



УДК 539.3

Численный анализ нелинейных колебаний пластины на вязкоупругом основании под действием подвижной осциллирующей нагрузки на основе моделей с дробными производными

А. И. Круссер¹, М. В. Шитикова^{1,2}

¹ Воронежский государственный технический университет, Россия, 394006, Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84.

² Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Россия, 129337, Москва, Ярославское ш., 26.

Аннотация

Цель. Исследуются нелинейные колебания упругой шарнирно опертой пластины на вязкоупругом основании под действием подвижной осциллирующей нагрузки в случае внутреннего резонанса 1:1, сопровождаемого внешним резонансом. Свойства вязкоупругого основания задаются с помощью обобщенной модели Фусса–Винклера, в которой сила демпфирования описывается моделью стандартного линейного твердого тела с дробной производной Римана–Лиувилля. Внешняя нагрузка задается при помощи линейного вязкоупругого осциллятора на основе модели Кельвина–Фойгта с дробной производной в случае, когда вязкость осциллятора считается малой величиной. Динамическое поведение пластины описывается системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка по времени относительно обобщенных перемещений. **Методы.** Для решения полученной системы уравнений используется метод многих временных масштабов в сочетании с методом разложения дробной производной в ряд Тейлора.

Механика деформируемого твердого тела

Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Круссер А. И., Шитикова М. В. Численный анализ нелинейных колебаний пластины на вязкоупругом основании под действием подвижной осциллирующей нагрузки на основе моделей с дробными производными // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 4. С. 694–714. EDN: DOBLOB. DOI: 10.14498/vsgtu1957.

Сведения об авторах

Анастасия Игоревна Круссер  <https://orcid.org/0000-0001-6203-2495>

аспирант; младший научный сотрудник; Международный научный центр по фундаментальным исследованиям в области естественных и строительных наук им. Заслуженного деятеля науки РФ, профессора Россихина Ю.А.; e-mail: an.krusser@yandex.ru

Марина Вячеславовна Шитикова  <https://orcid.org/0000-0003-2186-1881>

доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник; Международный научный центр по фундаментальным исследованиям в области естественных и строительных наук им. Заслуженного деятеля науки РФ, профессора Россихина Ю.А.¹; профессор, кафед. строительной и теоретической механики²; e-mail: mvs@vgasu.vrn.ru

Результаты. Получены разрешающие уравнения для определения нелинейных амплитуд и фаз вынужденных колебаний, решение которых получено численно. Данная система уравнений позволяет управлять не только демпфирующими свойствами окружающей среды и основания за счет изменения параметров дробности, но также регулировать параметры демпфирования внешней нагрузки. **Выводы.** Численный анализ показал, что в рассматриваемой системе «пластина на вязкоупругом основании + подвижная осциллирующая нагрузка» происходит перекачка энергии между взаимодействующими модами колебаний. Представлено сравнение результатов численных исследований для различных значений внешней нагрузки, а также показана зависимость амплитуд нелинейных колебаний от значений параметров дробности окружающей среды и основания.

Ключевые слова: пластинка на вязкоупругом основании, подвижная осциллирующая нагрузка, дробная производная, метод многих временных масштабов, внутренний и внешний резонанс.

Получение: 21 сентября 2022 г. / Исправление: 18 октября 2022 г. /
Принятие: 21 октября 2022 г. / Публикация онлайн: 7 декабря 2022 г.

1. Введение. В настоящее время возрос интерес к анализу пластинок и балок, опирающихся на вязкоупругое основание, при воздействии различных видов динамических нагрузок. Подвижные нагрузки оказывают большое влияние на напряженно-деформированное состояние различных твердых тел и конструкций, вызывая их интенсивные колебания даже при небольших скоростях. Особый практический интерес представляют задачи взаимодействия автомобиля с дорожным полотном или самолета с покрытием взлетно-посадочной полосы. Для моделирования такой системы необходимо учитывать инерционные свойства и жесткостные характеристики движущегося объекта, т.е. представить транспортное средство в виде движущегося осциллятора.

Обширные исследования в области колебаний балок и пластин при воздействии подвижных нагрузок обобщены в обзорных работах [1–3]. Динамическое поведение балок на вязкоупругом основании под действием подвижной осциллирующей нагрузки исследовано в [4–9], где подвижная нагрузка представлялась в виде подрессоренной массы на пружинке [4, 5] или в виде вязкоупругого осциллятора по модели Кельвина–Фойгта [6–9].

Начиная с 1971 года, когда вышла в свет теперь уже классическая работа [10], в которой впервые демпфирующие свойства одномассовой механической системы было предложено представить в виде модели линейного стандартного тела с дробными производными, для описания свойств вязкоупругих осцилляторов широко используются различные модели с дробными производными и другими операторами дробного порядка [11–16].

Исследование влияния реакции основания на динамическое поведение конструкций давно привлекает внимание исследователей. Как известно, первой попыткой описать реакцию основания была модель, согласно которой основание считается упругим [3, 17]. В литературе встречается несколько названий данной модели, согласно которой возникающие деформации в грунтовом основании пропорциональны приложенному напряжению. В работах западных авторов модель упругого основания называют моделью Винклера, пер-

вое упоминание о которой относится к 1867 г. [18] и которая впоследствии была развита Н. Zimmermann'ом [19]. Однако ретроспективный анализ показал, что модель Винклера впервые была предложена русским академиком Н. И. Фуссом в 1801 г. в работе о движении повозок по дороге [20], в которой было выдвинуто положение о прямой пропорциональности давления местной осадке грунта [21, 22]. Таким образом, в русскоязычной литературе упругую модель основания принято называть моделью Фусса—Винклера.

Для описания вязкоупругого поведения материалов оснований к упругой модели Фусса—Винклера был добавлен вязкий элемент (или элементы), в результате чего было предложено несколько вязкоупругих моделей основания, обзор которых представлен в [3]. В настоящее время все большее распространение получают модели вязкоупругих оснований с использованием дробных производных, которые показали преимущества при описании наследственно-го поведения материалов с длительной памятью [23].

Задачи, посвященные анализу колебаний пластин на вязкоупругом основании, подверженных воздействию подвижной подрессоренной нагрузки, рассмотрены в работах [24–27]. Так, М. Taheri и Е. Ting [24] использовали функцию Грина для анализа поведения упругих пластин на линейном вязкоупругом основании по модели Кельвина—Фойгта целого порядка с произвольными граничными условиями под действием подвижных масс, опирающихся на пластину через систему пружины и амортизатора, соединенных параллельно. М. Zaman и др. [25] моделировали бетонные покрытия, которые подвержены воздействию движущихся авиационных нагрузок, с помощью ряда толстых пластинчатых элементов, поддерживаемых дискретными пружинами и амортизаторами в узловых точках, представляющих вязкоупругое основание по модели Кельвина—Фойгта. Динамическое взаимодействие между самолетом и покрытием учитывалось путем идеализации нагрузки от самолета массами, поддерживаемыми системой линейной рессорно-поршневой подвески и имеющими заданную начальную горизонтальную скорость и ускорение. W. Yang и др. [26] изучали влияние действия сцепления на взаимодействие автомобиля с дорогой. Автомобиль моделировался как масса, опирающаяся на систему подвески из четырех осцилляторов, соединенных с колесами, а дорожное покрытие моделировалось как двухслойная прямоугольная тонкая пластина на линейном вязкоупругом основании, описываемом моделью Кельвина—Фойгта. Этот подход был расширен в [27] для случая нелинейной жесткости подвески, нелинейного демпфирования подвески и жесткости шин, а также нелинейной модели основания.

Задача о колебаниях пластин также была обобщена для случая вязкоупругого материала пластинки. Для описания вязкоупругих свойств материала пластин часто используют модель Кельвина—Фойгта [28] или модель стандартного линейного тела [29].

Согласно проведенному обзору литературы, в большинстве работ анализ колебаний пластин на вязкоупругих основаниях проводился в линейной постановке задачи. Тем не менее имеются работы, в которых рассматриваются нелинейные колебания пластин на основании. Так, динамическое поведение прямоугольной нелинейной пластины, опирающейся на вязкоупругое основание, особенности демпфирования которого описываются моделью Кельвина—Фойгта с дробной производной, впервые исследовалось в работе [30]. Модель

стандартного линейного твердого тела с дробной производной применялась для определения вязкоупругих свойств основания для случаев свободных колебаний пластины [31] и вынужденных колебаний при воздействии подвижной гармонической нагрузки [32].

В настоящей работе исследуются нелинейные колебания шарнирно опертой по контуру пластины под действием подвижной осциллирующей нагрузки, опирающейся на вязкоупругое основание на основе обобщенной модели Фусса—Винклера для случая внутреннего резонанса 1:1, сопровождаемого внешним резонансом. При этом вязкоупругие свойства основания, подвижной нагрузки и демпфирующие свойства окружающей среды, в которой происходят колебания, описываются моделями с дробными производными.

2. Постановка задачи. Рассмотрим нелинейные колебания шарнирно опертой по контуру упругой пластины в вязкоупругой среде на вязкоупругом основании под действием подвижной подрессоренной нагрузки, которая моделируется вязкоупругим осциллятором Кельвина—Фойгта с дробной производной (рис. 1). Уравнения движения системы «пластина + вязкоупругое основание» можно получить путем обобщения уравнений фон Кармана [33] за счет включения слагаемых, описывающих реакцию основания и силу сопротивления окружающей среды, а также воздействие внешней осциллирующей нагрузки:

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -m \left(g + \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \right) \delta(x - f(t)) \delta(y - 0.5b) - F_1 - F_2, \quad (1)$$

$$\nabla^4 \varphi = Eh \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \quad (2)$$

где $w = w(x, y, t)$ — поперечный прогиб пластины; φ — функция напряжений Эйри; $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$ — цилиндрическая жесткость; E, ν, ρ — модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала пластинки соответственно; h — толщина; t — время; δ — дельта-функция Дирака; m — масса осциллятора; $q = q(t)$ — перемещение осциллятора; g — ускорение свободного падения; $f(t)$ — функция, определяющая положение подрессоренной нагрузки. Значения функции $f(t)$ удовлетворяют условию $0 \leq f(t) \leq a$, и в случае движения с постоянной скоростью $f(t) = Vt$; a и b — линейные размеры пластинки (см. рис. 1).

Уравнение движения осциллятора получено на основе выражения, представленного в [24], при помощи замены производной целого порядка на производную дробного порядка:

$$m \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + c \left(\frac{d}{dt} \right)^\beta q + kq = c \left(\frac{d}{dt} \right)^\beta w(Vt, t) + kw(Vt, t) - mg, \quad (3)$$

где k — жесткость пружины, $c = k\tau_\sigma^\beta$ — коэффициент демпфирования амортизатора, τ_σ — время ретардации, $0 \leq \beta \leq 1$ — порядок дробной производной осциллятора, $w(Vt, t)$ — прогиб пластины в точке приложения осциллирующей нагрузки.

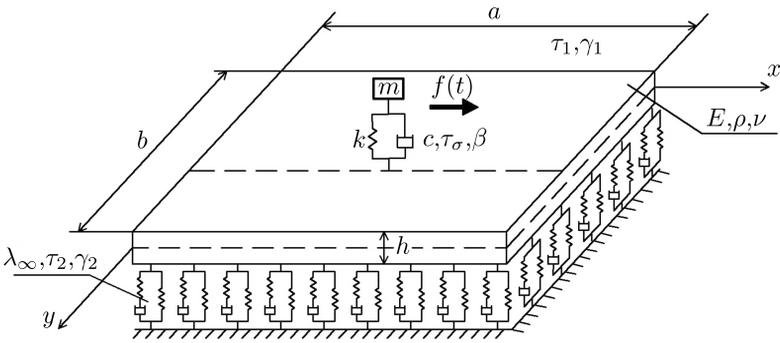


Рис. 1. Пластика на вязкоупругом основании под действием подвижной осциллирующей нагрузки на основе модели с дробной производной

[Figure 1. A plate on a viscoelastic foundation under the action of moving oscillator based on models with fractional derivatives]

В уравнении движения (1) $F_2 = \tilde{\lambda}w$ — реакция вязкоупругого основания; $F_1 = E_0\tau_1^{\gamma_1}D_{0+}^{\gamma_1}w$ — сила сопротивления окружающей среды, которая зависит от времени ретардации τ_1 и релаксированного модуля упругости E_0 и описывается вязкоупругой моделью Кельвина—Фойгта с дробной производной Римана—Лиувилля $D_{0+}^{\gamma_1}$ порядка γ_1 ($0 < \gamma_1 \leq 1$) [14, 34]

$$D_{0+}^{\gamma}x(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(t-t')dt'}{\Gamma(1-\gamma)t'^{\gamma}}, \quad 0 < \gamma = \gamma_1 \leq 1, \quad (4)$$

где $\Gamma(1-\gamma)$ — гамма-функция.

Предположим, следуя [35], что оператор податливости вязкоупругого основания описывается моделью стандартного линейного твердого тела с дробной производной Римана—Лиувилля D_{0+}^{γ} (4) для случая, когда $\gamma = \gamma_2$:

$$\tilde{\lambda} = \lambda_{\infty} \left[1 - \nu_{\varepsilon} \frac{1}{1 + \tau_2^{\gamma} D_{0+}^{\gamma_2}} \right],$$

где λ_{∞} — коэффициент мгновенной податливости основания; $\nu_{\varepsilon} = \Delta\lambda\lambda_{\infty}^{-1}$; $\Delta\lambda = \lambda_{\infty} - \lambda_0$ — величина, характеризующая уменьшение коэффициента податливости от его нерелаксированного значения до релаксированного; τ_2 — время релаксации вязкоупругого основания.

К системе уравнений (1)–(3) необходимо добавить граничные условия для шарнирно опертой пластинки:

$$\begin{aligned} w|_{x=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=a} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=a} = 0; \\ w|_{y=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = 0, \quad w|_{y=b} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=b} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

и начальные условия для осциллятора

$$q(0) = q_0; \quad \dot{q}(0) = 0.$$

С целью выявления возможности наступления внутреннего резонанса при нелинейных колебаниях пластинки, лежащей на вязкоупругом основании, и его последующего анализа будем полагать, что в процессе колебаний доминируют две собственные моды колебаний с номерами m_1n_1 и m_2n_2 . Тогда прогиб пластинки можно представить в следующем виде [30, 31]:

$$w(x, y, t) = x_1(t) \sin \frac{\pi m_1 x}{a} \sin \frac{\pi n_1 y}{b} + x_2(t) \sin \frac{\pi m_2 x}{a} \sin \frac{\pi n_2 y}{b} = x_1(t) W_{m_1 n_1}(x, y) + x_2(t) W_{m_2 n_2}(x, y), \quad (6)$$

где $x_i(t)$ и $W_{m_i n_i}(x, y)$ — обобщенные перемещения и собственные функции, $i = 1, 2$.

Подставляя решение (6) в уравнение (2) с учетом граничных условий (5) и интегрируя на отрезках $0 \leq x \leq a$ и $0 \leq y \leq b$, с учетом свойства ортогональности собственных функций получим функцию напряжений, которая представлена для шарнирно опертой по контуру пластины в работе [32].

При выводе дифференциальных уравнений следует учитывать фильтрующее свойство дельта-функции

$$\iint \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0),$$

в результате чего слагаемое, описывающее воздействие внешней нагрузки, примет вид

$$m \left(g + \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \right) \iint \delta(x - Vt) \delta(y - b/2) \sin \left(\frac{\pi m_i x}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi n_i y}{b} \right) dx dy = m \left(g + \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \right) \sin \left(\frac{\pi m_i Vt}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi n_i}{2} \right). \quad (7)$$

Подставляя предполагаемую функцию прогиба пластинки (6) и функцию напряжений в уравнение движения пластинки на вязкоупругом основании (1) и интегрируя на отрезках $0 \leq x \leq a$ и $0 \leq y \leq b$, с учетом (7) приходим к следующей системе нелинейных дифференциальных уравнений относительно обобщенных перемещений пластины:

$$\ddot{x}_1 + \left(\Omega_1^2 + \frac{\lambda_\infty}{\rho h} \right) x_1 + \alpha_1 x_1^3 + \alpha_2 x_1 x_2^2 + \frac{E_0 \tau_1^{\gamma_1}}{\rho h} D_{0+}^{\gamma_1} x_1 - \frac{\lambda_\infty \nu_\varepsilon}{\rho h} \varepsilon_\gamma^* (\tau_2^{\gamma_2}) x_1 + \frac{4m(g + \ddot{q})}{ab\rho h} \sin \left(\frac{\pi n_1}{2} \right) \sin \omega_{f_1} t = 0, \quad (8)$$

$$\ddot{x}_2 + \left(\Omega_2^2 + \frac{\lambda_\infty}{\rho h} \right) x_2 + \alpha_3 x_2^3 + \alpha_4 x_2 x_1^2 + \frac{E_0 \tau_1^{\gamma_1}}{\rho h} D_{0+}^{\gamma_1} x_2 - \frac{\lambda_\infty \nu_\varepsilon}{\rho h} \varepsilon_\gamma^* (\tau_2^{\gamma_2}) x_2 + \frac{4m(g + \ddot{q})}{ab\rho h} \sin \left(\frac{\pi n_2}{2} \right) \sin \omega_{f_2} t = 0, \quad (9)$$

где α_i — коэффициенты, зависящие от номеров мод колебаний и геометрии пластинки [32], $\omega_{f_i} = \pi m_i V/a$ — круговые частоты, Ω_i^2 — квадраты собственных частот линейных колебаний пластины:

$$\Omega_i^2 = \frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)} \nabla^4 W_{m_i n_i}(x, y) = \frac{E\pi^4 h^2}{12\rho(1-\nu^2)b^4} (\xi^2 m_i^2 + n_i^2)^2,$$

$\xi = b/a$ и $\varepsilon_\gamma^* (\tau_2^{\gamma 2})$ — безразмерный дробный оператор Ю. Н. Работнова [36]:

$$\varepsilon_\gamma^* (\tau_2^{\gamma 2}) = \frac{1}{1 + \tau_2^{\gamma 2} D_{0+}^{\gamma 2}}. \quad (10)$$

Заметим, что уравнения для свободных колебаний могут быть получены из уравнений (8), (9) при $m = 0$.

Уравнения (8), (9) можно решать различными численными методами, однако ни один из них не позволяет качественно исследовать такие нелинейные явления, как сильная взаимосвязь мод колебаний с близкими значениями собственных частот, приводящая к различным типам внутреннего резонанса и перекачке энергии.

3. Метод решения. Разрешающие уравнения (8), (9) с операторами дробного порядка можно решить с помощью метода разложения дробного оператора [37], который является обобщением метода многих временных масштабов [38], т.е. одним из методов теории возмущений, впервые предложенным для разложения дробной производной в [39].

Предыдущий анализ затухающих свободных колебаний упругой пластины на вязкоупругом основании [30, 31] показал, что такая механическая система может испытывать нелинейные колебания под действием слабого вязкого демпфирования, которые могут сопровождаться внутренним резонансом 1:1, когда собственные частоты двух связанных мод близки друг к другу.

Профессор А. Nayfeh в своих знаменитых монографиях «Методы возмущений» [38] и «Нелинейные колебания» [40] подчеркивал, что при изучении внешних резонансов, «чтобы получить равномерно пригодное приближенное решение такой задачи, необходимо задать порядок малости возбуждения так, чтобы оно появлялось при появлении демпфирования и нелинейности». Для этого коэффициенты при силах демпфирования среды и основания представим в виде

$$\varepsilon\mu_1 = \frac{E_0\tau_1^{\gamma 1}}{\rho h}, \quad \varepsilon\mu_2 = \frac{\lambda_\infty\nu_\varepsilon}{\rho h}, \quad (11)$$

где ε — безразмерный малый параметр, μ_i — конечные величины, $i = 1, 2$.

Рассмотрим решение задачи для случая, когда нелинейность пластинки и вязкость амортизатора осциллирующей нагрузки задаются величинами порядка ε . Также будем считать, что ускорение $\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$ является малой величиной в сравнении с ускорением свободного падения g .

Тогда с учетом выражений (11) разрешающие уравнения для механической системы «пластина на вязкоупругом основании + подвижная осциллирующая нагрузка» могут быть записаны в виде

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \varepsilon \alpha_1 x_1^3 + \varepsilon \alpha_2 x_1 x_2^2 + \varepsilon \mu_1 D_{0+}^{\gamma_1} x_1 - \varepsilon \mu_2 \mathfrak{z}_\gamma^* (\tau_2^{\gamma_2}) x_1 + 4f_1 g \sin \omega_{f_1} t + 4\varepsilon f_1 \ddot{q} \sin \omega_{f_1} t = 0, \quad (12)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + \varepsilon \alpha_3 x_2^3 + \varepsilon \alpha_4 x_2 x_1^2 + \varepsilon \mu_1 D_{0+}^{\gamma_1} x_2 - \varepsilon \mu_2 \mathfrak{z}_\gamma^* (\tau_2^{\gamma_2}) x_2 + 4f_2 g \sin \omega_{f_2} t + 4\varepsilon f_2 \ddot{q} \sin \omega_{f_2} t = 0, \quad (13)$$

$$\ddot{q} + \omega_0^2 (1 + \varepsilon \tau_\sigma^\beta D_{0+}^\beta) q = \varepsilon \eta_2 \omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta D_{0+}^\beta) x_1 \sin \omega_{f_1} t + \varepsilon \eta_2 \omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta D_{0+}^\beta) x_2 \sin \omega_{f_2} t - g, \quad (14)$$

где

$$f_i = \frac{m}{ab\rho h} \eta_i, \quad \eta_i = \sin\left(\frac{\pi n_i}{2}\right), \quad i = 1, 2,$$

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$ — собственная частота упругого осциллятора; ω_1 и ω_2 — частоты колебаний механической системы «пластина + вязкоупругое основание»:

$$\omega_i^2 = \Omega_i^2 + \frac{\lambda_\infty}{\rho h}.$$

Для решения системы нелинейных уравнений (12), (13) и (14) будем использовать метод многих временных масштабов [38], согласно которому обобщенные перемещения $x_i(t)$ ($i = 1, 2$) и $q(t)$ можно представить в виде разложения по двум временным масштабам T_0 и T_1 :

$$x_i(t) = X_{i0}(T_0, T_1) + \varepsilon X_{i1}(T_0, T_1) + \dots, \quad (15)$$

$$q(t) = Q_0(T_0, T_1) + \varepsilon Q_1(T_0, T_1) + \dots, \quad (16)$$

где $T_n = \varepsilon^n t$ — новые независимые переменные: $T_0 = t$ — быстрое время, характеризующее движение с собственными частотами линейных колебаний, и $T_1 = \varepsilon t$ — медленное время, характеризующее модуляцию амплитуд и фаз нелинейных колебаний.

При решении уравнений движения следует учесть, что производные по времени первого и второго порядков раскладываются в ряд по малому параметру [37, 38] в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots, \quad (17)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 D_1^2 + \dots, \quad (18)$$

где $D_n = \partial/\partial T_n$, $n = 0, 1, \dots$

Для того чтобы решать нелинейные дифференциальные уравнения с дробными производными при помощи метода многих временных масштабов, Ю. А. Россихин и М. В. Шитикова в 1998 г. [39] ввели разложение дробной производной в следующем виде:

$$D_+^\gamma = \left(\frac{d}{dt}\right)^\gamma = (D_0 + \varepsilon D_1 + \dots)^\gamma = D_0^\gamma + \varepsilon \gamma D_0^{\gamma-1} D_1 + \dots \quad (19)$$

Разложение безразмерного дробного оператора Ю. Н. Работнова (10) в ряд Тейлора по малому параметру имеет вид [41]:

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_\gamma^* (\tau^\gamma) &= \frac{1}{1 + \tau^\gamma D_{0+}^\gamma} = (1 + \tau^\gamma D_{0+}^\gamma)^{-1} = [1 + \tau^\gamma (D_0^\gamma + \varepsilon \gamma D_0^{\gamma-1} D_1)]^{-1} = \\ &= (1 + \tau^\gamma D_0^\gamma)^{-1} - \varepsilon (1 + \tau^\gamma D_0^\gamma)^{-2} \tau^\gamma \gamma D_0^{\gamma-1} D_1 + \dots \quad (20) \end{aligned}$$

Подставляя выражения (15) и (16) с учетом соотношений (17), (18), (19) и (20) в уравнения (12)–(14) после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε к нулю, приходим к системе рекуррентных уравнений различного порядка:

– порядка ε^0 :

$$D_0^2 X_{10} + \omega_1^2 X_{10} = -4f_1 g \sin(\omega_{f_1} T_0), \quad (21)$$

$$D_0^2 X_{20} + \omega_2^2 X_{20} = -4f_2 g \sin(\omega_{f_2} T_0), \quad (22)$$

$$D_0^2 Q_0 + \omega_0^2 Q_0 = -g, \quad (23)$$

– порядка ε :

$$\begin{aligned} D_0^2 X_{11} + \omega_1^2 X_{11} &= -2D_0 D_1 X_{10} - (\mu_1 D_0^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} D_0^{\gamma_2})^{-1}) X_{10} - \\ &- \alpha_1 X_{10}^3 - \alpha_2 X_{10} X_{20}^2 + 4D_0^2 Q_0 f_1 \sin(\omega_{f_1} T_0), \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_0^2 X_{21} + \omega_2^2 X_{21} &= -2D_0 D_1 X_{20} - (\mu_1 D_0^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} D_0^{\gamma_2})^{-1}) X_{20} - \\ &- \alpha_3 X_{20}^3 - \alpha_4 X_{20} X_{10}^2 + 4D_0^2 Q_0 f_2 \sin(\omega_{f_2} T_0), \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_0^2 Q_1 + \omega_0^2 Q_1 &= -2D_0 D_1 Q_0 - \omega_0^2 \tau_\sigma^\beta D_0^\beta Q_0 + \\ &+ \eta_1 \omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta D_0^\beta) X_{10} \sin \omega_{f_1} t + \eta_2 \omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta D_0^\beta) X_{20} \sin \omega_{f_2} t. \quad (26) \end{aligned}$$

Решение линейных уравнений (21)–(23) имеет вид

$$\begin{aligned} X_{j0} &= A_j(T_1) \exp(i\omega_j T_0) + \Lambda_j \exp(i\omega_{f_j} T_0) + \\ &+ \bar{A}_j(T_1) \exp(-i\omega_j T_0) + \bar{\Lambda}_j \exp(-i\omega_{f_j} T_0), \quad (27) \end{aligned}$$

$$Q_0 = A_3(T_1) \exp(i\omega_0 T_0) + \bar{A}_3(T_1) \exp(-i\omega_0 T_0) + C, \quad (28)$$

где $A_i(T_1)$ – пока неизвестные функции, $\bar{A}_i(T_1)$ – комплексно-сопряженные функции с $A_i(T_1)$, $i = 1, 2, 3$; $\Lambda_j = \frac{4f_j g}{2i(\omega_{f_j}^2 - \omega_j^2)}$, $\bar{\Lambda}_j$ – константа, сопряженная с Λ_j , $j = 1, 2$; $C = -g/\omega_0^2$.

Подставляя выражения (27) и (28) в уравнения (24)–(26), получим:

$$\begin{aligned} D_0^2 X_{11} + \omega_1^2 X_{11} &= -2i\omega_1 D_1 A_1 \exp(i\omega_1 T_0) - \\ &- [\mu_1 (i\omega_1)^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} (i\omega_1)^{\gamma_2})^{-1}] A_1 \exp(i\omega_1 T_0) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - [\mu_1(i\omega_{f_1})^{\gamma_1} - \mu_2(1 + \tau_2^{\gamma_2}(i\omega_{f_1})^{\gamma_2})^{-1}] \Lambda_1 \exp(i\omega_{f_1}T_0) - \\
 & \quad - \alpha_1 [\Lambda_1 \exp(3i\omega_{f_1}T_0) + 3\bar{\Lambda}_1 \exp(i\omega_{f_1}T_0)] \Lambda_1^2 - \\
 & \quad - 6\alpha_1 A_1 \Lambda_1^2 \exp(i\omega_1 T_0) - 6\alpha_1 A_1 \bar{A}_1 \Lambda_1 \exp(i\omega_{f_1}T_0) - \\
 & - \alpha_1 \{ 3A_1^2 \Lambda_1 \exp[(2\omega_1 + \omega_{f_1})T_0] + 3\bar{A}_1^2 \Lambda_1 \exp[(\omega_{f_1} - 2\omega_1)T_0] + \\
 & + 3A_1 \Lambda_1^2 \exp[(\omega_1 + 2\omega_{f_1})T_0] + 3A_1 \bar{\Lambda}_1^2 \exp[(\omega_1 - 2\omega_{f_1})T_0] \} - \\
 & \quad - \alpha_1 [A_1 \exp(3i\omega_1 T_0) + 3\bar{A}_1 \exp(i\omega_1 T_0)] A_1^2 - \\
 & \quad - \alpha_2 \{ A_2^2 \exp[(\omega_1 + 2\omega_2)T_0] + 2A_2 \bar{A}_2 \exp(i\omega_1 T_0) + \\
 & + \bar{A}_2^2 \exp[i(\omega_1 - 2\omega_2)T_0] + 2\Lambda_2 \bar{\Lambda}_2 \exp(i\omega_1 T_0) + \text{NCT} \} A_1 + \\
 & \quad + 2f_1 i\omega_0^2 \exp[i(\omega_{f_1} + \omega_0)T_0] A_3 + \text{CC}, \quad (29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_0^2 X_{21} + \omega_2^2 X_{21} & = -2i\omega_2 D_1 A_2 \exp(i\omega_2 T_0) - \\
 & - [\mu_1(i\omega_2)^{\gamma_1} - \mu_2(1 + \tau_2^{\gamma_2}(i\omega_2)^{\gamma_2})^{-1}] A_2 \exp(i\omega_2 T_0) - \\
 & - [\mu_1(i\omega_{f_2})^{\gamma_1} - \mu_2(1 + \tau_2^{\gamma_2}(i\omega_{f_2})^{\gamma_2})^{-1}] \Lambda_2 \exp(i\omega_{f_2} T_0) - \\
 & \quad - \alpha_3 [\Lambda_2 \exp(3i\omega_{f_2} T_0) + 3\bar{\Lambda}_2 \exp(i\omega_{f_2} T_0)] \Lambda_2^2 - \\
 & \quad - 6\alpha_3 A_2 \Lambda_2^2 \exp(i\omega_2 T_0) - 6\alpha_3 A_2 \bar{A}_2 \Lambda_2 \exp(i\omega_{f_2} T_0) - \\
 & - \alpha_3 \{ 3A_2^2 \Lambda_2 \exp[(2\omega_2 + \omega_{f_2})T_0] + 3\bar{A}_2^2 \Lambda_2 \exp[(\omega_{f_2} - 2\omega_2)T_0] + \\
 & + 3A_2 \Lambda_2^2 \exp[(\omega_2 + 2\omega_{f_2})T_0] + 3A_2 \bar{\Lambda}_2^2 \exp[(\omega_2 - 2\omega_{f_2})T_0] \} - \\
 & \quad - \alpha_3 [A_2 \exp(3i\omega_2 T_0) + 3\bar{A}_2 \exp(i\omega_2 T_0)] A_2^2 - \\
 & \quad - \alpha_4 \{ A_1^2 \exp[(\omega_2 + 2\omega_1)T_0] + 2A_1 \bar{A}_1 \exp(i\omega_2 T_0) + \\
 & + \bar{A}_1^2 \exp[i(\omega_2 - 2\omega_1)T_0] + 2\Lambda_1 \bar{\Lambda}_1 \exp(i\omega_2 T_0) + \text{NCT} \} A_2 + \\
 & \quad + 2f_2 i\omega_0^2 \exp[i(\omega_{f_2} + \omega_0)T_0] A_3 + \text{CC}, \quad (30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_0^2 Q_1 + \omega_0^2 Q_1 & = -2i\omega_0 D_1 A_3 \exp(i\omega_0 T_0) - \omega_0^2 \tau_\sigma^\beta (i\omega_0)^\beta A_3 \exp(i\omega_0 T_0) - \\
 & - \frac{1}{2} \eta_1 i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_1)^\beta) A_1 \exp[i(\omega_1 + \omega_{f_1})T_0] - \\
 & \quad - \frac{1}{2} \eta_1 i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_{f_1})^\beta) \Lambda_1 \exp(2i\omega_{f_1} T_0) + \\
 & \quad + \frac{1}{2} \eta_1 i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_1)^\beta) A_1 \exp[i(\omega_1 - \omega_{f_1})T_0] + \\
 & + \frac{1}{2} \eta_1 i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_{f_1})^\beta) \Lambda_1 - \frac{1}{2} \eta_2 i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_2)^\beta) A_2 \exp[i(\omega_2 + \omega_{f_2})T_0] - \\
 & \quad - \frac{1}{2} \eta_2 i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_{f_2})^\beta) \Lambda_2 \exp(2i\omega_{f_2} T_0) + \\
 & \quad + \frac{1}{2} \eta_2 i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_2)^\beta) A_2 \exp[i(\omega_2 - \omega_{f_2})T_0] + \\
 & \quad + \frac{1}{2} \eta_2 i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_{f_2})^\beta) \Lambda_2 + \text{CC}, \quad (31)
 \end{aligned}$$

где CC означает комплексно-сопряженную часть к предыдущим членам в уравнении, NCT — невековые члены уравнения.

Анализ выражений (29)–(31) показывает, что возможен случай возникновения внутреннего резонанса один к одному, когда какие-либо две частоты колебаний механической системы «пластина + вязкоупругое основание» близки друг к другу:

$$\omega_1 = \omega_2, \quad \text{и отсюда} \quad \Omega_1 = \Omega_2. \quad (32)$$

Из уравнений (29)–(31) следует, что внутренний резонанс может сопровождаться внешним резонансом при выполнении одного из следующих условий:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \omega_i = \omega_0 + \omega_{fi}, \\ (2) \quad & \omega_i = \omega_0 - \omega_{fi}. \end{aligned} \quad (33)$$

Условие устранения появления вековых членов в уравнениях (29)–(31) с учетом соотношений (32) и (33) приводит к системе трех определяющих уравнений:

$$\begin{aligned} 2i\omega_1 D_1 A_1 + [\mu_1(i\omega_1)^{\gamma_1} - \mu_2(1 + \tau_2^{\gamma_2}(i\omega_1)^{\gamma_2})^{-1}] A_1 + 3\alpha_1 A_1^2 \bar{A}_1 + \\ + 6\alpha_1 A_1 \Lambda_1^2 + \alpha_2 \bar{A}_1 A_2^2 + 2\alpha_2 A_1 A_2 \bar{A}_2 + 2\alpha_2 \Lambda_2 \bar{\Lambda}_2 A_1 + 2f_1 i\omega_0^2 A_3 = 0, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} 2i\omega_1 D_1 A_2 + [\mu_1(i\omega_2)^{\gamma_1} - \mu_2(1 + \tau_2^{\gamma_2}(i\omega_2)^{\gamma_2})^{-1}] A_2 + 3\alpha_3 A_2^2 \bar{A}_2 + \\ + 6\alpha_3 A_2 \Lambda_2^2 + \alpha_4 \bar{A}_2 A_1^2 + 2\alpha_4 A_2 A_1 \bar{A}_1 + 2\alpha_4 \Lambda_1 \bar{\Lambda}_1 A_2 + 2f_2 i\omega_0^2 A_3 = 0, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} 2i\omega_0 D_1 A_3 + \omega_0^2 \tau_\sigma^\beta (i\omega_0)^\beta A_3 - \frac{1}{2} \eta_1 i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_1)^\beta) A_1 - \\ - \frac{1}{2} \eta_2 i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_2)^\beta) A_2 = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Умножая (34) на \bar{A}_1 , (35) на \bar{A}_2 и (36) на \bar{A}_3 соответственно, складывая и вычитая сопряженные к ним уравнения, а также представляя функции в полярном виде

$$A_i = a_i e^{i\phi_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $a_i = a_i(T_1)$ и $\phi_i = \phi_i(T_1)$ — функции амплитуд и фаз колебаний, приходим к следующей системе уравнений:

$$(a_1^2) \cdot + s_1 a_1^2 + \omega_1^{-1} \alpha_2 a_1^2 a_2^2 \sin \delta + 2f_1 \omega_0^2 \omega_1^{-1} a_1 a_3 \cos \beta_1 = 0, \quad (37)$$

$$(a_2^2) \cdot + s_2 a_2^2 - \omega_2^{-1} \alpha_4 a_1^2 a_2^2 \sin \delta + 2f_2 \omega_0^2 \omega_2^{-1} a_2 a_3 \cos \beta_2 = 0, \quad (38)$$

$$(a_3^2) \cdot + s_3 a_3^2 - \frac{1}{2} \eta_1 \omega_0 a_1 a_3 (l_1 + \cos \beta_1) - \frac{1}{2} \eta_2 \omega_0 a_2 a_3 (l_2 + \cos \beta_2) = 0, \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 - \frac{1}{2} \lambda_1 - \frac{3}{2} \alpha_1 \omega_1^{-1} (a_1^2 + 2\Lambda_1^2) - \alpha_2 \omega_1^{-1} (a_2^2 + \Lambda_2 \bar{\Lambda}_2) - \\ - \frac{1}{2} \alpha_2 \omega_1^{-1} a_2^2 \cos \delta - f_1 \omega_0^2 (\omega_1 a_1)^{-1} a_3 \sin \beta_1 = 0, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_2 - \frac{1}{2}\lambda_2 - \frac{3}{2}\alpha_3\omega_2^{-1}(a_2^2 + 2\Lambda_2^2) - \alpha_4\omega_2^{-1}(a_1^2 + \Lambda_1\bar{\Lambda}_1) - \\ - \frac{1}{2}\alpha_4\omega_2^{-1}a_1^2 \cos \delta - f_2\omega_0^2(\omega_2 a_2)^{-1}a_3 \sin \beta_2 = 0, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\dot{\phi}_3 - \frac{1}{2}\lambda_3 - \frac{1}{4}\eta_1\omega_0 a_1 a_3^{-1}(p_1 + \sin \beta_1) - \frac{1}{4}\eta_2\omega_0 a_2 a_3^{-1}(p_2 + \sin \beta_2) = 0, \quad (42)$$

где $\delta = 2(\phi_2 - \phi_1)$; $\beta_1 = \phi_1 - \phi_3$, $\beta_2 = \phi_2 - \phi_3$ — сдвиги фаз колебаний;

$$\begin{aligned} s_i &= \mu_1\omega_i^{\gamma_1-1} \sin \psi_1 + \mu_2\omega_i^{-1} R_i \sin \Phi_i, \\ \lambda_i &= \mu_1\omega_i^{\gamma_1-1} \cos \psi_1 - \mu_2\omega_i^{-1} R_i \cos \Phi_i, \\ l_i &= \omega_i^\beta \tau_\sigma^\beta \cos(\theta + \beta_i), \quad p_i = \omega_i^\beta \tau_\sigma^\beta \sin(\theta + \beta_i), \\ R_i &= \sqrt{1 + 2(\tau_2\omega_i)^{\gamma_2} \cos \psi_2 + (\tau_2\omega_i)^{2\gamma_2}}, \\ \operatorname{tg} \Phi_i &= \frac{(\tau_2\omega_i)^{\gamma_2} \sin \psi_2}{1 + (\tau_2\omega_i)^{\gamma_2} \cos \psi_2}, \quad \psi_i = \frac{1}{2}\pi\gamma_i, \quad i = 1, 2; \\ s_3 &= \omega_0^{\beta+1} \tau_\sigma^\beta \sin \theta, \quad \lambda_3 = \omega_0^{\beta+1} \tau_\sigma^\beta \cos \theta, \quad \theta = \frac{1}{2}\pi\beta. \end{aligned} \quad (43)$$

Система уравнений (37)–(42) является определяющей для амплитуд и фаз нелинейных вынужденных колебаний шарнирно опертой по контуру упругой пластинки на вязкоупругом основании, свойства которого описываются моделью стандартного линейного твердого тела с дробными производными, под действием подвижной подрессоренной нагрузки в виде вязкоупругого осциллятора, демпфирующие свойства которого описываются дробной производной.

Согласно определяющим уравнениям (37)–(42) нелинейные совместные колебания механической системы «упругая пластинка на вязкоупругом основании + подвижная подрессоренная нагрузка» в вязкоупругой окружающей среде определяются коэффициентами s_i и λ_i , $i = 1, 2, 3$, см. (43). Данные коэффициенты при $0 < \gamma_i \leq 1$ и $0 < \beta \leq 1$ зависят от собственных частот двух мод колебаний ω_i , связанных условием внутреннего резонанса (32), и реологических параметров основания и окружающей среды, включая два параметра дробности γ_1 и γ_2 .

Заметим, что в уравнениях (37)–(39) вторые слагаемые отвечают за процесс диссипации энергии, при этом при $0 < \gamma_i \leq 1$ и $0 < \beta \leq 1$ коэффициенты демпфирования s_i зависят от частот колебаний ω_i и ω_0 , что согласуется с гипотезой модального демпфирования. При $\gamma_i = 0$ и $\beta = 0$ коэффициенты демпфирования обращаются в ноль $s_i = 0$.

В частном случае, когда время релаксации τ_2 материала основания достаточно велико, соотношения (43) принимают вид

$$\begin{aligned} R_i &= (\tau_2\omega_i)^{\gamma_2}, \quad \Phi_i = \Phi = \psi_2, \quad i = 1, 2; \\ \psi_j &= \pi\gamma_j/2, \quad j = 1, 2; \\ s_i &= \mu_1\omega_i^{\gamma_1-1} \sin \psi_1 + \mu_2\omega_i^{\gamma_2-1} \sin \psi_2, \\ \lambda_i &= \mu_1\omega_i^{\gamma_1-1} \cos \psi_1 - \mu_2\omega_i^{\gamma_2-1} \cos \psi_2. \end{aligned} \quad (44)$$

Заметим, что в этом случае соотношения (44) стремятся к соответствующим соотношениям, полученным в [30] при моделировании свойств грунтового основания с помощью модели Кельвина–Фойгта с дробной производной.

4. Численные исследования. Полученная система уравнений (37)–(42) была решена численно при помощи метода Рунге–Кутты четвертого порядка. В качестве примера рассматривалась пластинка со следующими геометрическими параметрами: $a = b = 10$ м, $h = 0.3$ м, $m_1 = n_2 = 1$, $m_2 = n_1 = 3$. Плотность и упругие постоянные материала пластинки принимались следующими: $\rho = 2400$ кг/м³, $E = 3.25 \cdot 10^{10}$ Па и $\nu = 0.3$.

Подрессоренная нагрузка в виде вязкоупругого осциллятора, свойства которого описываются моделью с дробной производной, движется с постоянной скоростью $V = 16.66$ м/с вдоль оси x . Параметры осциллятора приняты следующими: $q_0 = 0.5$, $\beta = 0.5$. Вынужденные колебания пластинки изучались для трех случаев величины массы осциллятора: $m = 1800$ кг (рис. 2, b), $m = 3600$ кг (рис. 2, c), $m = 5400$ кг (рис. 2, d).

Пластинка находится в условиях внутреннего резонанса 1:1 при $\omega_1 = \omega_2 = 105.48$ с⁻¹ в сочетании с внешним резонансом:

$$\omega_2 = \omega_{f_2} + \omega_0 = \frac{3.14 \cdot 3 \cdot 16.66}{10} + 89.79 = 105.48 \text{ с}^{-1}.$$

На рис. 2 наглядно показан обмен энергией между взаимодействующими модами нелинейных свободных ($m = 0$) и вынужденных ($m \neq 0$) ко-

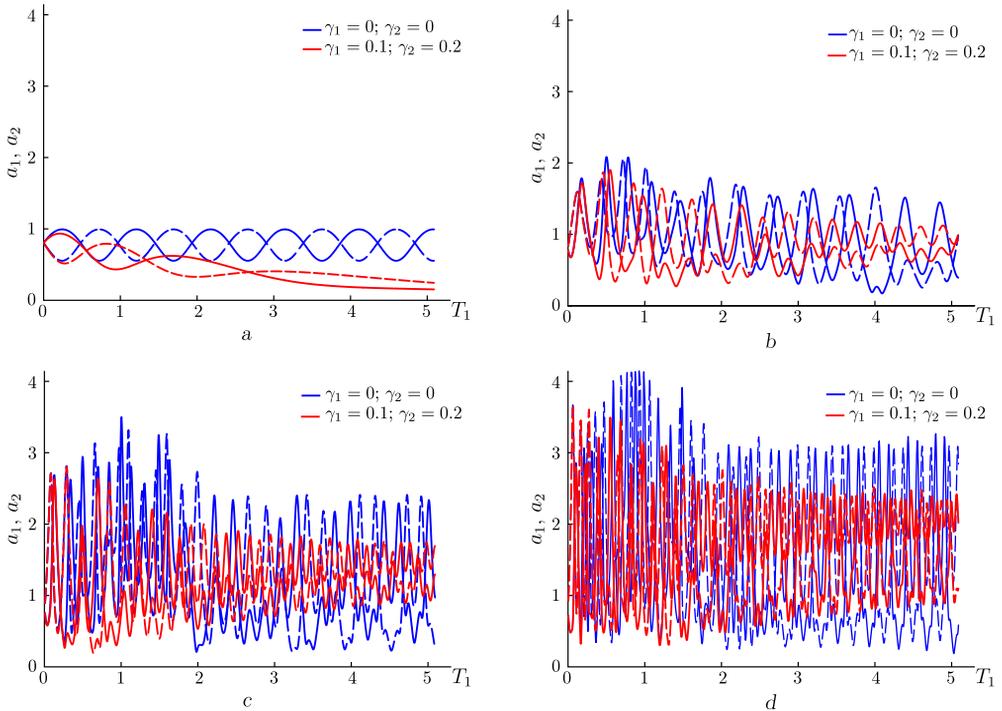


Рис. 2. (online в цвете) Зависимость амплитуд нелинейных свободных $m = 0$ (a) и вынужденных колебаний от времени T_1 для шарнирно опертой пластинки при воздействии подвижной осциллирующей нагрузки: $m = 1800$ кг (b), $m = 3600$ кг (c) и $m = 5400$ кг (d); сплошная линия — a_2 , пунктирная линия — a_1

[Figure 2. (color online) The T_1 -dependence of the amplitudes of nonlinear free $m = 0$ (a) and force driven vibrations for simply supported plate under action of moving oscillator: $m = 1800$ kg (b), $m = 3600$ kg (c), and $m = 5400$ kg (d); solid line — a_2 , dashed line — a_1]

лебаний шарнирно опертой пластины на упругом ($\gamma_2 = 0$) и вязкоупругом ($\gamma_2 \neq 0$) основании по модели стандартного линейного твердого тела для различных значений подрессоренной массы. На рис. 2 синим цветом показаны амплитуды колебаний при отсутствии сил сопротивления среды и основания ($\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$), красным цветом изображены амплитуды колебаний, огибающие которых затухают по экспоненциальному закону при $\gamma_1 = 0.1, \gamma_2 = 0.2$. Увеличение величины нагрузки приводит к увеличению амплитуд колебаний пластины и значительному уменьшению периода колебаний.

Зависимость амплитуд нелинейных колебаний от значений дробных параметров окружающей среды γ_1 и вязкоупругого основания γ_2 представлена на рис. 3. С увеличением параметров дробности вязкоупругого основания и окружающей среды затухание колебаний усиливается.

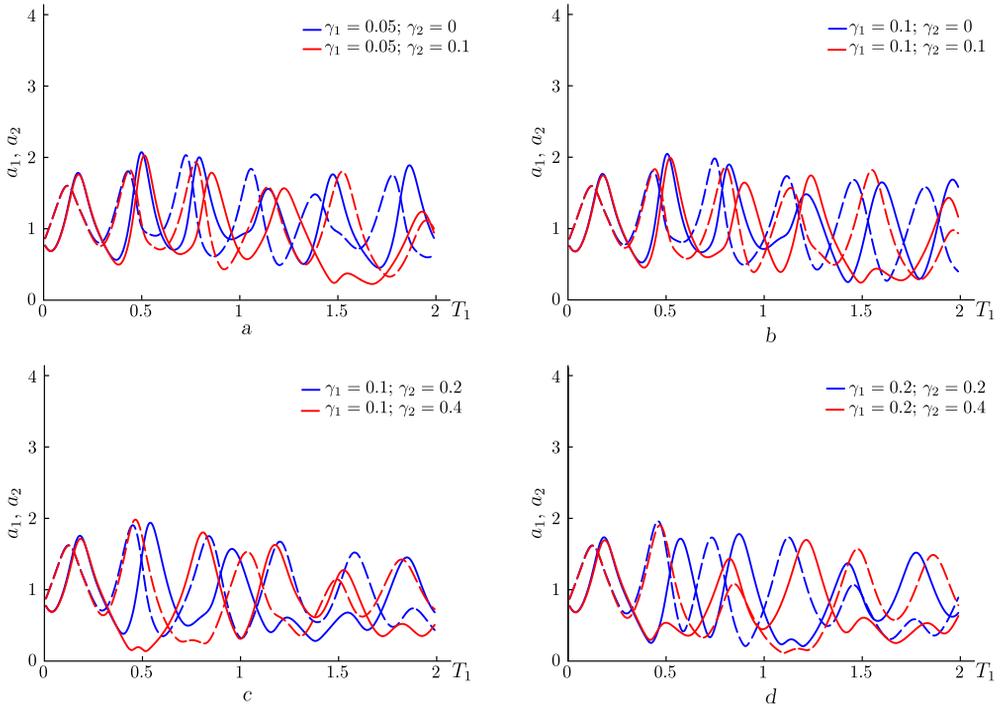


Рис. 3. (online в цвете) Зависимость амплитуд нелинейных вынужденных колебаний от времени T_1 для пластинки на вязкоупругом основании при воздействии подвижной подрессоренной нагрузки ($m = 1800$ кг) для различных значений параметров дробности; сплошная линия — a_2 , пунктирная линия — a_1

[Figure 3. (color online) The T_1 -dependence of the amplitudes of nonlinear force driven vibrations of the plate on viscoelastic foundation under action of moving oscillator ($m = 1800$ kg) for different values of fractional parameters; solid line — a_2 , dashed line — a_1]

5. Заключение. Решена задача о нелинейных колебаниях шарнирно опертой упругой пластинки на вязкоупругом основании на основе обобщенной модели Фусса—Винклера под действием подвижной осциллирующей нагрузки. Демпфирующие свойства основания и окружающей среды, в которой происходят колебания, описываются вязкоупругой моделью стандартного линейного твердого тела и моделью Кельвина—Фойгта с дробными производными Римана—Лиувилля соответственно. Подвижная нагрузка моделируется при

помощи вязкоупругого осциллятора Кельвина—Фойгта с дробной производной, который движется с постоянной скоростью вдоль пластины. Получены разрешающие уравнения для определения нелинейных амплитуд и фаз вынужденных колебаний в случае внутреннего резонанса 1:1, сопровождаемого внешним резонансом, для случая, когда вязкость осциллятора считается малой величиной. Полученная система уравнений позволяет не только управлять демпфирующими свойствами окружающей среды и основания за счет изменения параметров дробности, но также регулировать параметры демпфирования внешней нагрузки, что расширяет спектр задач применимости данного решения. Данная система уравнений решена численно при помощи метода, разработанного в [42]. Численный анализ показал, что в рассматриваемой системе «пластина на вязкоупругом основании + подвижная осциллирующая нагрузка» происходит перекачка энергии между взаимодействующими модами колебаний. Представлено сравнение результатов численных исследований для различных значений внешней нагрузки, а также показана зависимость амплитуд нелинейных колебаний от значений параметров дробности окружающей среды и основания.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке РФФ (проект № 21–19–00634).

Библиографический список

1. Герасимов С. И., Ерофеев В. И., Колесов Д. А., Лисенкова Е. Е. Динамика деформируемых систем, несущих движущиеся нагрузки (обзор публикаций и диссертационных исследований) // *Вестник научно-технического развития*, 2021. № 160. С. 25–47. EDN: HJJKPJ. DOI: <https://doi.org/10.18411/vntr2021-160-3>.
2. Fryba L. *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads* / Mechanics of Structural Systems. vol. 1. Springer: Dordrecht, 1973. 484+xxvii pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-011-9685-7>.
3. Younesian D., Hosseinkhani A., Askari H., Esmailzadeh E. Elastic and viscoelastic foundations: a review on linear and nonlinear vibration modeling and applications // *Nonlinear Dyn.*, 2019. vol. 97, no. 1. pp. 853–895. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-019-04977-9>.
4. Rajabi K., Kargarnovin M. H., Gharini M. Dynamic analysis of a functionally graded simply supported Euler–Bernoulli beam subjected to a moving oscillator // *Acta Mech.*, 2013. vol. 224, no. 2. pp. 425–446. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-012-0769-y>.
5. Almbaidin A., Abu-Alshaikh I. Vibration of functionally graded beam subjected to moving oscillator using Caputo–Fabrizio fractional derivative model // *Romanian Journal of Acoustics and Vibration*, 2019. vol. 16, no. 2. pp. 137–146.
6. Sawant V. A., Patil V. A., Deb K. Effect of vehicle–pavement interaction on dynamic response of rigid pavements // *Geomech. Geoeng.*, 2011. vol. 6, no. 1. pp. 31–39. DOI: <https://doi.org/10.1080/17486025.2010.521591>.
7. Patil V. A., Sawant V. A., Deb K. Finite element analysis of rigid pavement on a nonlinear two parameter foundation model // *Int. J. Geotech. Eng.*, 2012. vol. 6, no. 3. pp. 275–286. DOI: <https://doi.org/10.3328/IJGE.2012.06.03.274-286>.
8. Ding H., Yang Y., Chen L.-Q., Yang S.-P. Vibration of vehicle–pavement coupled system

- based on a Timoshenko beam on a nonlinear foundation // *J. Sound Vib.*, 2014. vol. 333, no. 24. pp. 6623–6636. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.07.016>.
9. Yang S., Chen L., Li S. Modeling and dynamic analysis of vehicle-road coupled systems / *Dynamics of Vehicle-Road Coupled System*. Berlin: Springer, 2015. pp. 215–250. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-45957-7_7.
 10. Meshkov S. I., Pachevskaya G. N., Postnikov V. S., Rossikhin Yu. A. Integral representations of ε_γ -functions and their application to problems in linear viscoelasticity // *Int. J. Eng. Sci.*, 1971. vol. 9, no. 4. pp. 387–398. EDN: ZYMWGP. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(71\)90059-0](https://doi.org/10.1016/0020-7225(71)90059-0).
 11. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids // *Appl. Mech. Rev.*, 1997. vol. 57, no. 1. pp. 15–67. EDN: LELUNP. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3101682>.
 12. Огородников Е. Н., Яшагин Н. С. Вынужденные колебания дробных осцилляторов / *Труды пятой Всероссийской научной конференции с международным участием (29–31 мая 2008 г.)*. Часть 1: Математические модели механики, прочности и надёжности элементов конструкций / Матем. моделирование и краев. задачи. Самара: СамГТУ, 2008. С. 215–221. EDN: TGYVDN.
 13. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. New approach for the analysis of damped vibrations of fractional oscillators // *Shock and Vibration*, 2009. vol. 16, no. 4, 387676. EDN: MWZYVP. DOI: <https://doi.org/10.1155/2009/387676>.
 14. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: Novel trends and recent results // *Appl. Mech. Rev.*, 2010. vol. 63, no. 1, 010801. EDN: CUFMBA. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4000563>.
 15. Огородников Е. Н., Радченко В. П., Яшагин Н. С. Реологические модели вязкоупругого тела с памятью и дифференциальные уравнения дробных осцилляторов // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 1(22). С. 255–268. EDN: NUPPZB. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu932>.
 16. Паровик Р. И., Зуннунов Р. Т. Анализ вынужденных колебаний дробного осциллятора // *Пробл. механ.*, 2019. № 4. С. 20–23. EDN: GREHHQ.
 17. Kerr A. D. Elastic and viscoelastic foundation models // *J. Appl. Mech.*, 1964. vol. 31, no. 3. pp. 491–498. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3629667>.
 18. Winkler E. *Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit*. Prague: Dominicius, 1867. 388 pp. (In German)
 19. Zimmerman H. *Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues*. Berlin: Verlag von Ernst & Korn, 1888. 326 pp.
 20. Фусс Н. И. Опыт теории о сопротивлении причиняемом дорогами всякого рода четырёхколёсным и двухколёсным повозкам, с определением обстоятельств, при которых одни из сих повозок полезнее других / *Академические сочинения, выбранные из первого тома Деяний Императорской Академии наук*, Ч. 1. СПб., 1801. С. 373–422.
 21. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. *Балки, плиты, оболочки на упругом основании*. М.: Физ.-мат. лит., 1960. 492 с.
 22. Цытович Н. А. *Механика грунтов*. М., 1963. 637 с.
 23. Lai J., Mao S., Qiu J., Fan H., Zhang Q., Hu Z., Chen J. Investigation progresses and applications of fractional derivative model in geotechnical engineering // *Math. Probl. Eng.*, 2016. vol. 2016, no. 3, 9183296. DOI: <https://doi.org/10.1155/2016/9183296>.
 24. Taheri M. R., Ting E. C. Dynamic response of plate to moving loads: Structural impedance method // *Comput. Struct.*, 1989. vol. 33, no. 6. pp. 1379–1393. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(89\)90478-1](https://doi.org/10.1016/0045-7949(89)90478-1).
 25. Zaman M., Taheri M. R., Alvappillai A. Dynamic response of a thick plate on viscoelastic foundation to moving loads // *Int. J. Numer. Analytical Methods Geomech.*, 1991. vol. 15, no. 9. pp. 627–647. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.1610150903>.
 26. Yang S., Li S., Lu Y. Investigation on dynamical interaction between a heavy vehicle and road pavement // *Int. J. Vehicle Mech. Mob.*, 2010. vol. 48, no. 8. pp. 923–944. DOI: <https://doi.org/10.1080/00423110903243166>.

27. Li S., Yang S., Chen L. A nonlinear vehicle-road coupled model for dynamics research // *J. Comput. Nonlinear Dynam.*, 2013. vol. 8, no. 2, 021001. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4006784>.
28. Amabili M. Nonlinear vibrations of viscoelastic rectangular plates validation // *J. Sound Vib.*, 2016. vol. 362. pp. 142–156. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.09.035>.
29. Amabili M. Nonlinear damping in nonlinear vibrations of rectangular plates: Derivation from viscoelasticity and experimental validation // *J. Mech. Phys. Solids*, 2018. vol. 118. pp. 275–292. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2018.06.004>.
30. Шитикова М. В., Канду В. В. Анализ нелинейных колебаний упругой пластинки на вязкоупругом основании при наличии внутреннего резонанса один-к-одному // *Изв. вузов. Строительство*, 2020. № 3. С. 5–22. EDN: VUGFIN.
31. Shitikova M. V., Krusser A. I. Nonlinear vibrations of an elastic plate on a viscoelastic foundation modeled by the fractional derivative standard linear solid model / *EURODYN 2020, Proc. of the XI International Conference on Structural Dynamics*. Athens: National Techn. Univ. of Athens, 2020. pp. 355–368. EDN: UAGFCT. DOI: <https://doi.org/10.47964/1120.9028.20091>.
32. Shitikova M. V., Krusser A. I. Force driven vibrations of nonlinear plates on a viscoelastic Winkler foundation under the harmonic moving load // *Int. J. Comput. Civil Struct. Eng.*, 2021. vol. 17, no. 4. pp. 161–180. EDN: QLTGPZ. DOI: <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2021-17-4-161-180>.
33. Вольмир А. С. *Нелинейная динамика пластинок и оболочек*. М.: Наука, 1972. 432 с.
34. Самко С. Г. Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
35. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Fractional operator models of viscoelasticity / *Encyclopedia of Continuum Mechanics*. Berlin: Springer, 2020. pp. 971–982. DOI: <https://doi.org/QFEFJE>. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-55771-6_77.
36. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Centennial jubilee of Academician Rabotnov and contemporary handling of his fractional operator // *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2014. vol. 17, no. 3. pp. 674–683. EDN: UELRWP. DOI: <https://doi.org/10.2478/s13540-014-0192-2>.
37. Shitikova M. V. The fractional derivative expansion method in nonlinear dynamic analysis of structures // *Nonlinear Dyn.*, 2020. vol. 99, no. 1. pp. 109–122. EDN: JRPYST. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05055-w>.
38. Nayfeh A. H. *Perturbation Technique*. New York: Wiley, 1973. 441 pp.
39. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Application of fractional calculus for analysis of nonlinear damped vibrations of suspension bridges // *J. Eng. Mech.*, 1998. vol. 124, no. 9. pp. 1029–1036. EDN: LEXPLL. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1998\)124:9\(1029\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1998)124:9(1029)).
40. Nayfeh A. H., Mook D. T. *Nonlinear Oscillations*: Wiley, 1995. 705 pp.
41. Rossikhin Yu. A., Krusser A. I., Shitikova M. V. Impact response of a nonlinear viscoelastic auxetic doubly curved shallow shell / *ICSV 2017, Proc. of the 24th International Congress on Sound and Vibration*. London: Int. Inst. Acoust. Vibration, 2017. EDN: ZGNMET.
42. Shitikova M. V., Kandu V. V. Force driven vibrations of fractionally damped plates subjected to primary and internal resonances // *Eur. Phys. J. Plus*, 2019. vol. 134, no. 9, 423. EDN: GLZXP. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjp/i2019-12812-x>.

MSC: 74D05, 74G10, 74S40

Numerical analysis of nonlinear vibrations of a plate on a viscoelastic foundation under the action of a moving oscillating load based on models with fractional derivatives

A. I. Krusser¹, M. V. Shitikova^{1,2}¹ Voronezh State Technical University,
84, 20 let Oktyabrya st., Voronezh, 394006, Russian Federation.² National Research Moscow State University of Civil Engineering,
26, Yaroslavskoye sh., Moscow, 129337, Russian Federation.

Abstract

Aim. In the present paper, nonlinear vibrations of an elastic simply supported plate on a viscoelastic foundation under the action of a moving oscillating load are studied in the case of the internal resonance 1:1 accompanied by the external resonance. The properties of the viscoelastic foundation are given via the generalized Fuss–Winkler model with the damping term described by the standard linear solid model with the Riemann–Liouville fractional derivatives. The external load is presented by linear viscoelastic oscillator based on the Kelvin–Voigt model with a fractional derivative in the case when the viscosity of the oscillator is considered to be small value. The dynamic behavior of the plate is described by a set of nonlinear ordinary differential equations of the second order in time with respect to generalized displacements. **Methods.** To solve the resulting set of equations, the method of multiple time scales is used in combination with the method of expansion of the fractional derivative in a Taylor series. **Results.** Resolving equations for determining of the nonlinear amplitudes and phases of force driven vibrations of the plate are obtained. The governing set of equations allows one to control not only the damping properties of the environment

Mechanics of Solids

Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Krusser A. I., Shitikova M. V. Numerical analysis of nonlinear vibrations of a plate on a viscoelastic foundation under the action of a moving oscillating load based on models with fractional derivatives, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 4, pp. 694–714. EDN: DOBLOB. DOI: [10.14498/vsgtu1957](https://doi.org/10.14498/vsgtu1957) (In Russian).

Authors' Details:

Anastasiya I. Krusser  <https://orcid.org/0000-0001-6203-2495>

Postgraduate Student; Junior Researcher; Research Center for Fundamental Research on Natural and Construction Sciences named after Honoured Scientist of the Russian Federation, Prof. Rossikhin Yuri Alekseyevich; e-mail: an.krusser@yandex.ru

Marina V. Shitikova  <https://orcid.org/0000-0003-2186-1881>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Principal Researcher; Research Center for Fundamental Research on Natural and Construction Sciences named after Honoured Scientist of the Russian Federation, Prof. Rossikhin Yuri Alekseyevich¹; Professor; Dept. of Structural and Theoretical Mechanics²; e-mail: mvs@gasu.vrn.ru

and the foundation by changing the fractional parameters, but also to control the damping parameters of the external load. **Conclusion.** Numerical analysis has shown that in the system “a plate on a viscoelastic foundation + a moving oscillating load”, energy transfer between the interacting vibration modes is observed. A comparison of the results of numerical studies for various values of the external load is presented, and the dependence of the amplitudes of nonlinear vibrations on the values of the fractional parameters of the environment and the foundation is also shown.

Keywords: plate on a viscoelastic foundation, moving oscillator load, fractional derivative, method of multiple time scales, internal and external resonances.

Received: 21st September, 2022 / Revised: 18th October, 2022 /

Accepted: 21st October, 2022 / First online: 7th December, 2022

Competing interests. We declare that we have no competing interests.

Author’s Responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. We take full responsibility for submit the final manuscript to print. We approved the final version of the manuscript.

Funding. This work has been supported by the Russian Science Foundation (project no. 21-19-00634).

References

1. Gerasimov S. I., Erofeev V. I., Kolesov D. A., Lissenkova E. E. Dynamics of deformable systems carrying moving loads (review of publication and dissertation research), *Vestnik nauchno-tekhnicheskogo razvitiya* [Bulletin of Science and Technical Development], 2021, no. 160, pp. 25–47 (In Russian). EDN: HJKPJ. DOI: <https://doi.org/10.18411/vntr2021-160-3>.
2. Fryba L. *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*, Mechanics of Structural Systems, vol. 1. Springer, Dordrecht, 1973, 484+xxvii pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-011-9685-7>.
3. Younesian D., Hosseinkhani A., Askari H., Esmailzadeh E. Elastic and viscoelastic foundations: a review on linear and nonlinear vibration modeling and applications, *Nonlinear Dyn.*, 2019, vol. 97, no. 1, pp. 853–895. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-019-04977-9>.
4. Rajabi K., Kargarnovin M. H., Gharini M. Dynamic analysis of a functionally graded simply supported Euler–Bernoulli beam subjected to a moving oscillator, *Acta Mech.*, 2013, vol. 224, no. 2, pp. 425–446. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-012-0769-y>.
5. Almbaidin A., Abu-Alshaikh I. Vibration of functionally graded beam subjected to moving oscillator using Caputo–Fabrizio fractional derivative model, *Romanian Journal of Acoustics and Vibration*, 2019, vol. 16, no. 2, pp. 137–146.
6. Sawant V. A., Patil V. A., Deb K. Effect of vehicle–pavement interaction on dynamic response of rigid pavements, *Geomech. Geoeng.*, 2011, vol. 6, no. 1, pp. 31–39. DOI: <https://doi.org/10.1080/17486025.2010.521591>.
7. Patil V. A., Sawant V. A., Deb K. Finite element analysis of rigid pavement on a nonlinear two parameter foundation model, *Int. J. Geotech. Eng.*, 2012, vol. 6, no. 3, pp. 275–286. DOI: <https://doi.org/10.3328/IJGE.2012.06.03.274-286>.
8. Ding H., Yang Y., Chen L.-Q., Yang S.-P. Vibration of vehicle–pavement coupled system based on a Timoshenko beam on a nonlinear foundation, *J. Sound Vib.*, 2014, vol. 333, no. 24, pp. 6623–6636. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.07.016>.
9. Yang S., Chen L., Li S. Modeling and dynamic analysis of vehicle-road coupled systems, In: *Dynamics of Vehicle-Road Coupled System*. Berlin, Springer, 2015, pp. 215–250. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-45957-7_7.

10. Meshkov S. I., Pachevskaya G. N., Postnikov V. S., Rossikhin Yu. A. Integral representations of ε_γ -functions and their application to problems in linear viscoelasticity, *Int. J. Eng. Sci.*, 1971, vol. 9, no. 4, pp. 387–398. EDN: ZYMWGP. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(71\)90059-0](https://doi.org/10.1016/0020-7225(71)90059-0).
11. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids, *Appl. Mech. Rev.*, 1997, vol. 57, no. 1, pp. 15–67. EDN: LELUNP. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3101682>.
12. Ogorodnikov E. N., Yashagin N. S. Forced oscillations of the fractional oscillator, In: *Proceedings of the Fifth All-Russian Scientific Conference with international participation* (29–31 May 2008). Part 1, Matem. Mod. Kraev. Zadachi. Samara, Samara State Technical Univ., 2008, pp. 215–221 (In Russian). EDN: TGYVDN.
13. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. New approach for the analysis of damped vibrations of fractional oscillators, *Shock and Vibration*, 2009, vol. 16, no. 4, 387676. EDN: MWZYVP. DOI: <https://doi.org/10.1155/2009/387676>.
14. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: Novel trends and recent results, *Appl. Mech. Rev.*, 2010, vol. 63, no. 1, 010801. EDN: CUFMBA. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4000563>.
15. Ogorodnikov E. N., Radchenko V. P., Yashagin N. S. Rheological model of viscoelastic body with memory and differential equations of fractional oscillator, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2011, no. 1(22), pp. 255–268 (In Russian). EDN: NUPPZB. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu932>.
16. Parovik R. I., Zunnunov R. T. Analysis of forced vibrations of a fractional oscillator, *Probl. Mekhan.*, 2019, no. 4, pp. 20–23 (In Russian). EDN: GREHHQ.
17. Kerr A. D. Elastic and viscoelastic foundation models, *J. Appl. Mech.*, 1964, vol. 31, no. 3, pp. 491–498. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3629667>.
18. Winkler E. *Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit*. Prague, Dominicius, 1867, 388 pp. (In German)
19. Zimmerman H. *Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues*. Berlin, Verlag von Ernst & Korn, 1888, 326 pp.
20. Fuss N. I. An experiment on the resistance caused to roads by all kinds of four-wheeled and two-wheeled carts, with the determination of the circumstances, in the presence of one of these carts is more useful than others, *Akademicheskaya sochineniya*, 1801. Part. 1, pp. 373–422 (In Russian).
21. Vlasov V. Z., Leontiev N. N. *Balki, plity, obolochki na uprugom osnovanii* [Beams, Plates and Shells on an Elastic Foundation]. Moscow, Fizmatlit, 1960, 492 pp. (In Russian)
22. Tsytoovich N. A. *Mekhanika gruntov* [Soil Mechanics]. Moscow, 1963, 637 pp. (In Russian)
23. Lai J., Mao S., Qiu J., Fan H., Zhang Q., Hu Z., Chen J. Investigation progresses and applications of fractional derivative model in geotechnical engineering, *Math. Probl. Eng.*, 2016, vol. 2016, no. 3, 9183296. DOI: <https://doi.org/10.1155/2016/9183296>.
24. Taheri M. R., Ting E. C. Dynamic response of plate to moving loads: Structural impedance method, *Comput. Struct.*, 1989, vol. 33, no. 6, pp. 1379–1393. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(89\)90478-1](https://doi.org/10.1016/0045-7949(89)90478-1).
25. Zaman M., Taheri M. R., Alvappillai A. Dynamic response of a thick plate on viscoelastic foundation to moving loads, *Int. J. Numer. Analytical Methods Geomech.*, 1991, vol. 15, no. 9, pp. 627–647. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.1610150903>.
26. Yang S., Li S., Lu Y. Investigation on dynamical interaction between a heavy vehicle and road pavement, *Int. J. Vehicle Mech. Mob.*, 2010, vol. 48, no. 8, pp. 923–944. DOI: <https://doi.org/10.1080/00423110903243166>.
27. Li S., Yang S., Chen L. A nonlinear vehicle-road coupled model for dynamics research, *J. Comput. Nonlinear Dynam.*, 2013, vol. 8, no. 2, 021001. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4006784>.

28. Amabili M. Nonlinear vibrations of viscoelastic rectangular plates validation, *J. Sound Vib.*, 2016, vol. 362, pp. 142–156. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.09.035>.
29. Amabili M. Nonlinear damping in nonlinear vibrations of rectangular plates: Derivation from viscoelasticity and experimental validation, *J. Mech. Phys. Solids*, 2018, vol. 118, pp. 275–292. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2018.06.004>.
30. Shitikova M. V., Kandu V. V. Analysis of the nonlinear vibrations of an elastic plate on a viscoelastic foundation in the presence of the one-to-one internal resonance, *Izv. Vyzov. Stroitel'stvo*, 2020, no. 3, pp. 5–22 (In Russian). EDN: VUGFIN.
31. Shitikova M. V., Krusser A. I. Nonlinear vibrations of an elastic plate on a viscoelastic foundation modeled by the fractional derivative standard linear solid model, In: *EURODYN 2020, Proc. of the XI International Conference on Structural Dynamics*. Athens, National Techn. Univ. of Athens, 2020, pp. 355–368. EDN: UAGFCT. DOI: <https://doi.org/10.47964/1120.9028.20091>.
32. Shitikova M. V., Krusser A. I. Force driven vibrations of nonlinear plates on a viscoelastic Winkler foundation under the harmonic moving load, *Int. J. Comput. Civil Struct. Eng.*, 2021, vol. 17, no. 4, pp. 161–180. EDN: QLTGPZ. DOI: <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2021-17-4-161-180>.
33. Volmir A. S. *The Nonlinear Dynamics of Plates and Shells*. Dayton, Dept. of the Air Force, 1974, 543 pp.
34. Samko S. G. Kilbas A. A., Marichev O. I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poriadka i nekotorye ikh prilozheniia* [Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of Their Applications]. Minsk, Nauka i tekhnika, 1987, 688 pp. (In Russian)
35. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Fractional operator models of viscoelasticity, In: *Encyclopedia of Continuum Mechanics*. Berlin, Springer, 2020, pp. 971–982. DOI: <https://doi.org/QFEFJE>. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-55771-6_77.
36. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Centennial jubilee of Academician Rabotnov and contemporary handling of his fractional operator, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2014, vol. 17, no. 3, pp. 674–683. EDN: UELRWP. DOI: <https://doi.org/10.2478/s13540-014-0192-2>.
37. Shitikova M. V. The fractional derivative expansion method in nonlinear dynamic analysis of structures, *Nonlinear Dyn.*, 2020, vol. 99, no. 1, pp. 109–122. EDN: JRPYST. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05055-w>.
38. Nayfeh A. H. *Perturbation Technique*. New York, Wiley, 1973, 441 pp.
39. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Application of fractional calculus for analysis of nonlinear damped vibrations of suspension bridges, *J. Eng. Mech.*, 1998, vol. 124, no. 9, pp. 1029–1036. EDN: LEXPPL. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1998\)124:9\(1029\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1998)124:9(1029)).
40. Nayfeh A. H., Mook D. T. *Nonlinear Oscillations*, Wiley, 1995, 705 pp.
41. Rossikhin Yu. A., Krusser A. I., Shitikova M. V. Impact response of a nonlinear viscoelastic auxetic doubly curved shallow shell, In: *ICSV 2017, Proc. of the 24th International Congress on Sound and Vibration*. London, Int. Inst. Acoust. Vibration, 2017. EDN: ZGNMET.
42. Shitikova M. V., Kandu V. V. Force driven vibrations of fractionally damped plates subjected to primary and internal resonances, *Eur. Phys. J. Plus*, 2019, vol. 134, no. 9, 423. EDN: GLZXPS. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjp/i2019-12812-x>.