того, задача о сборке цилиндрических изделий способом горячей посадки не относится к задачам об упругопластическом состоянии, а является задачей о процессе (сопутствующей технологической операции) от момента посадки до полного остывания сборки. Поэтому области пластического течения могут зарождаться, делиться, исчезать, а каждый такой момент времени должен отслеживаться и учитываться в расчетах.

Возможность выписать точное решение одномерной задачи о распределении температурных напряжений по элементам сборки в каждый рассчитываемый момент времени в зависимости от текущего (известного, рассчитанного) распределения температуры является основным преимуществом использования кусочно-линейных пластических потенциалов (кусочно-линейных условий пластического течения) в расчетах. Задача о горячей посадке, называемая в отечественной литературе [14, 19] задачей Гадолина, не явля-

ется задачей об упругопластическом состоянии, так как она рассматривает развитие упругопластического процесса. В этом случае точное решение необходимо получать на каждом временном шаге расчетов [9, 10, 16–20], уточняя размеры пластической области с учетом ее деления, появления новых и/или исчезновения существующих областей течения.

Прочность соединений, созданных с помощью технологии горячей посадки, проверялась теоретически и экспериментально [21–25]. Так, в [21] соединение испытывалось на скручивание охватывающей детали сборки, в [22, 23] сборка в целом проверялась на кручение, в [24] — на осевое давление, а в [25] — на циклические нагрузки. Наиболее опасными для натяга в сборке являются внешние усилия, формирующие отрыв. В работе [26] отрывные усилия создавались силами инерции при осевом вращении диска. Понижение натяга в сборке за счет действия центробежных сил инерции рассчитывалось на основе решения одномерной краевой задачи теории плоского напряженного состояния в упругопластическом теле [27, 28]. В настоящей работе рассматривается эволюция натяга в сборке двухслойного вала [18] на основе способа расчета одномерных упругопластических процессов во вращающихся цилиндрах [29, 30].

1. Исходные соотношения математической модели. Расчеты будем проводить в рамках математической модели идеального упругопластического тела. Допускаемые телом деформации \mathbf{d} полагаем малыми и состоящими из упругой \mathbf{e} и пластической \mathbf{p} составляющих:

$$\mathbf{d} = \mathbf{e} + \mathbf{p} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}),$$

где \mathbf{u} — вектор перемещений. Пренебрегая силами инерции и массовыми силами, локальное следствие закона сохранения импульса запишем в форме уравнения равновесия

$$\nabla \boldsymbol{\sigma} = 0. \quad (1)$$

Следствие закона сохранения энергии запишем в форме уравнения баланса внутренней энергии

$$\rho \frac{d\xi}{dt} + \nabla \mathbf{q} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v}), \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \quad (2)$$

где ρ — плотность деформируемого материала, \mathbf{q} — вектор теплового потока, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор скорости деформации Эйлера, t — текущее время. Термодинамический потенциал $\xi = \xi(\mathbf{d}, s)$ является функцией параметров состояния \mathbf{d} и s . Примем упрощающее предположение, что данный потенциал зависит только от упругих деформаций: $\xi = \xi(\mathbf{e}, s)$. Введем иной термодинамический потенциал $\psi = \psi(\mathbf{e}, T)$ такой, что $\psi(\mathbf{e}, T) = \xi(\mathbf{e}, s) - sT$, где $T = \partial \xi / \partial s$ — температура.

С учетом таких упрощающих гипотез из (2) следуют соотношения [31]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi(\mathbf{e}, T)}{\partial \mathbf{e}}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = -\nabla \mathbf{J} + \frac{1}{T} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p - \frac{1}{T^2} \mathbf{q} \cdot \nabla T, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial T} = -s, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad \mathbf{J} = \rho s \mathbf{v} + T^{-1} \mathbf{q}.$$

Если в формуле Мурнагана (3) для свободной энергии $\psi(\mathbf{e}, T)$ принять простейшую квадратную зависимость, то получаем зависимости закона Дюамеля–Неймана:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= (\lambda \operatorname{tr} \mathbf{e} - 3\alpha T_0 K \theta) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{e}, \\ \theta &= (T - T_0)/T_0, \quad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu.\end{aligned}\tag{5}$$

Здесь λ, μ — параметры Ламе, T_0 — температура свободного состояния тела (комнатная температура), α — коэффициент линейного расширения деформируемого материала.

Если такую же простейшую квадратную зависимость для $\psi(\mathbf{e}, \theta)$ принять в (4), считая материал изотропным, и ограничиться простейшей формой Фурье в законе теплопроводности $\mathbf{q} = -\zeta \nabla T$, $\zeta = \text{const}$, то из (4) следует уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \dot{\theta} = a \Delta \theta - \frac{1}{c T_0} (\delta \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^e - \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p) + w(\mathbf{x}, t).\tag{6}$$

Здесь a — коэффициент температуропроводности, c — удельная теплоемкость материала, δ — коэффициент связанности; через $w(\mathbf{x}, t)$ обозначены возможные источники тепла в деформируемом материале, где \mathbf{x} — радиус-вектор места рассматриваемой точки. Иногда теплом, производимым за счет деформирования, по сравнению с теплом, поступающим от внешних источников, можно пренебречь. Тогда уравнение теплопроводности (6) приобретает более простую форму:

$$\dot{\theta} = a \Delta \theta + w(\mathbf{x}, t).\tag{7}$$

В таком случае, следуя (7), распределение температуры по деформируемому телу можно рассчитать независимо от процесса его деформирования. Данная несвязанная теория, называемая теорией температурных напряжений в деформируемых материалах, будет использоваться в дальнейших расчетах.

Изначально деформации в материале растут в форме обратимых (упругих) деформаций согласно условиям (1) и (5). Но с ростом температуры повышается уровень температурных напряжений и наступает момент времени, когда выполняется условие пластического течения: $f(\boldsymbol{\sigma}, k) = 0$. Последнее в шестимерном пространстве напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ задает поверхность нагружения. Из-за зависимости предела текучести k от температуры $k = k(\theta)$ поверхность нагружения меняет свое положение в пространстве напряжений. Принимая условие, что в каждый рассматриваемый момент времени выполняются условия принципа максимума Мизесса, имеем ассоциированный с поверхностью нагружения закон пластического течения [32]:

$$d\mathbf{p} = d\zeta \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, k)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad d\zeta > 0.\tag{8}$$

В качестве поверхности нагружения в дальнейших расчетах принимается боковая поверхность наклонной призмы Ивлева [33] в трехмерном пространстве главных напряжений:

$$\max |\sigma_j - \sigma| = \frac{4}{3}k, \quad \sigma = \frac{1}{3} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}.\tag{9}$$

Это классическое кусочно линейное-условие пластического течения называют условием максимальных приведенных напряжений [33], либо условием Ишлинского—Ивлева [15, 18–20]. Зависимость предела текучести k от температуры далее принимаем в линейной форме:

$$k = k_0(\theta_p - \theta)/\theta_p.$$

Здесь $k_0 = \text{const}$ — предел текучести в опытах на чистый сдвиг при комнатной температуре T_0 ; θ_p — безразмерная температура плавления, наименьшая из температур плавления деформируемых материалов сборки.

2. Постановка задачи Гадолина. Распределение температуры. Технологически операция горячей посадки заключается в том, что в разогретую до назначаемой температуры T_* охватывающую деталь сборки (муфту — $R_2 \leq r \leq R_3$) помещают охватываемую деталь (вал — $0 \leq r \leq R_1$) комнатной температуры T_0 . Размеры подбираются так, чтобы непосредственно после момента посадки ($t = 0+$) детали сборки имели общую контактную поверхность $r = R$ ($R_1 = R_2 = R$). Это достигается за счет теплового расширения охватываемой детали за незначительное время после момента посадки. Сборку полагаем достаточно длинной, чтобы за счет пренебрежения торцевыми эффектами задача свелась к одномерной задаче теории температурных напряжений. Распределение температуры по элементам сборки следует из решения краевой задачи для дифференциального уравнения теплопроводности в цилиндрической системе координат (r, φ, z)

$$\theta_{,t} = a(\theta_{,rr} + \theta_{,r}/r), \quad (10)$$

с начальными

$$\theta(r, 0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq R; \\ \theta_*, & R \leq r \leq R_3, \end{cases} \quad \theta_* = (T_* - T_0)/T_0 \quad (11)$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} \theta_{,r}(0, t) = 0, \quad \theta_{,r}(R_3, t) = -\chi\theta(R_3, t), \\ \theta^{(1)}(R, t) = \theta^{(2)}(R, t), \quad \beta_1\theta_{,r}^{(1)}(R, t) = \beta_2\theta_{,r}^{(2)}(R, t). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $\chi = \text{const}$ — коэффициент теплоотдачи от боковой поверхности $r = R_3$ охватывающей детали в окружающую среду; β_1 и β_2 — коэффициенты теплопроводности охватываемой (1) и охватывающей (2) деталей сборки соответственно. Запятой здесь и далее обозначается частная производная по соответствующей независимой переменной.

Получение точного решения задачи (10)–(12) не представляет каких-либо проблем. Далее считаем, что распределение температуры θ известно (рассчитано).

3. Эволюция температурных напряжений. Непосредственно после момента посадки $t = 0+$ детали сборки деформируются обратимо (упруго):

$$d_r = e_r = u_{r,r}, \quad d_\varphi = e_\varphi = u_r/r, \quad d_z = e_z = 0.$$

Компоненты тензора напряжений согласно закону Дюамеля–Неймана (5) запишем в виде

$$\begin{aligned}\sigma_r &= (\lambda + 2\mu)u_{r,r} + \lambda u_r/r - 3\alpha KT_0\theta, \\ \sigma_\varphi &= (\lambda + 2\mu)u_r/r + \lambda u_{r,r} - 3\alpha KT_0\theta, \\ \sigma_z &= \lambda(u_{r,r} + u_r/r) - 3\alpha KT_0\theta.\end{aligned}\quad (13)$$

Уравнение равновесия (1), записанное в цилиндрической системе координат

$$\sigma_{r,r} + (\sigma_r - \sigma_\varphi)/r = 0, \quad (14)$$

при подстановке в него (13) приводится к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) = \frac{K}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial r}. \quad (15)$$

После интегрирования (15) получим

$$u_r^{(m)}(r, t) = \frac{3K}{(\lambda + 2\mu)} \Phi(r, l, 1) + C_1^{(m)}(t) \frac{r}{2} + C_2^{(m)}(t) \frac{1}{r},$$

где

$$\Phi(r, l, h) = \frac{\alpha T_0}{r^h} \int_l^r \rho^h \theta(\rho) d\rho.$$

Здесь $m = 1$ и $l = 0$ используются для вала, $m = 2$ и $l = R$ — для муфты.

Постоянные в рассматриваемый момент времени $C_1^{(m)}(t)$ и $C_2^{(m)}(t)$ определяются из граничных условий

$$\sigma_r(R_3, t) = 0, \quad C_2^{(1)}(t) = 0, \quad [\sigma_r(R, t)] = 0, \quad [u_r(R, t)] = 0. \quad (16)$$

Здесь квадратными скобками обозначен разрыв зависимых переменных на поверхности контакта $r = R$. Проводя по такой схеме расчеты последовательными шагами по времени, обнаруживаем, что в некоторый момент времени t_1 ($t_1 > 0$) на поверхности материала муфты $r = R$ выполняется условие пластического течения в форме $\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz} - 2\sigma_{rr} = 4k$. Это условие означает соответствие напряженного состояния грани наклонной призмы Ивлева [32, 33]. На рис. 1 в пространстве главных напряжений показано сечение призмы Ивлева девiatorной плоскостью $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$. Здесь указан отрезок шестиугольника, соответствующий грани, достигаемой напряжениями первоначально. С момента времени $t = t_1$ от поверхности $r = R$ отделяется и продвигается упругопластическая граница $r = n_1(t)$.

Упругопластические состояния в сборке и их эволюция для различных временных промежутков между моментами, в которых появляется новая или исчезает имеющаяся область пластического течения, показаны на рис. 2.

В развивающейся области пластического течения $R \leq r < n_1(t)$ (см. рис. 2) из (5) имеем

$$\begin{aligned}\sigma_r &= (\lambda + 2\mu)(u_{r,r} - p_r) + \lambda(u_r/r - p_\varphi - p_z) - 3\alpha KT_0\theta, \\ \sigma_\varphi &= (\lambda + 2\mu)(u_r/r - p_\varphi) + \lambda(u_{r,r} - p_r - p_z) - 3\alpha KT_0\theta, \\ \sigma_z &= -p_z(\lambda + 2\mu) + \lambda(u_{r,r} - p_r + u_r/r - p_\varphi) - 3\alpha KT_0\theta.\end{aligned}\quad (17)$$

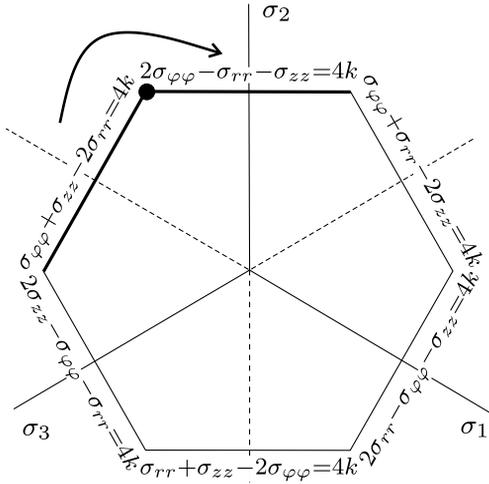


Рис. 1. Сечение призмы Ивлева девиаторной плоскостью $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$

[Figure 1. Cross section of the Ivlev prism by the deviatoric plane $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$; Ishlinsky–Ivlev hexagon]

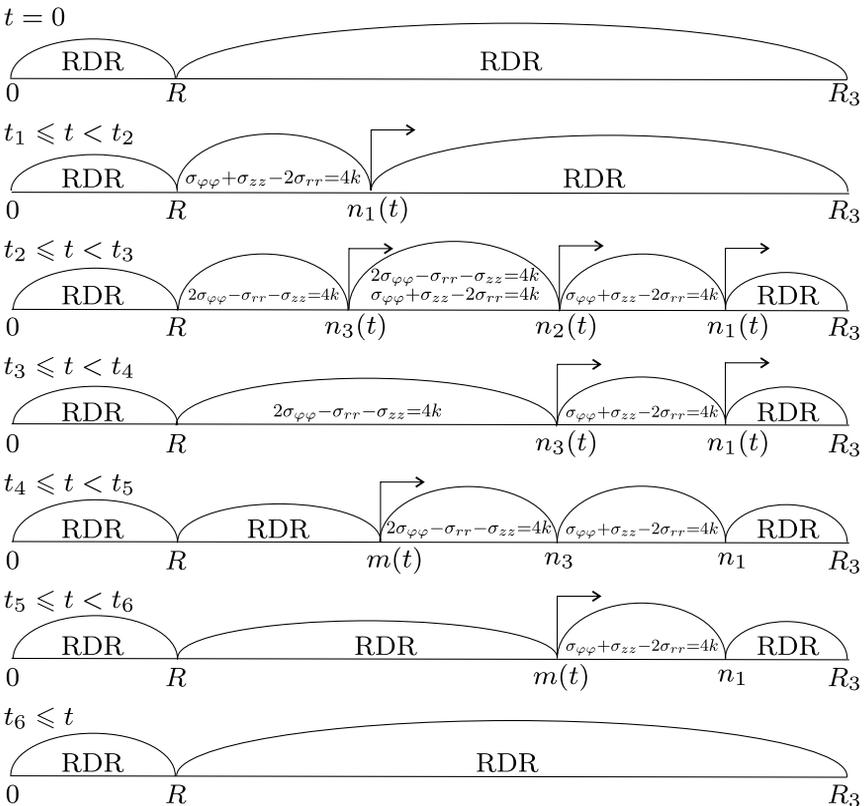


Рис. 2. Эволюция областей пластического течения; RDR — область обратимого деформирования

[Figure 2. The evolution of plastic flow regions; RDR — the reversible deformation region]

Необратимые деформации исключаются из (17) с помощью ассоциированного с гранью $\sigma_\varphi + \sigma_z - 2\sigma_r = 4k$ поверхности текучести (см. рис. 1) закона пластического течения (8):

$$dp_r = -2d\zeta, \quad dp_\varphi = d\zeta, \quad dp_z = d\zeta, \quad d\zeta = \frac{1}{6} \frac{u_r}{r} - \frac{2}{3}(k + u_{r,r}). \quad (18)$$

Зависимости (17) и (18) позволяют переписать уравнение равновесия (14) в следующей форме:

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - h^2 \frac{u_r}{r^2} = \frac{2}{K} \left(\frac{2\partial k}{3\partial r} + \frac{k}{r} \right) + 3\alpha T_0 \frac{\partial \theta}{\partial r}, \quad h^2 = \frac{3\lambda + 5\mu}{3\lambda + 2\mu}. \quad (19)$$

Полагая, что распределение температуры $\theta(r, t)$ в данный момент времени уже рассчитано и интегрируя (19), найдем

$$u_r = 1.5h^{-1}((h+1)\Phi(r, l, h) + (h-1)\Phi(r, l, -h)) - (2hr^h)^{-1}C_1^{(3)}(t) + (3Kh)^{-1}((2h-1)\Psi(r, l, h) - (2h+1)\Psi(r, l, -h)) + r^h C_2^{(3)}(t),$$

$$\sigma_r = 1.5K(hr)^{-1}(h^2 - 1)(\Phi(r, l, -h) - \Phi(r, l, h)) - (3hr)^{-1}((h-1)(2h-1)\Psi(r, l, h) + (h+1)(2h+1)\Psi(r, l, -h)) + (h-1)(2hr^{h+1})^{-1}KC_1^{(3)}(t) + (h+1)r^{h-1}KC_2^{(3)}(t),$$

$$\sigma_\varphi = -\Psi(r, l, -h)(3Krh)^{-1}(2h+1)(K(1+h) + \mu) - \Psi(r, l, h)(3Krh)^{-1}(2h-1)(K(1-h) + \mu) + 1.5\Phi(r, l, -h)(h-1)(rh)^{-1}(K(1+h) + \mu) + 1.5\Phi(r, l, h)(h+1)(rh)^{-1}(K(1-h) + \mu) - 2k - (K(1-h) + \mu)(2hr^{h+1})^{-1}C_1^{(3)}(t) + (K(1+h) + \mu)r^{h-1}C_2^{(3)}(t),$$

$$e_r^p = -2e_\varphi = 2\alpha T_0 \theta - 2(2\mu + \lambda)(3\mu K)^{-1}k + (4h^2 - 1)(9Khr)^{-1}(\Psi(r, l, h) - \Psi(r, l, -h)) + (2hr)^{-1}((h-1)(2h-1)\Phi(r, l, -h) - (h+1)(2h+1)\Phi(r, l, h)) + (2h+1)(6hr^{h+1})^{-1}C_1^{(3)}(t) + 3^{-1}(2h-1)r^{h-1}C_2^{(3)}(t),$$

где

$$\Psi(r, l, h) = \frac{1}{r^h} \int_l^r \rho^h k(\rho) d\rho, \quad l = R_1.$$

Теперь на каждом временном шаге расчетов следует определить значения шести функций $C_1^{(1)}$, $C_2^{(1)}$, $C_1^{(2)}$, $C_2^{(2)}$, $C_1^{(3)}$, $C_2^{(3)}$ и положение упругопластической границы $n_1(t)$ в этот момент времени. Для этой цели имеем условия (16),

а также условия непрерывности перемещения u_r и напряжения σ_r на продвигающейся поверхности $r = n_1(t)$ и выполнения на ней условия пластического течения. Такую систему алгебраических соотношений приходится разрешать на каждом шаге расчетов. С появлением новых областей течения порядок подобной системы уравнений будет расти. Далее на этом останавливаться не будем, но заметим, что подобные значения и рассчитываемые положения поверхностей, делящих область деформирования на части, всегда имеют для своего определения необходимое число граничных условий и условий на продвигающихся граничных поверхностях.

В области пластического течения $R \leq r \leq n_1(t)$ на внутренней поверхности муфты $r = R$ в момент времени $t = t_2 > t_1$ выполняется условие $2\sigma_\varphi - \sigma_z - \sigma_r = 4k$. Здесь зарождается упругопластическая граница $r = n_2(t)$, которая разделяет область пластического течения на две части (см. рис. 2, $t_2 \leq t < t_3$). В новой области пластическое течение подчиняется ребру шестигранника Ишлинского—Ивлева (см. рис. 1).

Из-за выполнения сразу двух условий пластического течения $2\sigma_\varphi - \sigma_z - \sigma_r = 4k$ и $\sigma_\varphi + \sigma_z - 2\sigma_r = 4k$ из ассоциированного закона пластического течения на ребре призмы Ивлева имеем

$$\begin{aligned} dp_r &= -2d\zeta_1 - d\zeta_2, & p_\varphi &= d\zeta_1 + 2d\zeta_2, & dp_z &= d\zeta_1 - d\zeta_2, \\ d\zeta_1 &= -\frac{2k + 3\mu u_{r,r}}{9\mu}, & d\zeta_2 &= -\frac{2k - 3\mu u_r/r}{9\mu}. \end{aligned}$$

Уравнение равновесия (14) переписывается в форме

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) = \frac{4}{3K} \left(\frac{\partial k}{\partial r} + 2 \frac{k}{r} \right) + 3\alpha T_0 \frac{\partial \theta}{\partial r}. \quad (20)$$

Интегрируя (20), получаем

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{r C_1^{(4)}}{2} + \frac{C_2^{(4)}}{2} + \frac{4}{3K} \Psi(r, l, -1) + 3\Phi(r, l, 1), \\ \sigma_r &= K C_1^{(4)} + \frac{8}{3r} \Psi(r, l, -1), \\ \sigma_\varphi &= K C_1^{(4)} + \frac{8}{3r} \Psi(r, l, -1) + \frac{8}{3} k(r), \\ \sigma_z &= K C_1^{(4)} + \frac{8}{3r} \Psi(r, l, -1) + \frac{4}{3} k(r), \end{aligned} \quad (21)$$

$$p_r = \frac{C_1^{(4)}}{6} - \frac{C_2^{(4)}}{r^2} + 4 \frac{\Psi(r, l, -1)}{9K} + \left(\frac{4}{9K} + \frac{2}{3\mu} \right) k(r) - \frac{3}{r} \Phi(r, l, 1) + 2T_0 \alpha \theta,$$

$$p_\varphi = \frac{C_1^{(4)}}{6} + \frac{C_2^{(4)}}{r^2} + 4 \frac{\Psi(r, l, -1)}{9K} - \left(\frac{4}{9K} + \frac{2}{3\mu} \right) k(r) + \frac{3}{r} \Phi(r, l, 1) - T_0 \alpha \theta,$$

$$p_z = -\frac{1}{3} C_1^{(4)} - \frac{8}{9K} \Psi(r, l, -1) - \frac{4}{9K} k(r) - T_0 \alpha \theta.$$

Напряжения и перемещения в области пластического течения $R \leq r \leq n_2(t)$ вычисляются исходя из (21).

Из распределения температуры по материалу сборки за счет процесса теплопроводности получаем, что $d\zeta_1 = 0$ на внутренней поверхности муфты $r = R$. Это свидетельствует о выходе напряжений с ребра поверхности нагружения ($2\sigma_\varphi - \sigma_z - \sigma_r = 4k$, $\sigma_\varphi + \sigma_z - 2\sigma_r = 4k$) на грань $2\sigma_\varphi - \sigma_z - \sigma_r = 4k$. Таким образом, образуется новая граница $r = n_3(t)$, которая через некоторое время достигнет границы $r = n_2(t)$, а область пластического течения $n_3 \leq r \leq n_2(t)$ перестает существовать (см. рис. 2). В области $R \leq r \leq n_3(t)$ уравнение равновесия примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - h^2 \frac{u_r}{r^2} = & \left(2 \left(\frac{1}{3} \frac{\partial k}{\partial r} + \frac{k}{r} \right) + 3\alpha T_0 \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \frac{1}{K + \mu} + \\ & + \left(\tilde{p}_\varphi + 2\tilde{p}_r + \frac{\partial \tilde{p}_\varphi}{\partial r} + 2 \frac{\partial \tilde{p}_r}{\partial r} \right) \frac{\mu}{K + \mu}, \quad h = \sqrt{\frac{K}{K + \mu}}, \end{aligned} \quad (22)$$

где \tilde{p}_r и \tilde{p}_φ — необратимые деформации, накопленные в результате предыдущего пластического течения. Интегрируя уравнение (22), получаем следующие зависимости:

$$\begin{aligned} u_r = & 1.5K((h-1)\Phi(r, l, -h) + (h+1)\Phi(r, l, h))h^{-1}(K + \mu)^{-1} + \\ & + ((h-2)\Psi(r, l, h) + (h+2)\Phi(r, l, -h))(3h)^{-1}(K + \mu)^{-1} + r^h C_2^{(6)}(t) - \\ & - \mu[(2h+1)\Omega_z(r, l, h) + (2h-1)\Omega_z(r, l, -h) - \\ & - \Omega_r(r, l, -h) + \Omega_r(r, l, h)](2h)^{-1}(K + \mu)^{-1} + (2hr^h)^{-1} C_1^{(5)}(t) - \\ & - \mu((h-1)\Omega_\varphi(r, l, -h) + (h+1)\Omega_z(r, l, h))(2h)^{-1}(K + \mu)^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_r = & -3K(K - h(K + \mu))(h-1)\Phi(r, l, -h)(2hr)^{-1}(K + \mu)^{-1} - \\ & - 3K(K + h(K + \mu))(h+1)\Phi(r, l, h)(2hr)^{-1}(K + \mu)^{-1} - \\ & - (h-2)(K + h(K + \mu))\Psi(r, l, h)(3hr)^{-1}(K + \mu)^{-1} - \\ & - (h+2)(K - h(K + \mu))\Psi(r, l, -h)(3hr)^{-1}(K + \mu)^{-1} + \\ & + \mu(K + h(K + \mu))\Omega_r(r, l, h)(2hr)^{-1}(K + \mu)^{-1} - \\ & - \mu(K - h(K + \mu))\Omega_r(r, l, -h)(2hr)^{-1}(K + \mu)^{-1} + \\ & + \mu(2h+1)(K + h(K + \mu))\Omega_z(r, l, h)(2hr)^{-1}(K + \mu)^{-1} + \\ & + \mu(2h-1)(K - h(K + \mu))\Omega_z(r, l, -h)(2hr)^{-1}(K + \mu)^{-1} + \\ & + \mu(h+1)(K + h(K + \mu))\Omega_\varphi(r, l, h)(2hr)^{-1}(K + \mu)^{-1} + \\ & + \mu(h-1)(K - h(K + \mu))\Omega_\varphi(r, l, -h)(2hr)^{-1}(K + \mu)^{-1} + \\ & + (K - h(K + \mu))(2hr^{h+1})^{-1} C_1^{(5)}(t) + (K + h(K + \mu))r^{h-1} C_2^{(5)}(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi = & 3K^2(h^2 - 1)(\Phi(r, l, -h) - \Phi(r, l, h))(2hr)^{-1}(K + \mu)^{-1} + \\ & + (h+1)(h+2)(\Psi(r, l, -h))(3hr)^{-1}(K + \mu)^{-1} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - (h-1)(h-2)(\Psi(r, l, h))(3hr)^{-1}(K+\mu)^{-1} + \\
 & + \mu K(h^2-1)(\Omega_\varphi(r, l, h) - \Omega_\varphi(r, l, -h))(2hr)^{-1}(K+\mu)^{-1} + \\
 & + \mu K((h+1)\Omega_r(r, l, -h) + (h-1)\Omega_r(r, l, h))(2hr)^{-1}(K+\mu)^{-1} - \\
 & - \mu K(2h+1)(h-1)\Psi_z(r, l, h)(2hr)^{-1}(K+\mu)^{-1} - \\
 & - \mu K(2h-1)(h+1)\Psi_z(r, l, -h)(2hr)^{-1}(K+\mu)^{-1} - \\
 & - 3\mu K\alpha T_0\theta(r)(K+\mu)^{-1} + K(h-1)(2hr^{h+1})^{-1}C_1^{(5)}(t) + \\
 & + K(h+1)r^{h-1}C_2^{(5)}(t), \quad (23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_r = & (\lambda + 2\mu)(3\mu)^{-1}(K + \mu)^{-1}k(r) + 0.5K\alpha T_0\theta(r)(K + \mu)^{-1} + \\
 & + (h^2 - 4)(18hr)^{-1}(K + \mu)^{-1}(\Psi(r, l, -h) - \Psi(r, l, h)) - \\
 & - K(h + 1)(h + 2)(4hr)^{-1}(K + \mu)^{-1}\Phi(r, l, h) + \\
 & + K(h - 1)(h - 2)(4hr)^{-1}(K + \mu)^{-1}\Phi(r, l, -h) + \\
 & + \mu((h - 2)\Omega_r(r, l, -h) + (h + 2)\Omega_r(r, l, h))(12hr)^{-1}(K + \mu)^{-1} + \\
 & + \mu(h + 1)(h + 2)\Omega_\varphi(r, l, h)(12hr)^{-1}(K + \mu)^{-1} - \\
 & - \mu(h - 1)(h - 2)\Omega_\varphi(r, l, -h)(12hr)^{-1}(K + \mu)^{-1} + \\
 & + \mu(2h + 1)(h + 2)\Omega_z(r, l, h)(12hr)^{-1}(K + \mu)^{-1} - \\
 & - \mu(2h - 1)(h - 2)\Omega_z(r, l, h)(12hr)^{-1}(K + \mu)^{-1} + \\
 & + (\lambda + 7/6\mu)3^{-1}(K + \mu)^{-1}\tilde{p}_\varphi(r) - (K + 3\mu)6^{-1}(K + \mu)^{-1}\tilde{p}_z(r) + \\
 & + 6^{-1}\tilde{p}_r(r) - (h + 2)(12hr^{h+1})^{-1}C_1^{(5)}(t) + (h - 2)r^{h-1}C_2^{(5)}(t), \\
 p_\varphi = & p_z(r, t) = -0.5p_r(r, t),
 \end{aligned}$$

где

$$h = \sqrt{\frac{K}{K + \mu}}, \quad l = R_1, \quad \Omega_i(r, l, h) = \frac{1}{r} \int_l^r \rho^h \tilde{p}_i(\rho) d\rho, \quad i = r, z, \varphi.$$

В области пластического течения $R \leq r \leq n_3(t)$, где выполняется условие $2\sigma_\varphi - \sigma_z - \sigma_r = 4k$, напряжения, перемещения, пластическая деформация определяются из соотношений (23).

4. Разгрузка. Остаточные напряжения. По мере остывания сборки в момент времени $t = t_4$ (см. рис. 2) на поверхности сопряжения $r = R$ рост необратимых деформаций останавливается, что свидетельствует о зарождении разгружающей упругопластической границы $r = m(t)$, которая сначала догоняет границу n_3 , а после — и границу n_1 (см. рис. 2), в итоге пластическое течение перестает существовать. Уравнение равновесия в области разгрузки $R \leq r \leq m(t)$ будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \right) = \frac{K\alpha T_0}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{2\mu}{r(\lambda + 2\mu)} (p_r - p_\varphi) - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial p_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial p_r}{\partial r}. \quad (24)$$

Разрешая обыкновенное дифференциальное уравнение (24), найдем

$$\begin{aligned}
 u_r^{(m)} &= \frac{3K}{\lambda + 2\mu} \Phi(r, l, 1) + C_1^{(m)}(t) \frac{r}{2} + C_2^{(m)}(t) \frac{1}{r} + \\
 &\quad + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} (\Omega_r(r, l, 1) + \Omega_r(r, l, -1) + \Omega_\varphi(r, l, 1) - \Omega_\varphi(r, l, -1)), \\
 \sigma_r &= (\lambda + \mu) C_1^{(m)}(t) + 2\mu r^{-2} C_2^{(m)}(t) - \frac{6\mu}{r(\lambda + 2\mu)} \Phi(r, l, 1) - \\
 &\quad - \frac{2\mu^2}{r(\lambda + 2\mu)} (\Omega_r(r, l, 1) + \Omega_\varphi(r, l, 1)) + \\
 &\quad + \frac{2\mu(\lambda + \mu)}{r(\lambda + 2\mu)} (\Omega_r(r, l, -1) - \Omega_\varphi(r, l, -1)), \quad (25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_\varphi &= \frac{6\mu}{r(\lambda + 2\mu)} (\Phi(r, l, 1) - rK\alpha T_0 \theta(r, t)) + \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} p_r(r) - 2\mu p_\varphi(r) + \\
 &\quad + \frac{2\mu^2}{r(\lambda + 2\mu)} (\Omega_r(r, l, 1) + \Omega_\varphi(r, l, 1)) + C_1^{(m)}(t)(\lambda + \mu) + \\
 &\quad + \frac{2\mu(\lambda + \mu)}{r(\lambda + 2\mu)} (\Omega_r(r, l, -1) - \Omega_\varphi(r, l, -1)) + \frac{2\mu}{r^2} C_2^{(m)}(t),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_z &= \lambda C_1^{(m)}(t) - \frac{6\mu}{\lambda + 2\mu} K\alpha T_0 \theta(r, t) + \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} p_r(r) + \\
 &\quad + \frac{2\mu\lambda}{r(\lambda + 2\mu)} (\Omega_r(r, l, -1) - \Omega_\varphi(r, l, -1)) + 2\mu p_\varphi(r).
 \end{aligned}$$

Напряжения и перемещения рассчитываются по (25) до полного остывания сборки до комнатной температуры. Как только температура в сборке выровняется и станет начальной, уравнение равновесия примет вид, отличный от (24):

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) = -\frac{2\mu}{r(\lambda + 2\mu)} (\tilde{p}_r - \tilde{p}_\varphi) - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \tilde{p}_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{p}_r}{\partial r}. \quad (26)$$

Интегрируя (26), получаем соотношения для нахождения остаточных перемещений и напряжений в материале сборки:

$$\begin{aligned}
 u_r &= C_1^{(m)}(t) \frac{r}{2} + C_2^{(m)}(t) \frac{1}{r} + \\
 &\quad + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} (\Omega_r(r, l, 1) + \Omega_r(r, l, -1) + \Omega_\varphi(r, l, 1) - \Omega_\varphi(r, l, -1)), \\
 \sigma_r &= (\lambda + \mu) C_1^{(m)}(t) + \frac{2\mu}{r^2} C_2^{(m)}(t) - \frac{2\mu^2}{r(\lambda + 2\mu)} (\Omega_r(r, l, 1) + \Omega_\varphi(r, l, 1)) - \\
 &\quad - 3K\alpha T_0 \theta(r) + \frac{2\mu(\lambda + \mu)}{r(\lambda + 2\mu)} (\Omega_r(r, l, -1) - \Omega_\varphi(r, l, -1)), \quad (27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi = & -3K\alpha T_0\theta(r, t) - 2\mu p_\varphi(r) + \frac{2\mu^2}{r(\lambda + 2\mu)} (\Omega_r(r, l, 1) + \Omega_\varphi(r, l, 1)) + \\ & + \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} p_r(r) + \frac{2\mu(\lambda + \mu)}{r(\lambda + 2\mu)} (\Omega_r(r, l, -1) - \Omega_\varphi(r, l, -1)) + \\ & + C_1^{(m)}(t)(\lambda + \mu) + \frac{2\mu}{r^2} C_2^{(m)}(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z = & \lambda C_1^{(m)}(t) - 3K\alpha T_0\theta(r, t) + 2\mu p_\varphi(r) + \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} p_r(r) + \\ & + \frac{2\mu\lambda}{r(\lambda + 2\mu)} (\Omega_r(r, l, -1) - \Omega_\varphi(r, l, -1)). \end{aligned}$$

На рис. 1 выделены две грани и ребро кусочно-линейной поверхности нагружения (боковой поверхности наклонной призмы Ивлева (9)) при условиях, в которых реализуется пластическое течение (см. рис. 2). Следует отметить, что для условий плоских напряженных состояний [20] пластическое течение на ребре призмы Ивлева не реализуется. Новая область пластического течения зарождается в зависимости от напряжений соседней грани поверхности нагружения, минуя их общее ребро. В нашем случае плоских деформируемых состояний пластическое течение на ребре призмы Ивлева происходит и, таким образом, является необходимым условием построения решения.

5. Падение напряжений при вращении. Пусть рассчитанная сборка теперь ускоренно вращается вокруг своей оси. Считаем изменение угловой скорости медленным, пренебрегаем угловым ускорением. Уравнение движения сводится к одному уравнению

$$\sigma_{r,r} + (\sigma_r - \sigma_\varphi)/r = -\rho r \omega^2.$$

Учитывая условия изотермичности процесса деформирования, задаваемого воздействием центробежных сил инерции, найдем

$$\begin{aligned} u_r(r, t) = u_r(r) - \frac{\omega^2 \rho r^3}{24(\lambda + 2\mu)}, \quad \sigma_r(r, t) = \sigma_r(r) - \frac{3K r^2 \rho \omega^2}{12(\lambda + 2\mu)}, \\ \sigma_\varphi(r, t) = \sigma_\varphi(r) - \frac{(2\lambda + \mu) r^2 \rho \omega^2}{12(\lambda + 2\mu)}, \quad \sigma_z(r, t) = \sigma_z(r) - \frac{\lambda r^2 \rho \omega^2}{6(\lambda + 2\mu)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь $u_r(r)$, $\sigma_r(r)$, $\sigma_\varphi(r)$, $\sigma_z(r)$ — начальные распределения зависимых (искомых) переменных задачи, эволюция которых происходит в соответствии с (28). Эти начальные значения являются остаточными напряжениями и перемещениями в задаче посадки с натягом. Они вычисляются в соответствии с зависимостями (27), полученными ранее.

При росте скорости вращения $\omega = \omega(t)$ значение натяга уменьшается, пока не станет равным нулю, тогда происходит отрыв муфты от вала. Угловая скорость отрыва $\omega = \omega_*$ индивидуальна для каждой сборки. Рассмотрим подробнее различные случаи. Термомеханические свойства материалов сборки приведены в таблице.

Термомеханические характеристики материалов сборки
 [Thermomechanical properties of the assembly materials]

	k_0 , МПа	λ , GPa	μ , GPa	α , 10^{-6}	$a \cdot 10^{-6}$, m^2/s	ψ , W/ μ	T_p , °C
Steel	360	97.06	82.68	11.1	17.35	67.78	1400
Brass	290	58.26	38.84	19.1	35.68	113	937
Bronze	350	66.9	44.6	16.2	18.2	58	1040
Duralumin	255	41.53	27.7	22.9	50	130	660
Aluminum	210	41.53	27.6	23.4	77.1	188	660

Рассмотрим сборку стального вала и дюралевой муфты, полученную в результате горячей посадки, при которой муфту разогревали до температуры $T_* = 300^\circ\text{C}$ ($R_1/R_3 = 0.8$). Остаточные напряжения, образованные в результате посадки, приведены на рис. 3, а. Процесс термоупругопластического деформирования полностью соответствовал вышеописанному. Распределение напряжений в момент отрыва приведено на рис. 3, б. Скорость отрыва составила $\omega_* = 8562.7$ 1/с, или $n_* = 81802.5$ об/мин. Если увеличить температуру разогрева муфты до 350°C , то натяг увеличится на 18%, а скорость отрыва возрастет лишь на 8%.

В сборке стального вала и алюминиевой муфты, полученной в результате горячей посадки разогретой муфты до температуры 300°C ($R_1/R_3 = 0.2$) на вал, скорость отрыва составляет $\omega_* = 9170$ 1/с, или $n_* = 87611.4$ об/мин. На рис. 4 приведены распределения остаточных напряжений и напряжений в момент отрыва муфты от вала.

На рис. 5 приведены распределения напряжений для сборки, полученной в результате горячей посадки бронзовой муфты, разогретой до 600°C ($R_1/R_3 = 0.4$), на латунный вал, для которой скорость отрыва составляет $\omega_* = 8460$ 1/с, или $n_* = 80828$ об/мин.

Отметим, что в расчетах в качестве условия пластического течения было выбрано условие максимальных приведенных напряжений из-за того, что остаточные напряжения после операции горячей посадки оказываются максимальными в сравнении со случаем условий пластичности максимальных касательных и октаэдрических напряжений [15].

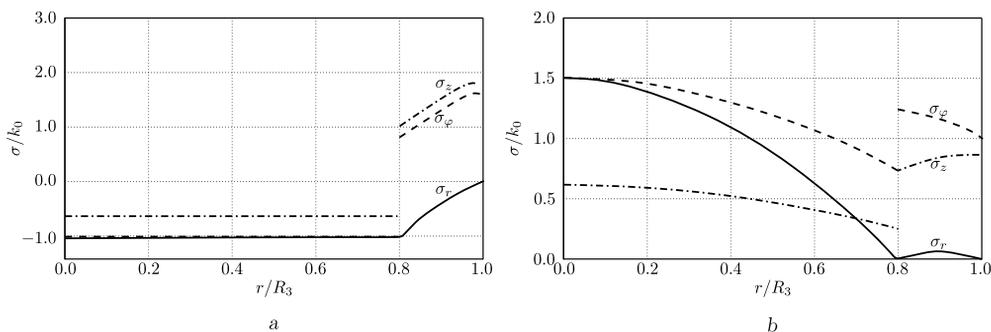


Рис. 3. Распределение остаточных напряжения (а) и напряжений в момент отрыва муфты (из стали) от вала (из дюралю) (б); $k_0 = 360$ МПа

[Figure 3. Distribution of residual stresses (a) and stresses at the moment of separation of the coupling (made of steel) from the shaft (made of duralumin) (b); $k_0 = 360$ МПа]

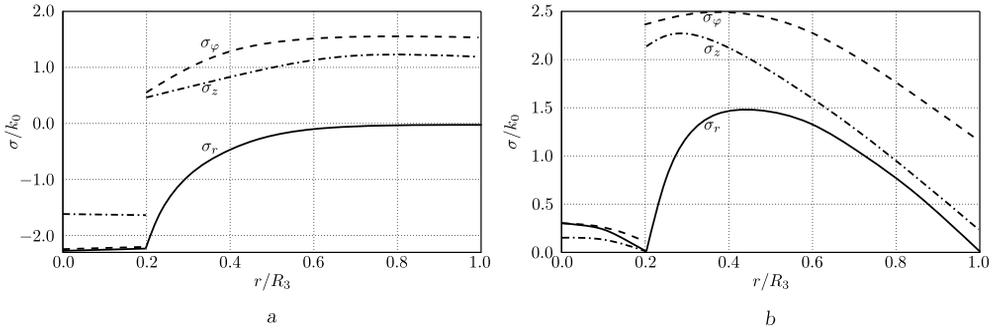


Рис. 4. Распределение остаточных напряжения (а) и напряжений в момент отрыва муфты (из стали) от вала (из алюминия) (b); $k_0 = 360$ МПа

[Figure 4. Distribution of residual stresses (a) and stresses at the moment of separation of the coupling (made of steel) from the shaft (made of aluminum) (b); $k_0 = 360$ МПа]

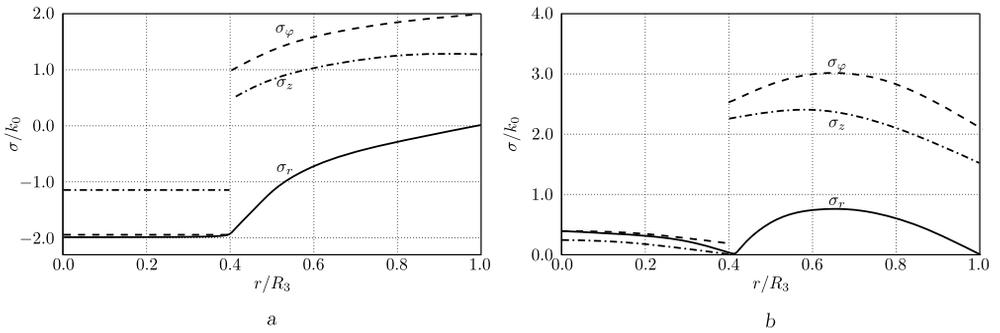


Рис. 5. Распределение остаточных напряжения (а) и напряжений в момент отрыва муфты (из бронзы) от вала (из латуни) (b); $k_0 = 350$ МПа

[Figure 5. Distribution of residual stresses (a) and stresses at the moment of separation of the coupling (made of bronze) from the shaft (made of brass) (b); $k_0 = 350$ МПа]

Заключение. Составные валы, материал которых находится в преднапряженном состоянии, в некоторых случаях обладают функциональным преимуществом перед сплошными и используются в различных конструкциях машин и механизмов в случае, когда они изготавливаются с использованием композитных или интерметаллидных слоев. Для изготовления таких изделий в числе прочих может использоваться операция горячей посадки или иная посадка с натягом.

Решение задачи Гадолина о сборке двухслойного вала является необходимым для его дальнейшего испытания на отрыв в качестве начального условия для упругопластического процесса деформирования, так как предложенный метод, являющийся, по существу, аналитическим, может учитывать наличие пластического течения (с учетом зависимости предела текучести от температуры) как на стадии сборки вала, так и на стадии его испытания вращением.

Результаты расчетов показывают, что угловые скорости вращения, «разрывающие» рассмотренные в статье сборки, мало зависят от термомеханических свойств материалов сопрягаемых деталей и от их геометрии. Если вращение является основным (функциональным) предназначением сборки (составного вала), то предназначение будет выполняться, если только вращение не будет сверхбыстрым (более 80 000 об/мин).

Предполагаемый подход представляется возможным и для расчетов более сложных многослойных валов, когда часть слоев изготавливается из материалов, проявляющих выраженные упругопластические свойства.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20–01–00147).

Библиографический список

1. Берникер Е. И. *Посадка с натягом в машиностроении*. М., Л.: Машиностроение, 1966. 168 с.
2. Гадолин А. В. Теория орудий, скрепленных обручами // *Артилл. журн.*, 1861. № 12. С. 1033–1071.
3. Boley B. A., Weiner J. H. *Theory of Thermal Stresses* / Dover Civil and Mechanical Engineering. New York: John Wiley & Sons, 1960. xv+586 pp.
4. Parkus H. *Instationäre Wärmespannungen*. Wien: Springer, 1959. v+166 pp. (In German)
5. Mack W. Thermal assembly of on elastic-plastic hub a solid shaft // *Arch. Appl. Mech.*, 1993. vol. 63. pp. 42–50. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00787908>.
6. Bengeri M., Mack W. The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic-plastic shrink fit // *Acta Mech.*, 1994. vol. 103. pp. 243–257. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01180229>.
7. Kovács Á. Residual stresses in thermally loaded shrink fits // *Period. Polytech., Mech. Eng.*, 1996. vol. 40, no. 2. pp. 103–112.
8. Дац Е. П., Петров М. Р., Ткачева А. В. Кусочно-линейные пластические потенциалы в задачах теории температурных напряжений о сборки горячей посадкой // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Мех. пред. сост.*, 2015. № 4(26). С. 163–179. EDN: VNXOWL.
9. Буренин А. А., Ткачева А. В., Щербатюк Г. А. К расчету неустановившихся температурных напряжений в упругопластических телах // *Выч. мех. спл. сред*, 2017. Т. 10, № 3. С. 245–259. EDN: ZHZVHJ. DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.3.20>.
10. Буренин А. А., Каиг М., Ткачева А. В. К расчету плоских напряженных состояний в теории неустановившихся температурных напряжений в упругопластических телах // *Дальневост. матем. журн.*, 2018. Т. 18, № 2. С. 131–146. EDN: YUNRFR.
11. Bland D. R. Elastoplastic thick-walled tubes of work-hardening material subject to internal and external pressures and to temperature gradients // *J. Mech. Phys. Solids*, 1956. vol. 4, no. 4. pp. 209–229. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(56\)90030-8](https://doi.org/10.1016/0022-5096(56)90030-8).
12. Александров С. Е., Лямина Е. А., Новожилова О. В. Влияние зависимости предела текучести от температуры на напряженное состояние в тонком полем диске // *Пробл. машиностр. и надежн. машин*, 2013. Т. 3. С. 43–48. EDN: RBJJRR.
13. Александров С. Е., Ломакин Е. В., Дзенг Й.–Р. Решение термоупругопластической задачи для тонкого диска из пластически сжимаемого материала, подверженного термическому нагружению // *ДАН*, 2012. Т. 443, № 3. С. 310–312. EDN: OXWKQJ.
14. Попов А. Л., Челюбеев Д. А., Бухалов В. И. Задача Гадолина в упругопластической постановке // *ПММ*, 2018. Т. 82, № 6. С. 804–812. EDN: YPXQWL. DOI: <https://doi.org/10.31857/S003282350002744-8>.
15. Дац Е. П., Мурашкин Е. В., Ткачева А. В., Щербатюк Г. А. Температурные напряжения в упругопластической трубе в зависимости от выбора условия пластичности // *Изв. РАН. МТТ*, 2018. № 1. С. 32–43. EDN: YOFWCD.

16. Буренин А. А., Ткачева А. В. О сборке двухслойной металлической трубы способом горячей посадки // *Изв. РАН. МТТ*, 2019. № 3. С. 86–99. EDN: YPOULA. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0572329919030073>.
17. Дац Е. П., Ткачева А. В. Технологические температурные напряжения в процессах горячей посадки цилиндрических тел при учете пластических течений // *ПМТФ*, 2016. Т. 57, № 3(337). С. 208–216. EDN: WAIBFX. DOI: <https://doi.org/10.15372/PMTF20160321>.
18. Буренин А. А., Матвеевко В. П., Ткачева А. В. Температурные напряжения в процессе сборки двухслойного вала способом горячей посадки // *Уч. зап. КнАГТУ*, 2018. Т. 1, № 3(35). С. 31–41. EDN: YLXXCH.
19. Буренин А. А., Ткачева А. В. Эволюция температурных напряжений в задаче Гадолина о сборке двухслойной упругопластической трубы // *Вестн. ПНИПУ. Сер. Механика*, 2020. № 3. С. 20–31. EDN: HМУHTT. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.3.03>.
20. Буренин А. А., Ткачева А. В. Кусочно-линейные пластические потенциалы как средство расчетов плоских неустановившихся температурных напряжений // *Изв. РАН. МТТ*, 2020. Т. 6. С. 40–49. EDN: MFTXER. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0572329920060057>.
21. Sackfield A., Barber J. R., Hills D. A., Truman C. E. A shrink-fit shaft subject to torsion // *Eur. J. Mech. A Solids*, 2002. vol. 21, no. 1. pp. 73–84. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0997-7538\(01\)01197-4](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(01)01197-4).
22. Antoni N. Contact separation and failure analysis of a rotating thermo-elastoplastic shrink-fit assembly // *Appl. Math. Modelling*, 2013. vol. 37, no. 4. pp. 2352–2363. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.05.018>.
23. Arslan E., Mack W. Shrink fit with solid inclusion and functionally graded hub // *Compos. Struct.*, 2015. vol. 121. pp. 217–224. DOI: <https://doi.org/10.1016/J.COMPSTRUCT.2014.10.034>.
24. Lopes J. P., Hills D. A., Paynter R. J. H. The axisymmetric shrink fit problem subjected to axial force // *Eur. J. Mech. A Solids*, 2018. vol. 70. pp. 172–180. DOI: <https://doi.org/10.1016/J.EUROMECHSOL.2018.02.007>.
25. Gaul L., Schmidt A. Finite element simulation and experiments on motor damping assembled disk shrink fits // *Mech. Syst. Signal Process.*, 2019. vol. 127. pp. 412–422. DOI: <https://doi.org/10.1016/J.YMSSP.2018.11.021>.
26. Буренин А. А., Ткачева А. В. Осевое вращение в качестве причины падения натяга в сборке составного диска, полученной способом горячей посадки // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Мех. пред. сост.*, 2021. № 3(49). С. 19–32. EDN: NUYZPS. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2021.49.3.003>.
27. Begun A. S., Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Prokudin A. N. Irreversible deformation of a rotating disk having angular acceleration // *Acta Mech.*, 2021. vol. 232, no. 5. pp. 1917–1931. EDN: UPPSFS. DOI: <https://doi.org/10.1007/S00707-021-02942-5>.
28. Eraslan A. N., Akis T. On the plane strain and plane stress solutions of functionally graded rotating solid shaft and solid disk problems // *Acta Mech.*, 2006. vol. 181, no. 1–2. pp. 43–63. DOI: <https://doi.org/10.1007/S00707-005-0276-5>.
29. Prokudin A. N. Exact elastoplastic analysis of a rotating cylinder with a rigid inclusion under mechanical loading and unloading // *ZAMM*, 2020. vol. 100, no. 3, e201900213. EDN: SYSSIM. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201900213>.
30. Прокудин А. Н., Буренин А. А. Упругопластическое деформирование вращающегося сплошного цилиндра из линейно-упрочняющегося материала // *ПММ*, 2021. Т. 85, № 2. С. 172–192. EDN: EDKAMB. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0032823521020077>.
31. Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. *Большие необратимые деформации и упругое последствие*. Владивосток: Дальнаука, 2013. 312 с.
32. Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. *Теория пластичности*. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
33. Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. *Математическая теория пластичности*. М.: Физматлит, 2001. 704 с. EDN: TQYAQT.

MSC: 74C05, 74F05

Gadolin's problem on the assembly of a two-layer shaft by a shrink fit with a test of the connection for separation

A. A. Burenin, A. V. Tkacheva, S. V. Firsov

Institute of Metallurgy and Mechanical Engineering Far-Eastern Branch of RAS,
Khabarovsk Federal Research Center of the Far Eastern Branch of RAS,
1, Metallurgov str., Komsomolsk-on-Amur, 681005, Russian Federation.

Abstract

The connection strength in the interference fit assembly of a two-layer shaft produced by the shrink fit operation is studied. The materials of the assembly parts are considered to be ideal elastoplastic, with yield strength that are significantly depended on temperature. In the calculations, the conditions of plane deformed states are taken into account. Pull tests are performed by rotating the assembly around its axis, when pulling forces are generated in the form of centrifugal forces of inertia. It is shown that with an increase of the rotation speed, the tightness in the assemblies is decreased. Limitations of the possible angular speed are calculated under the assembly tightness disappearing.

Keywords: elasticity, plasticity, interference assembly, shrink fit, temperature stresses, rotation of an elastoplastic cylinder.

Received: 15th May, 2022 / Revised: 2nd September, 2022 /

Accepted: 20th September, 2022 / First online: 26th September, 2022

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely

Mechanics of Solids

Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

   The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Burenin A. A., Tkacheva A. V., Firsov S. V. Gadolin's problem on the assembly of a two-layer shaft by a shrink fit with a test of the connection for separation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 3, pp. 480–499. EDN: [MVCIJF](https://doi.org/10.14498/vsgtu1928). DOI: [10.14498/vsgtu1928](https://doi.org/10.14498/vsgtu1928) (In Russian).

Authors' Details:

Anatoly A. Burenin  <https://orcid.org/0000-0003-4502-9547>

Dr. Phys. & Math. Sci., Corresponding member of RAS; Chief Researcher; Lab. of the Problems of Creation and Processing of Materials and Products; e-mail: burenin@iacp.dvo.ru

Anastasia V. Tkacheva  <https://orcid.org/0000-0003-1795-0021>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Senior Researcher; Lab. of the Problems of Creation and Processing of Materials and Products; e-mail: 4nansi4@mail.ru

Sergey V. Firsov  <https://orcid.org/0000-0001-7446-6231>

Junior Researcher; Lab. of the Problems of Creation and Processing of Materials and Products; e-mail: firsov.s.new@yandex.ru

responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20–01–00147).

References

- Berniker E. I. *Posadka s natiagom v mashinostroenii* [Interference Fit in Mechanical Engineering]. Moscow, Leningrad, Mashinostoenie, 1966, 168 pp. (In Russian)
- Gadolin A. B. The theory of gun barrels fastened with hoops, *Artill. Zhurn.*, 1861, no. 12, pp. 1033–1071 (In Russian).
- Boley B. A., Weiner J. H. *Theory of Thermal Stresses*, Dover Civil and Mechanical Engineering. New York, John Wiley & Sons, 1960, xv+586 pp.
- Parkus H. *Instationäre Wärmespannungen*. Wien, Springer, 1959, v+166 pp. (In German)
- Mack W. Thermal assembly of on elastic-plastic hub a solid shaft, *Arch. Appl. Mech.*, 1993, vol. 63, pp. 42–50. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00787908>.
- Bengeri M., Mack W. The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic-plastic shrink fit, *Acta Mech.*, 1994, vol. 103, pp. 243–257. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01180229>.
- Kovács Á. Residual stresses in thermally loaded shrink fits, *Period. Polytech., Mech. Eng.*, 1996, vol. 40, no. 2, pp. 103–112.
- Dats E. P., Petrov M. R., Tkacheva A. V. Piecewise linear plastic potentials within the framework of the theory of the thermal stresses concerning to shrink fit, *Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im I. Ya. Yakovleva. Ser. Mekh. Pred. Sost.*, 2015, vol. 4(26), pp. 163–179 (In Russian). EDN: [VNXOWL](https://doi.org/10.1007/BF01180229).
- Burenin A. A., Tkacheva A. V., Shcherbatyuk G. A. Calculation of the unsteady thermal stresses in elastoplastic solids, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2018, vol. 59, no. 7, pp. 1197–1210. EDN: [LAVRJL](https://doi.org/10.1007/BF01180229). DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894418070040>.
- Burenin A. A., Kaig M., Tkacheva A. V. To the calculation of plane stressed states of the theory of unsteady temperature stresses in elastoplastic bodies, *Dal'nevost. Mat. Zh.*, 2018, vol. 18, no. 2, pp. 131–146 (In Russian). EDN: [YUNRFR](https://doi.org/10.1007/BF01180229).
- Bland D. R. Elastoplastic thick-walled tubes of work-hardening material subject to internal and external pressures and to temperature gradients, *J. Mech. Phys. Solids*, 1956, vol. 4, no. 4, pp. 209–229. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(56\)90030-8](https://doi.org/10.1016/0022-5096(56)90030-8).
- Aleksandrov S. E., Lyamina E. A., Novozhilova O. V. The influence of the relationship between yield strength and temperature on the stress state in a thin hollow disk, *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2013, vol. 42, no. 3, pp. 214–218. EDN: [RNUNVP](https://doi.org/10.1016/0022-5096(56)90030-8). DOI: <https://doi.org/10.3103/S1052618813020027>.
- Aleksandrov S. E., Lomakin E. V., Dzenig I. R. Solution of the thermoelastoplastic problem for a thin disk of plastically compressible material subjected to thermal loading, *Dokl. Phys.*, 2012, vol. 57, no. 3, pp. 136–139. EDN: [PDRTVT](https://doi.org/10.1016/0022-5096(56)90030-8). DOI: <https://doi.org/10.1134/S1028335812030081>.
- Bukhalov V. I., Popov A. L., Chelyubeev D. A. Gadolin's theory in elastoplastic formulation, *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, no. 2, pp. 356–363. EDN: [NGYUUL](https://doi.org/10.1016/0022-5096(56)90030-8). DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654419030051>.
- Dats E. P., Murashkin E. V., Tkacheva A. V., Shcherbatyuk G. A. Thermal stresses in an elastoplastic tube depending on the choice of Yield conditions, *Mech. Solids*, 2018, vol. 53, no. 1, pp. 23–32. EDN: [YB0IYP](https://doi.org/10.1016/0022-5096(56)90030-8). DOI: <https://doi.org/10.3103/S002565441801003X>.
- Burenin A. A., Tkacheva A. V. Assembly of a two-layered metal pipe by using shrink fit, *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, no. 4, pp. 559–569. EDN: [BSSTLA](https://doi.org/10.1016/0022-5096(56)90030-8). DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654419040095>.
- Dats E. P., Tkacheva A. V. Technological thermal stresses in the shrink fitting of cylindrical bodies with consideration of plastic flows, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2016, vol. 57, no. 3, pp. 569–576. EDN: [WVUNSF](https://doi.org/10.1016/0022-5096(56)90030-8). DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894416030214>.

18. Burenin A. A., Matveenkov V. P., Tkacheva A. V. Temperature stresses in the process of assembling a two-layer shaft by shrink fitting, *Uch. Zap. KnAGTU*, 2018, vol. 1, no. 3(35), pp. 31–41 (In Russian). EDN: [YLXXCH](#).
19. Burenin A. A., Tkacheva A. V. Evolution of temperature stresses in the Gadolin problem of assembling a two-layer elastoplastic pipe, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020, no. 3, pp. 20–31 (In Russian). EDN: [HMHUHT](#). DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.3.03>.
20. Burenin A. A., Tkacheva A. V. Piecewise linear plastic potentials as a tool for calculating plane transient temperature stresses, *Mech. Solids*, 2020, vol. 55, no. 6, pp. 791–799. EDN: [EMMOEA](#). DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654420060059>.
21. Sackfield A., Barber J. R., Hills D. A., Truman C. E. A shrink-fit shaft subject to torsion, *Eur. J. Mech. A Solids*, 2002, vol. 21, no. 1, pp. 73–84. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0997-7538\(01\)01197-4](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(01)01197-4).
22. Antoni N. Contact separation and failure analysis of a rotating thermo-elastoplastic shrink-fit assembly, *Appl. Math. Modelling*, 2013, vol. 37, no. 4, pp. 2352–2363. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.05.018>.
23. Arslan E., Mack W. Shrink fit with solid inclusion and functionally graded hub, *Compos. Struct.*, 2015, vol. 121, pp. 217–224. DOI: <https://doi.org/10.1016/J.COMPSTRUCT.2014.10.034>.
24. Lopes J. P., Hills D. A., Paynter R. J. H. The axisymmetric shrink fit problem subjected to axial force, *Eur. J. Mech. A Solids*, 2018, vol. 70, pp. 172–180. DOI: <https://doi.org/10.1016/J.EUROMECHSOL.2018.02.007>.
25. Gaul L., Schmidt A. Finite element simulation and experiments on motor damping assembled disk shrink fits, *Mech. Syst. Signal Process.*, 2019, vol. 127, pp. 412–422. DOI: <https://doi.org/10.1016/J.YMSSP.2018.11.021>.
26. Burenin A. A., Tkacheva A. V. Axial rotation as a cause of loss of interference in a shrink fitted split disc assembly, *Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im I. Ya. Yakovleva. Ser. Mekh. Pred. Sost.*, 2021, no. 3(49), pp. 19–32 (In Russian). EDN: [NUYZPS](#). DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2021.49.3.003>.
27. Begun A. S., Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Prokudin A. N. Irreversible deformation of a rotating disk having angular acceleration, *Acta Mech.*, 2021, vol. 232, no. 5, pp. 1917–1931. EDN: [UPPSFS](#). DOI: <https://doi.org/10.1007/S00707-021-02942-5>.
28. Eraslan A. N., Akis T. On the plane strain and plane stress solutions of functionally graded rotating solid shaft and solid disk problems, *Acta Mech.*, 2006, vol. 181, no. 1–2, pp. 43–63. DOI: <https://doi.org/10.1007/S00707-005-0276-5>.
29. Prokudin A. N. Exact elastoplastic analysis of a rotating cylinder with a rigid inclusion under mechanical loading and unloading, *ZAMM*, 2020, vol. 100, no. 3, e201900213. EDN: [SYSSIM](#). DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201900213>.
30. Prokudin A. N., Burenin A. A. Elastoplastic analysis of a rotating solid shaft made of linear hardening material, *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, no. 7, pp. 1243–1258. EDN: [UDGKGQ](#). DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654421070207>.
31. Burenin A. A., Kovtanyuk L. V. *Bol'shie neobratimye deformatsii i uprugoe posledeistvie* [Large Irreversible Deformations and Elastic Aftereffect]. Vladivostok, Dal'nauka, 2013, 312 pp. (In Russian)
32. Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. *Teoriia plastichnosti* [Theory of Plasticity]. Vladivostok, Dal'nauka, 1998, 528 pp. (In Russian)
33. Ishlinsky A. Yu., Ivlev D. D. *Matematicheskaya teoriia plastichnosti* [Mathematical Theory of Plasticity]. Moscow, Fizmatlit, 2001, 704 pp. (In Russian). EDN: [TQYAQT](#).