



УДК 539.4

## Моделирование неизотермического упругопластического поведения армированных пологих оболочек в рамках уточненной теории изгиба

*А. П. Янковский*

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Россия, 630090, Новосибирск, ул. Институтская, 4/1.

### Аннотация

Сформулирована динамическая задача неизотермического и неупругого деформирования гибких пологих многонаправленно армированных оболочек в рамках уточненной теории их изгиба. По толщине конструкций температура аппроксимируется полиномом 7-го порядка. Геометрическая нелинейность задачи моделируется в приближении Кармана. Решение поставленной связанной нелинейной двумерной задачи получено с использованием явной численной схемы. Исследован термоупругопластический отклик стеклопластиковых и металлокомпозитных цилиндрических удлиненных панелей с ортогональной структурой армирования, нагруженных фронтально воздушной взрывной волной. Показано, что в отличие от аналогичных по структуре и характерным размерам армированных пластин пологие оболочки при интенсивном кратковременном нагружении необходимо рассчитывать с учетом возникновения в них температурных полей. При этом следует использовать уточненную теорию изгиба искривленных панелей, а не ее простейший вариант — неклассическую теорию Амбарцумяна. Приращение температуры в отдельных точках пологих оболочек из стеклопластика может достигать 14–34 °С, а в аналогичных металлокомпозитных панелях — 50–150 °С. Цилиндрические пологие оболочки более интенсивно деформируются при их нагружении воздушной взрывной волной со стороны выпуклой лицевой поверхности.

**Ключевые слова:** гибкие пологие оболочки, многонаправленное армирование, динамическое деформирование, связанная термоупругопластичность, уточненная теория изгиба, явная численная схема.

---

**Механика деформируемого твердого тела****Научная статья**

© Коллектив авторов, 2023

© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)**Образец для цитирования**

Янковский А. П. Моделирование неизотермического упругопластического поведения армированных пологих оболочек в рамках уточненной теории изгиба // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 1. С. 119–141. EDN: YRWNPW. DOI: [10.14498/vsgtu1958](https://doi.org/10.14498/vsgtu1958).

**Сведения об авторе***Андрей Петрович Янковский*  <https://orcid.org/0000-0002-2602-8357>доктор физико-математических наук; ведущий научный сотрудник; лаб. физики быстропротекающих процессов; e-mail: [lab4nemir@rambler.ru](mailto:lab4nemir@rambler.ru)

Получение: 26 сентября 2022 г. / Исправление: 28 декабря 2022 г. /  
Принятие: 13 февраля 2023 г. / Публикация онлайн: 27 марта 2023 г.

**Введение.** Изделия из композитных материалов (КМ) находят широкое применение в современной инженерной практике [1–15] и часто испытывают интенсивное термосиловое нагружение [2, 3, 5, 8–10, 12, 15], при котором компоненты композиции деформируются неупруго [5, 8, 12, 16–18]. Следовательно, актуальной является проблема математического моделирования термоупругопластического деформирования КМ-пластин и КМ-оболочек, находящаяся на сегодняшний день в стадии становления [5, 8, 12, 19–23]. Так, в работе [23] разработана модель неизотермического упругопластического деформирования материала, многонаправленно армированного непрерывными волокнами, и выполнены расчеты динамического изгиба КМ-пластин из таких материалов.

Для учета ослабленного сопротивления композитных изгибаемых пластин и оболочек поперечным сдвигам и моделирования волновых процессов в них используют простейшие неклассические теории Рейсснера [2, 5, 10, 12, 24], Амбарцумяна [1, 23], Редди [6, 9] или уточненные теории [3, 5, 10, 22].

В работе [23] показано, что температуру по толщине изгибаемой КМ-пластины при ее динамическом нагружении следует аппроксимировать полиномами 6–7 порядка. Для описания же изгибного поведения армированных пластин в [23] использована теория Амбарцумяна [1]. При интенсивном кратковременном механическом нагружении конструкций главным источником выделения тепла является диссипация механической энергии, которая зависит от скорости деформаций и уровней напряжений [25]. Частота поперечных колебаний пологих оболочек значительно больше, чем пластин тех же характерных размеров, изготовленных из тех же материалов, поэтому и скорость деформаций в таких искривленных конструкциях много больше, чем в пластинах. Следовательно, выделение тепла в пологих оболочках может оказаться значительно большим, чем в аналогичных пластинах, а значит, и результаты работы [23] нельзя будет дословно переносить на армированные пологие оболочки. Кроме того, используя разные теории изгиба тонкостенных элементов конструкций (Рейсснера, Амбарцумяна, Редди или более точные), можно с разной степенью точности аппроксимировать скорости деформаций и напряжения по толщине КМ-пластин и КМ-оболочек. Так, в работе [22] было продемонстрировано, что для адекватного описания упругопластического (изотермического) динамического поведения армированных пологих оболочек необходимо использовать уточненную теорию их изгиба. Следовательно, применение уточненной теории изгиба может внести существенные поправки в расчет диссипации механической энергии в пологих КМ-оболочках, а значит, и в расчет температурных полей и механического отклика таких конструкций.

Для интегрирования нелинейных задач динамики тонкостенных элементов конструкций используют как явные [5, 22, 23], так и неявные [8, 26] численные схемы.

Согласно вышеизложенному, настоящее исследование посвящено моделированию термоупругопластического динамического поведения армированных

пологих оболочек в рамках уточненной теории изгиба [22]. Нелинейная связанная термомеханическая задача численно интегрируется с использованием явной схемы шагов по времени [5, 22, 23].

**1. Постановка задачи и метод расчета.** Рассмотрим деформированную гибкой пологой КМ-оболочкой толщиной  $2h$ , с которой свяжем ортогональную систему координат  $x_i$  так, что ее срединная поверхность является отсчетной ( $|x_3| \leq h$ ), а координатные линии  $x_1$  и  $x_2$  совпадают с линиями главной кривизны этой поверхности  $x_3 = 0$  (рис. 1, где искривленность панели не изображена в силу ее малости). Оболочка многонаправленно армирована (возможно, и пространственно)  $K$  семействами волокон с плотностями армирования  $\omega_k$  ( $1 \leq k \leq K$ ). В поперечном направлении конструкции  $Ox_3$  структура армирования однородна.

С каждым  $k$ -м семейством волокон свяжем ортогональную локальную систему координат  $x_i^{(k)}$ , причем ось  $Ox_1^{(k)}$  ориентируем вдоль траектории армирования и ее направление зададим двумя углами сферической системы координат  $\theta_k$  и  $\varphi_k$  (рис. 2). Направляющие косинусы  $l_{ij}^{(k)}$  осей  $Ox_i^{(k)}$  относительно осей  $Ox_j$  ( $i, j = \overline{1, 3}, 1 \leq k \leq K$ ) определяются формулами из [23]:

$$\begin{aligned} l_{11}^{(k)} &= \sin \theta_k \cos \varphi_k, & l_{12}^{(k)} &= \sin \theta_k \sin \varphi_k, & l_{13}^{(k)} &= \cos \theta_k, \\ l_{21}^{(k)} &= -\sin \varphi_k, & l_{22}^{(k)} &= \cos \varphi_k, & l_{23}^{(k)} &= 0, \\ l_{31}^{(k)} &= -\cos \theta_k \cos \varphi_k, & l_{32}^{(k)} &= -\cos \theta_k \sin \varphi_k, & l_{33}^{(k)} &= \sin \theta_k, \quad 1 \leq k \leq N. \end{aligned} \quad (1)$$

Предполагается, что внешними касательными силами на лицевых поверхностях оболочки можно пренебречь, и в случае пространственной структуры армирования выполняются требования, изложенные в замечании в [23]. (В случаях плоско-перекрестного армирования, как на рис. 1, указанные требования заведомо выполняются.) При этом, согласно [22], усредненные деформации композиции  $\varepsilon_{ij}$  и перемещения точек гибкой пологой оболочки  $U_i$

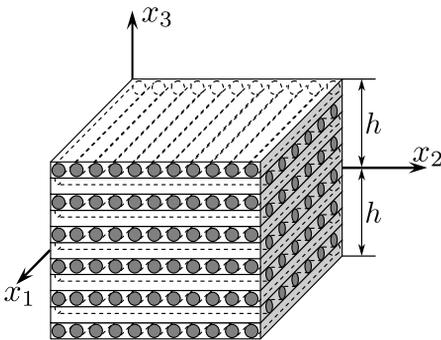


Рис. 1. Элемент волокнистой пологой оболочки [Figure 1. Element of fibrous shallow shell]

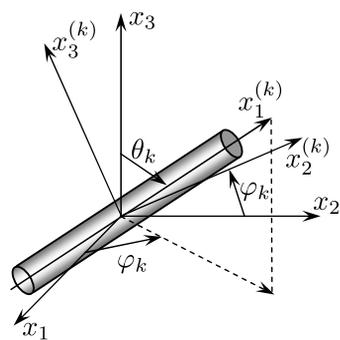


Рис. 2. Локальная прямоугольная система координат, связанная с армирующим волокном  $k$ -го семейства [Figure 2. Local cartesian coordinate system associated with  $k$ -th family reinforcing fiber]

в рамках уточненной теории изгиба можно аппроксимировать так (геометрическая нелинейность задачи учитывается в приближении Кармана):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) = & \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) - x_3 \partial_i \partial_j w + \\ & + \sum_{m=0}^M \frac{x_3^{m+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{m+1} - \frac{x_3^2}{m+3} \right) (\partial_i \varepsilon_{j3}^{(m)} + \partial_j \varepsilon_{i3}^{(m)}) + \frac{\delta_{ij} w}{R_i} + \frac{1}{2} \partial_i w \partial_j w, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) = \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \sum_{m=0}^M x_3^m \varepsilon_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad i, j = 1, 2;$$

$$U_i(t, \mathbf{r}) = u_i(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_i w + 2 \sum_{m=0}^M \frac{x_3^{m+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{m+1} - \frac{x_3^2}{m+3} \right) \varepsilon_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad (3)$$

$$U_3(t, \mathbf{r}) = w(t, \mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in G,$$

$$|x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad \mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3),$$

где  $w$  — прогиб;  $u_i$  — перемещения точек отсчетной поверхности ( $x_3 = 0$ ) в тангенциальных направлениях  $x_i$ ;  $R_i$  — главные радиусы кривизны срединной поверхности;  $t_0$  — начальный момент времени  $t$ ;  $\partial_i$  — оператор частного дифференцирования по переменной  $x_i$  ( $i = 1, 2$ );  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $M$  — целое число, которое задает количество слагаемых, удерживаемых в частичных суммах по степеням  $x_3$ ;  $G$  — область, занимаемая искривленной панелью в плане. При  $M = 0$  из соотношений (2) и (3) вытекают кинематические гипотезы теорий Амбарцумяна [1] и Редди [6, 9]. В равенствах (2) и (3) подлежат определению двумерные функции  $w$ ,  $u_i$ ,  $\varepsilon_{i3}^{(m)}$  ( $i = 1, 2$ ;  $0 \leq m \leq M$ ).

В данном исследовании изучается динамическое поведение пологой КМ-оболочки как гибкой тонкостенной термомеханической системы, следовательно, напряжение  $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$  с приемлемой для инженерных расчетов точностью можно линейно аппроксимировать по толщине конструкции [2]:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) = & \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} x_3 + \\ & + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$  — нормальные напряжения на верхней (+) и нижней (−) лицевых поверхностях панели, которые известны из силовых граничных условий.

К соотношениям (2)–(4) следует присоединить двумерные уравнения движения гибкой пологой оболочки (см. (10)–(12) в [22]) и определяющие уравнения, связывающие усредненные скорости деформаций  $\dot{\varepsilon}_{ij}$ , напряжений  $\dot{\sigma}_{ij}$  и температуры  $\dot{\Theta}$  в композиции конструкции. Последние уравнения целесообразно представить в матричном виде [23]:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{B}\dot{\varepsilon} + \mathbf{p}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\sigma}} &= (\dot{\sigma}_1, \dot{\sigma}_2, \dot{\sigma}_3, \dot{\sigma}_4, \dot{\sigma}_5, \dot{\sigma}_6)^\top \equiv (\dot{\sigma}_{11}, \dot{\sigma}_{22}, \dot{\sigma}_{33}, \dot{\sigma}_{23}, \dot{\sigma}_{31}, \dot{\sigma}_{12})^\top, \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} &= (\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2, \dot{\epsilon}_3, \dot{\epsilon}_4, \dot{\epsilon}_5, \dot{\epsilon}_6)^\top \equiv (\dot{\epsilon}_{11}, \dot{\epsilon}_{22}, \dot{\epsilon}_{33}, 2\dot{\epsilon}_{23}, 2\dot{\epsilon}_{31}, 2\dot{\epsilon}_{12})^\top;\end{aligned}\quad (6)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &\equiv \left( \omega_0 \mathbf{Z}_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{Z}_k \mathbf{E}_k \right) \mathbf{H}^{-1}, \quad \mathbf{p} \equiv \mathbf{f} - \mathbf{B} \mathbf{g}, \\ \mathbf{f} &\equiv \omega_0 \mathbf{p}_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k (\mathbf{p}_k + \mathbf{Z}_k \mathbf{r}_k), \quad \mathbf{H} \equiv \omega_0 \mathbf{I} + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{E}_k, \\ \mathbf{g} &\equiv \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{r}_k \equiv \mathbf{D}_k^{-1} \varsigma_k, \quad \mathbf{E}_k \equiv \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{C}_k \quad (1 \leq k \leq N), \\ \mathbf{Z}_k &= \bar{\mathbf{Z}}_k - G_k \bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k, \quad \mathbf{p}_k \equiv \beta_k \dot{\Theta} \quad (0 \leq k \leq N), \quad \omega_0 \equiv 1 - \sum_{k=1}^N \omega_k;\end{aligned}\quad (7)$$

$\mathbf{I}$  — единичная  $6 \times 6$ -матрица;  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}_k$ ,  $\mathbf{C}_k$ ,  $\mathbf{Z}_k$ ,  $\bar{\mathbf{Z}}_k$ ,  $\bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k$  —  $6 \times 6$ -матрицы;  $\mathbf{D}_k^{-1}$ ,  $\mathbf{H}^{-1}$  — матрицы, обратные  $6 \times 6$ -матрицам  $\mathbf{D}_k$ ,  $\mathbf{H}$ ;  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{r}_k$ ,  $\varsigma_k$ ,  $\mathbf{p}_k$ ,  $\beta_k$  — шестикомпонентные векторы-столбцы. Элементы матриц  $\mathbf{C}_k = (c_{ij}^{(k)})$ ,  $\mathbf{D}_k = (d_{ij}^{(k)})$ ,  $\bar{\mathbf{Z}}_k = (\bar{z}_{ij}^{(k)})$ ,  $\bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k = (\bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)})$  и вектор-столбцов  $\varsigma_k = (\varsigma_i^{(k)})$ ,  $\beta_k = (\beta_i^{(k)})$  вычисляются по формулам [23]:

$$\begin{aligned}\bar{z}_{ij}^{(k)} &= 2\delta_{ij} G_k + \lambda_k, \quad \bar{z}_{ll}^{(k)} = G_k, \\ \beta_i^{(k)} &= \frac{K_\Theta^{(k)}}{3K_k} \sum_{m=1}^3 \sigma_{mm}^{(k)} + 3K_k \alpha_k + \frac{s_i^{(k)}}{G_k} [G_\Theta^{(k)} - \tau_s^{(k)} (\tau_s^{(k)} G_\Theta^{(k)} - \tau_\Theta^{(k)} G_k) A_k], \\ \beta_l^{(k)} &= \frac{s_l^{(k)}}{G_k} [G_\Theta^{(k)} - \tau_s^{(k)} (\tau_s^{(k)} G_\Theta^{(k)} - \tau_\Theta^{(k)} G_k) A_k], \quad (i, j = \overline{1, 3}, l = \overline{4, 6}), \\ \bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)} &= A_k s_i^{(k)} s_j^{(k)} \quad (i, j = \overline{1, 6}), \\ \lambda_k &= \frac{\nu_k E_k}{(1 + \nu_k)(1 - 2\nu_k)}, \quad 2G_k = \frac{E_k}{1 + \nu_k}, \quad 3K_k = \frac{E_k}{1 - 2\nu_k}, \\ A_k &= \frac{\gamma_k G_k}{(G_k + \bar{G}_k) \tau_s^{(k)2}}, \quad K_\Theta^{(k)} = \frac{dK_k}{d\Theta}, \quad G_\Theta^{(k)} = \frac{dG_k}{d\Theta}, \\ \tau_\Theta^{(k)} &= \frac{\partial \tau_s^{(k)}}{\partial \Theta}, \quad \bar{G}_k = \frac{\partial \tau_s^{(k)}}{\partial \chi_k}, \quad \chi_k = \int_{t_0}^t \sqrt{2\bar{p}_{ij}^{(k)} \bar{p}_{ij}^{(k)}} dt, \\ \gamma_k &= \begin{cases} 0, & \text{если } T_k < \tau_s^{(k)} \text{ или } T_k = \tau_s^{(k)}, W_k \leq 0, \\ 1, & \text{если } T_k = \tau_s^{(k)}, W_k > 0, \end{cases} \\ W_k &= G_k \mathbf{s}_k^\top \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_k + \tau_s^{(k)} G_k^{-1} (\tau_s^{(k)} G_\Theta^{(k)} - \tau_\Theta^{(k)} G_k) \dot{\Theta}, \\ T_k^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 s_i^{(k)2} + \sum_{i=4}^6 s_i^{(k)2}, \quad 0 \leq k \leq N;\end{aligned}\quad (8)$$

$$c_{1j}^{(k)} = d_{1j}^{(k)} = q_{1j}^{(k)}, \quad c_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(0)}, \quad d_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(k)}, \quad (9)$$

$$s_1^{(k)} = 0, \quad s_i^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} (p_l^{(0)} - p_l^{(k)}), \quad i = \overline{2, 6}, \quad j = \overline{1, 6}, \quad 1 \leq k \leq N;$$

$$\begin{aligned} g_{11}^{(k)} &= q_{11}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{11}^{(k)}, & g_{12}^{(k)} &= q_{12}^{(k)} = l_{12}^{(k)} l_{12}^{(k)}, & \dots, \\ g_{16}^{(k)} &= 2q_{16}^{(k)} = 2l_{12}^{(k)} l_{11}^{(k)}, & \dots, \\ 2g_{61}^{(k)} &= q_{61}^{(k)} = 2l_{21}^{(k)} l_{11}^{(k)}, & \dots, \\ g_{66}^{(k)} &= q_{66}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{22}^{(k)} + l_{12}^{(k)} l_{21}^{(k)}, & 1 \leq k \leq N; \end{aligned} \quad (10)$$

$\alpha_k$  — коэффициент линейного температурного расширения  $k$ -го компонента композиции ( $k = 0$  — связующая матрица,  $k \geq 1$  — волокна  $k$ -го семейства);  $E_k$ ,  $\nu_k$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона того же материала;  $\tau_s^{(k)} = \tau_s^{(k)}(\chi_k, \Theta)$  — предел текучести того же материала при чистом сдвиге, зависящий от параметра Одквиста  $\chi_k$  и температуры  $\Theta$  и при активном пластическом деформировании равный интенсивности касательных напряжений  $T_k$ ;  $\bar{G}_k$  — касательный модуль сдвига при пластическом деформировании  $k$ -й фазы композиции;  $\sigma_{ij}^{(k)}$  — напряжения в том же материале;  $\mathbf{s}_k = (s_l^{(k)})$ ,  $\dot{\mathbf{e}}_k = (\dot{\epsilon}_l^{(k)})$  — шестикомпонентные векторы-столбцы с компонентами девизатора напряжений  $s_{ij}^{(k)}$  и тензора скоростей деформаций  $\dot{\epsilon}_{ij}^{(k)}$  в  $k$ -м материале композиции, по структуре аналогичные векторам  $\dot{\sigma}$  и  $\dot{\epsilon}$  соответственно (см. (6));  $\dot{p}_{ij}^{(k)}$  — скорости пластических деформаций того же материала;  $\gamma_k$  — параметр переключения, который при  $\gamma_k = 0$  определяет термоупругое деформирование, разгрузку или нейтральное нагружение, а при  $\gamma_k = 1$  — активное нагружение при пластическом деформировании  $k$ -го компонента композиции;  $p_l^{(k)}$  — элементы вектора-столбца  $\mathbf{p}_k$  ( $l = \overline{1, 6}$ ,  $0 \leq k \leq N$ ); точка — производная по времени  $t$ ; индекс  $\top$  — операция транспонирования. По повторяющимся индексам  $k$  и  $l$  в равенствах (8) суммирование нет. Не выписанные в (10) элементы  $6 \times 6$ -матриц  $\mathbf{G}_k = (g_{ij}^{(k)})$  и  $\mathbf{Q}_k = (q_{ij}^{(k)})$ , зависящие от направляющих косинусов (1), приведены в табл. 21.40 и 21.44 в [27]. Матрицы  $\mathbf{G}_k$  и  $\mathbf{Q}_k$  определяют преобразования шестикомпонентных векторов-столбцов скоростей напряжений  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k = (\dot{\sigma}_l^{(k)})$  и деформаций  $\dot{\mathbf{e}}_k = (\dot{\epsilon}_l^{(k)})$  ( $l = \overline{1, 6}$ ) в  $k$ -м компоненте композиции при переходе от глобальной ортогональной системы координат  $x_j$  к локальной системе  $x_i^{(k)}$  (см. рис. 2). Векторы  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k$  и  $\dot{\mathbf{e}}_k$ , имеющие соответственно структуру, аналогичную (6), связаны определяющими соотношениями [23]:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k = \mathbf{Z}_k \dot{\mathbf{e}}_k + \mathbf{p}_k, \quad 0 \leq k \leq N, \quad (11)$$

где матрица  $\mathbf{Z}_k$  и вектор-столбец  $\mathbf{p}_k$  вычисляются по формулам (7). В соотношениях (8) учтено, что упругие характеристики  $k$ -го материала композиции могут зависеть от температуры  $\Theta$  (термочувствительность).

При выводе равенств (5) и (7) попутно получаются следующие структурные матричные соотношения:

$$\dot{\epsilon}_0 = \mathbf{H}^{-1}\dot{\epsilon} - \mathbf{H}^{-1}\mathbf{g}, \quad \dot{\epsilon}_k = \mathbf{E}_k\dot{\epsilon}_0 + \mathbf{r}_k, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (12)$$

Первое выражение (12) определяет скорости деформаций связующей матрицы  $\dot{\epsilon}_0$  через скорости осредненных деформаций композиции  $\dot{\epsilon}$ , а второе соотношение — скорости деформаций волокон  $k$ -го семейства  $\dot{\epsilon}_k$  через скорости деформаций связующего материала  $\dot{\epsilon}_0$ . По формулам же (11) при учете (12) можно выразить и скорости напряжений  $\dot{\sigma}_{ij}^{(k)}$  в  $k$ -м компоненте композиции через осредненные скорости деформаций  $\dot{\epsilon}_{ij}$  ( $i, j = \overline{1, 3}, 0 \leq k \leq N$ ).

В силу структуры векторов-столбцов  $\dot{\sigma}$  и  $\dot{\epsilon}$  (см. (6)) из третьего равенства системы (5) определим скорость линейной деформации в направлении  $x_3$ :

$$\dot{\epsilon}_{33} = b_{33}^{-1}(\dot{\sigma}_{33} - p_3 - b_{31}\dot{\epsilon}_{11} - b_{32}\dot{\epsilon}_{22} - 2b_{34}\dot{\epsilon}_{23} - 2b_{35}\dot{\epsilon}_{31} - 2b_{36}\dot{\epsilon}_{12}), \quad (13)$$

где  $p_3, b_{3i}$  ( $i = \overline{1, 6}$ ) — элементы вектора-столбца  $\mathbf{p}$  и матрицы  $\mathbf{B}$  в соотношении (5); скорость  $\dot{\sigma}_{33}$  выражается из (4) путем дифференцирования по времени. Скорости деформаций  $\dot{\epsilon}_{ij}$  в правой части (13) вычисляются за счет дифференцирования по  $t$  соотношений (2), т. е. определяются через двумерные функции  $w, \dot{w}, \dot{u}_i, \dot{\epsilon}_{i3}^{(m)}$  ( $i = 1, 2, 0 \leq m \leq M$ ).

Используя результаты работы [23], температуру конструкции  $\Theta$  аппроксимируем по ее толщине полиномом порядка  $L$ :

$$\Theta(t, \mathbf{r}) - \Theta^0 = \sum_{l=0}^L \Theta_l(t, \mathbf{x}) x_3^l, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad (14)$$

где  $\Theta^0 = \text{const}$  — температура естественного состояния искривленной панели;  $\Theta_l$  — подлежащие определению двумерные функции ( $0 \leq l \leq L$ ).

Для завершения формулировки связанной задачи неупругого термомеханического деформирования пологой КМ-оболочки к соотношениям (2)–(14) нужно присоединить уравнения теплового баланса. Так как метрика в искривленной панели с приемлемой для приложений точностью может быть отождествлена с метрикой в декартовой прямоугольной системе координат [1], в качестве двумерных уравнений, описывающих теплопроводность в рассматриваемой пологой КМ-оболочке, можно применять формулы (4.11), (4.13), (4.14) и (4.18) из работы [23]. Кроме того, следует использовать необходимые механические (см. (22)–(24) и (26) в [22]) и теплофизические (см. (3.20) в [23]) граничные условия, а также начальные условия, заданные при  $t = t_0$  (см. (25), (26) в [22] и (3.22) в [23]).

Для численного интегрирования поставленной нелинейной начально-краевой задачи используем явную схему шагов по времени, т. е. неизвестные функции будем определять в дискретные моменты времени  $t = t_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). При этом считаем, что в моменты времени  $t_m$  уже вычислены значения следующих функций [22, 23]:

$$w^m(\mathbf{x}) \equiv w(t_m, \mathbf{x}), \quad u_l^{m(p)}(\mathbf{x}) \equiv u_l^{(p)}(t_m, \mathbf{x}), \quad \sigma_{ij}^m(\mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij}(t_m, \mathbf{r}),$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{33}^{m(\pm)}(\mathbf{x}) &\equiv \sigma_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), & U^{n(r)}(\mathbf{x}) &\equiv U^{(r)}(t_n, \mathbf{x}), & q_i^n(\mathbf{r}) &\equiv q_i(t_n, \mathbf{r}), \\
 \Theta_s^m(\mathbf{x}) &\equiv \Theta_s(t_m, \mathbf{x}), & \dot{\Theta}_s^{n-1}(\mathbf{x}) &\equiv \dot{\Theta}_s(t_{n-1}, \mathbf{x}), & q_\infty^{n(\pm)}(\mathbf{x}) &\equiv q_\infty^{(\pm)}(t_n, \mathbf{x}), \\
 \sigma_{ij}^{m(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), & \varepsilon_{ij}^{m(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \varepsilon_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), & \chi^{m(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \chi^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \\
 l = 1, 2, & \quad i, j = \overline{1, 3}, & m = n - 1, n, & \quad 0 \leq p \leq M + 1, & 0 \leq r \leq L - 2, \\
 0 \leq s \leq L, & \quad 0 \leq k \leq K, & \mathbf{x} \in G, & \quad |x_3| \leq h,
 \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned}
 u_l^{(p)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h U_l(t, \mathbf{r}) x_3^p dx_3, & U^{(r)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h U(t, \mathbf{r}) x_3^r dx_3, \\
 l = 1, 2, & \quad 0 \leq p \leq M + 1, & 0 \leq r \leq L - 2;
 \end{aligned} \tag{16}$$

$U$  — удельная внутренняя энергия композиции оболочка;  $\sigma_{ij}^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}$  — напряжения и деформации в  $k$ -й фазе композиции ( $k = 0$  — связующий материал,  $k \geq 1$  — арматура  $k$ -го семейства);  $\chi^{(k)}$  — параметр Оджвиста в той же фазе;  $q_i$  — компоненты вектора теплового потока в композиции;  $q_\infty^{(\pm)}$  — заданные значения тепловых потоков через нижнюю (–) и верхнюю (+) лицевые поверхности оболочки. Искомые функции  $w, u_i$  и  $\varepsilon_{i3}^{(m)}$  ( $i = 1, 2, 0 \leq m \leq M$ ) в соотношениях (2) и (3) однозначно определяются через кинематические переменные  $u_i^{(p)}$  (см. выражения (16)) за счет матричного равенства (30) в [22].

В механической составляющей рассматриваемой связанной неизотермической упругопластической задачи производные по времени  $t$  аппроксимируем их конечно-разностными аналогами на трехточечном шаблоне  $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$ . Это позволяет построить явную численную схему [22]. Так, после замены в двумерных уточненных уравнениях динамического равновесия гибкой полой КМ-оболочкой вторых производных по  $t$  от кинематических переменных  $w$  и  $u_i^{(p)}$  их конечными разностями при учете соотношений (3), (4), (16) и обозначений, аналогичных (15), будем иметь [22]

$$\begin{aligned}
 \frac{2h\rho}{\tau^2} (w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1}) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left( M_{j3}^{(0)} + \sum_{i=1}^2 M_{ji}^{(0)} \partial_i w^n \right) - \\
 &\quad - \sum_{i=1}^2 R_i^{-1} M_{ii}^{(0)} + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}, \\
 \frac{\rho}{\tau^2} (u_i^{n+1(l)} - 2u_i^{n(l)} + u_i^{n-1(l)}) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j (M_{ij}^{(l)} - M_{j3}^{(l)} \partial_i w^n) - \\
 &\quad - h^l [\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)}] \partial_i w^n - l M_{i3}^{(l-1)} + l M_{33}^{(l-1)} \partial_i w^n + R_i^{-1} M_{i3}^{(l)},
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\mathbf{x} \in G, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M + 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где

$$\rho \equiv \rho_0 \omega_0 + \sum_{k=1}^K \rho_k \omega_k, \quad \omega_0 = 1 - \sum_{k=1}^K \omega_k, \quad M_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3,$$

$$lM_{33}^{(l-1)}(t, \mathbf{x}) \equiv l \int_{-h}^h \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) x_3^{l-1} dx_3 = \frac{h^l}{2} [(\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)})(1 - (-1)^l) +$$

$$+ \frac{l}{l+1} (\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)})(1 + (-1)^l)], \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq l \leq M+1; \quad (18)$$

$\rho_0, \rho_k$  — объемные плотности связующей матрицы и волокон  $k$ -го семейства;  $\tau = \text{const} > 0$  — шаг по времени. Внешние объемные силы в равенствах (17) не учитываются. Осредненные напряжения  $\sigma_{ij}$  в выражениях (18) связаны с напряжениями в фазах композиции  $\sigma_{ij}^{(k)}$  ( $i, j = \overline{1, 3}, 0 \leq k \leq K$ ) структурными соотношениями из [23] (по правилу простой смеси).

По формулам (18) с учетом предположений (15) в текущий момент времени  $t_n$  можно определить силовые факторы  $M_{ij}^{(l)}$  и внешние силы  $\sigma_{33}^{(\pm)}$  в правых частях уравнений (17), поэтому, учитывая необходимые граничные условия [22], из равенств (17) по явной схеме можем вычислить искомые функции  $w^{n+1}$  и  $u_i^{n+1(l)}$  при  $t = t_{n+1}$ .

Для численного интегрирования теплофизической составляющей исследуемой задачи также применим явную схему шагов по времени, но на двухточечном шаблоне  $\{t_n, t_{n+1}\}$ . При этом с учетом выражений (14), (16) и обозначений типа (15) двумерные уравнения теплового баланса полой КМ-оболочки примут вид [23]:

$$\frac{\rho}{\tau} (U^{n+1(m)} - U^{n(m)}) = -\partial_1 \dot{Q}_1^{n(m)} - \partial_2 \dot{Q}_2^{n(m)} - \dot{Q}_3^{n(m)} + \dot{W}^{n(m)}, \quad (19)$$

$$\mathbf{x} \in G, \quad 0 \leq m \leq L-2, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$-\sum_{l=0}^L (-1)^l h^{l-1} (l\lambda_{33}^{(-)} + h\alpha^{(-)}) \Theta_l(t, \mathbf{x}) =$$

$$= \alpha^{(-)} (\Theta_{\infty}^{(-)} - \Theta^0) + q_{\infty}^{(-)}(t, \mathbf{x}), \quad (20)$$

$$\sum_{l=0}^L h^{l-1} (l\lambda_{33}^{(+)} + h\alpha^{(+)}) \Theta_l(t, \mathbf{x}) =$$

$$= \alpha^{(+)} (\Theta_{\infty}^{(+)} - \Theta^0) - q_{\infty}^{(+)}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0;$$

$$C_0 \sum_{i=0}^L H(i+m) \Theta_i + \frac{C_1}{2} \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L H(i+j+m) \Theta_i \Theta_j +$$

$$+ \frac{C_2}{3} \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L \sum_{l=0}^L H(i+j+l+m) \Theta_i \Theta_j \Theta_l =$$

$$= U^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0, \quad 0 \leq m \leq L-2, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned}
 H(s) &\equiv \frac{h^{s+1}}{s+1} [1 - (-1)^{s+1}], \quad Q_i^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h q_i(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3 \quad (i = \overline{1, 3}), \\
 \bar{Q}_3^{(m)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h \partial_3 q_3(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3 = h^m [q_3^{(+)} - (-1)^m q_3^{(-)}] - m Q_3^{(m-1)}(t, \mathbf{x}), \\
 W^{(m)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} x_3^m dx_3, \quad C_l(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^K c_l^{(k)} \rho_k \omega_k(\mathbf{x}) \quad (l = 0, 1, 2), \\
 \lambda_{33}^{(\pm)} &\equiv \lambda_{33} |_{\Theta = \Theta(t, \mathbf{x}, \pm h)}, \quad q_3^{(\pm)} \equiv q_\infty^{(\pm)};
 \end{aligned} \tag{22}$$

$\lambda_{33}$  — коэффициент теплопроводности композиции в поперечном направлении  $Ox_3$ , определяемый по структурным формулам из [28];  $\alpha^{(\pm)}$  — коэффициент теплоотдачи на верхней (+) и нижней (–) лицевой поверхности оболочки;  $\Theta_\infty^{(\pm)}$  — температура окружающей среды со стороны той же поверхности;  $c_l^{(k)}$  — коэффициент разложения удельной теплоемкости материала  $k$ -й фазы композиции  $c_k(\Theta - \Theta^0)$  по формуле (в случае термочувствительности):

$$c_k(\Theta - \Theta^0) = c_0^{(k)} + c_1^{(k)}(\Theta - \Theta^0) + c_2^{(k)}(\Theta - \Theta^0)^2, \quad 0 \leq k \leq K. \tag{23}$$

Равенства (20) — тепловые граничные условия на лицевых поверхностях искривленной КМ-панели, преобразованные с учетом представления температуры в виде (14). Соотношение (21) выражает двумерные функции  $U^{(m)}$  (см. (16)) через коэффициенты разложения (14) с учетом равенства (23). Уравнения (20), (21) справедливы для любого момента времени  $t$ .

Используя соотношения (22) и предположения (15), в текущий момент времени  $t_n$  можно вычислить правые части в равенствах (19). Учитывая при этом необходимые граничные (заданные на контуре  $\Gamma$ , ограничивающем область  $G$ ) и начальные тепловые условия [23], получаем из (19) по явной схеме значения  $U^{n+1(m)}$  при  $t = t_{n+1}$ . Далее, в следующий момент времени  $t_{n+1}$  из равенств (20), (21) (где правые части уже известны) при учете (22) определяем коэффициенты разложения для температуры  $\Theta^l(\mathbf{x})$ ,  $0 \leq l \leq L$  (см. (14)). В случае термочувствительности компонентов композиции ( $c_1^{(k)} \neq 0$  и/или  $c_2^{(k)} \neq 0$  ( $0 \leq k \leq K$ ) в равенстве (23)) система (20), (21) является нелинейной. Для ее линеаризации может быть использован метод переменных теплофизических параметров, аналогичный методу переменных параметров упругости. В остальных деталях разработанный численный метод (17), (19) при учете соотношений (2), (5)–(13), (18), (22) и структурных формул, полученных в [28] (см. выражения (20) и (22)), реализуется так же, как подробно описано в [22, 23]. При этом в соотношениях (5), (7)–(9), (11) и (12) всем величинам следует приписать верхний индекс  $n$  (аналогично (17) и (19)), означающий номер текущего дискретного момента времени  $t_n$ . (Величины же, входящие в равенства (10), от  $n$  не зависят.) Кроме того, в соотношениях (7) и (8) скорость температуры  $\dot{\Theta}$  необходимо выразить разностной формулой,

вытекающей из формулы трапеций [23]:

$$\dot{\Theta} \equiv \dot{\Theta} = \frac{2}{\tau} \left( \Theta - \Theta^{n-1/2} \right), \quad \Theta^{n-1/2} \equiv \Theta^{n-1} + \frac{\tau}{2} \dot{\Theta}^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (24)$$

Согласно предположениям (15), при  $t = t_n$  правые части в равенствах (24) известны, т. е. известна и скорость температуры  $\dot{\Theta} = \dot{\Theta}(t_n, \mathbf{r})$ .

В работе [23] показано, что в уравнениях (17), (19) шаг по времени  $\tau$  нужно задавать так, чтобы выполнялось необходимое условие устойчивости Куранта—Фридрихса—Леви [5].

**2. Обсуждение результатов расчетов.** Рассматривается термоупруго-пластический динамический изгиб относительно тонких пологих цилиндрических КМ-оболочек толщиной  $2h = 2$  см, имеющих в плане удлиненную прямоугольную форму ( $G: |x_1| \leq a, |x_2| \leq b, a = 3b; 1/R_1 \equiv 0, R_2 \equiv R = \text{const}; b = 50$  см). Стрела подъема искривленных панелей  $f$  над продольными (в направлении оси  $Ox_1$ ) кромками равна 10 см. Радиус цилиндрической оболочки  $R$  при этом определяется формулой [22]:  $R = (b^2 + f^2)/(2f), 0 \leq f < 0.4b$ . По кромкам конструкции имеют жесткое закрепление:  $w = 0, u_i^{(m)} = 0, \mathbf{x} \in \Gamma, t \geq t_0$  (см. (16), (17)). До начального момента времени  $t = t_0 = 0$  панели покоятся ( $w = 0, u_i^{(m)} = 0, \mathbf{x} \in G, t = t_0, i = 1, 2, 0 \leq m \leq M + 1$ ) в естественном состоянии при  $\Theta = \Theta^0 = 20^\circ\text{C}$  ( $\mathbf{x} \in G, |x_3| \leq h, t = t_0$ ). Начиная с момента времени  $t_0$  оболочки подвергаются воздействию избыточного давления  $p(t)$ , порожденного воздушной взрывной волной [26]:

$$\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} \equiv p(t) = \begin{cases} p_{\max} \cdot t/t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \cdot \exp[-\alpha(t - t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \quad (25)$$

$$\alpha = -\ln(0.01)/(t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}, \quad p(t_{\min}) = 0.01p_{\max},$$

где смысл величин  $p_{\max}, t_{\max}, t_{\min}$  и  $\alpha$  вполне очевиден и описан в [22, 23]. В соответствии с экспериментальными данными [26] в расчетах задано  $t_{\max} = 0.1$  мс и  $t_{\min} = 2$  мс. Из соотношений (25) получаем: при  $p_{\max} > 0$  конструкции нагружены со стороны нижней (вогнутой) лицевой поверхности (при этом условно считаем  $\sigma_{33}^{(+)} \equiv 0$ ), а при  $p_{\max} < 0$  — со стороны верхней (выпуклой) поверхности (при этом принимаем  $\sigma_{33}^{(-)} \equiv 0$ ).

Теплообмен оболочек с окружающей средой через их лицевые поверхности реализуется в условиях естественной конвекции ( $\alpha^{(\pm)} = 30$  Вт/(м<sup>2</sup>·К) [29],  $q_{\infty}^{(\pm)} \equiv 0$ ) при температуре воздуха, равной температуре естественного состояния конструкций:  $\Theta_{\infty}^{(\pm)} = \Theta^0$  (см. (20)). На торцевых поверхностях цилиндрических панелей задана температура, которая поддерживается равной  $\Theta^0$ .

Оболочки выполнены из эпоксисвязующего [17], армированного стеклянными волокнами [16] (стеклопластик), или магниевового сплава ВТ65 [30], усиленного стальной проволокой У8А [16] (металлокомпозиция). Упругопластическое поведение компонентов композиции при постоянной температуре  $\Theta$  и активном нагружении определяется билинейной диаграммой растяжения — сжатия:

$$\sigma = \begin{cases} E^{(k)}\varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)}/E^{(k)}, \\ \text{sign}(\varepsilon)\sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)}(\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon)\varepsilon_s^{(k)}), & |\varepsilon| > \varepsilon_s^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq K, \end{cases}$$

где  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  — осевое напряжение и соответствующая ему деформация;  $E^{(k)} = E^{(k)}(\Theta)$ ,  $E_s^{(k)} = E_s^{(k)}(\Theta)$  — модули Юнга и линейного упрочнения материала  $k$ -й фазы композиции;  $\sigma_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)}(\Theta)$  — предел текучести этого же компонента. Физико-механические характеристики материалов фаз композиций представлены в таблице, где  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности,  $\alpha$  — коэффициент линейного теплового расширения,  $c$  — удельная теплоемкость, а в скобках приведено значение температуры ( $\Theta$ , °C), при которой была определена данная характеристика. В расчетах использованы линейные аппроксимации по  $\Theta$  для всех физико-механических характеристик по данным, указанным в таблице.

Для дискретизации задачи по пространственным переменным  $x_1$  и  $x_2$  использована равномерная сетка с шагами  $\Delta x_1 = \Delta x_2 = b/50$ , а шаг по времени  $\tau$  задавался равным 0.25 мкс. Необходимые условия устойчивости разработанной численной схемы при этом выполняются с запасом (см. соотношения (6.3) в [23]).

Пологие оболочки армированы двумя ( $K = 2$ ) семействами непрерывных волокон, ориентированных по направлениям  $Ox_1$  и  $Ox_2$  (см. рис. 1), с плотностями  $\omega_1 = 0.1$  и  $\omega_2 = 0.3$  соответственно. Углы армирования при этом имеют следующие значения (см. рис. 2):  $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$ ,  $\varphi_1 = 0$  и  $\varphi_2 = \pi/2$ .

В [23] были проведены расчеты для гибких КМ-пластин с рассматриваемой структурой армирования при тех же характерных размерах тонкостенных конструкций ( $h$ ,  $a$ ,  $b$  и  $f = 0$ ). При этом в соотношениях (2) и (3) принималось значение  $M = 0$  (использовалась теория изгиба Амбарцумяна [1]),

Физико-механические характеристики материалов композиций [16, 17, 30]  
[Physico-mechanical characteristics of the components of composite [16, 17, 30]]

Характеристика материала [Material characteristic]	Эпоксисвязующее [Epoxy]	Стекловолокно [Fiberglass]	Магниевый сплав ВТ65(Mg) [VT65(Mg) magnesium alloy]	Стальная проволока У8А [U8A steel wire]
$\rho$ , kg/m <sup>3</sup>	1210.0 (20 °C) 1208.0 (40 °C)	2520.0 (20 °C) 2519.6 (80 °C)	1800.0 (20 °C) 1796.2 (100 °C)	7800.0 (20 °C) 7791.8 (100 °C)
$E$ , GPa	2.8 (20 °C) 2.3 (40 °C)	86.8 (20 °C) 86.3 (80 °C)	43.0 (20 °C) 38.5 (100 °C)	210.0 (20 °C) 195.0 (100 °C)
$\nu$	0.33 (20 °C) 0.333 (40 °C)	0.25 (20 °C) 0.254 (80 °C)	0.330 (20 °C) 0.334 (100 °C)	0.3 (20 °C) 0.305 (100 °C)
$\sigma_s$ , МПа	20 (20 °C) 18 (40 °C)	4500 (20 °C) 4400 (80 °C)	267 (20 °C) 219 (100 °C)	3968 (20 °C) 3971 (200 °C)
$E_s$ , GPa	1.114 (20 °C) 0.783 (40 °C)	6.230 (20 °C) 5.168 (80 °C)	0.379 (20 °C) 0.367 (100 °C)	6.973 (20 °C) 5.014 (200 °C)
$\lambda$ , W/(m · K)	0.243 (20 °C) 0.240 (40 °C)	0.89 (20 °C) 0.86 (80 °C)	117.23 (20 °C) 121.42 (100 °C)	42.7 (20 °C) 41.7 (100 °C)
$\alpha \cdot 10^6$ , K <sup>-1</sup>	68.1 (20 °C) 70.3 (40 °C)	2.5 (20 °C) 2.6 (80 °C)	20.9 (20 °C) 22.6 (100 °C)	12.3 (20 °C) 13.2 (100 °C)
$c$ , kJ/(kg · K)	1.54 (20 °C) 1.60 (40 °C)	0.800 (20 °C) 0.839 (80 °C)	1.032 (20 °C) 1.054 (100 °C)	0.485 (20 °C) 0.488 (100 °C)

а в разложении температуры (14) варьировалось значение  $L \geq 2$ . Было показано, что в динамически изгибаемых КМ-пластинах температурные поля следует определять по формуле (14) при задании в них  $L = 6$  или  $L = 7$ .

В работе же [22] было продемонстрировано, что в случае изотермического изгибного динамического деформирования пологих КМ-оболочек для адекватного описания их неупругого механического поведения в кинематических соотношениях (2) и (3) нужно принимать не  $M = 0$ , а  $M = 6$  или  $M = 7$  (т. е. следует применять уточненную теорию изгиба).

Как уже отмечалось ранее, в данной работе исследуется влияние использования уточненных соотношений (2) и (3) (при  $M = 7$ ) на результаты расчета термомеханического отклика динамически изгибаемых искривленных КМ-панелей при упругопластическом деформировании материалов компонентов их композиций.

В связи с этим на рис. 3 изображены зависимости максимальных значений температуры  $\Theta_m(t; M) = \max_{\mathbf{r}} \Theta(t, \mathbf{r}; M)$  в рассматриваемых пологих КМ-оболочках. При этом на основании результатов, полученных в [23], в формуле (14) было принято  $L = 7$ . Кривые 1 и 2 рассчитаны соответственно при  $M = 0$  (теория Амбарцумяна) и  $M = 7$  (уточненная теория изгиба) для стеклопластиковой панели, нагруженной снизу (рис. 3, а) при  $p_{\max} = 8$  МПа (см. (25)) и сверху (рис. 3, б) при  $p_{\max} = -8$  МПа, а также металлокомпозитной конструкции, нагруженной сверху при  $p_{\max} = -30$  МПа (рис. 3, в). Для случая нагружения металлокомпозитной оболочки снизу ( $p_{\max} = 30$  МПа) зависимости  $\Theta_m(t; M)$  здесь не приводятся, так как кривые 1 и 2 при этом на рассматриваемом интервале времени  $0 \leq t \leq 24$  мс практически совпадают (незначительное различие наблюдается лишь при  $t > 22$  мс).

Сравнение кривых 1 и 2 на рис. 3 показывает, что температурные поля, рассчитанные по простейшей неклассической теории изгиба искривленной КМ-панели — теории Амбарцумяна (см. кривые 1) — и по уточненной теории изгиба (см. кривые 2), с течением времени все более различаются. Следовательно, есть основания предполагать, что теория Амбарцумяна, широко используемая в расчетной практике, в случае динамического термоупругопластического деформирования тонкостенных КМ-конструкций типа оболочек может оказаться непригодной для проведения таких расчетов. Окончательное же решение этого вопроса возможно только после сравнения с результатами соответствующих экспериментов, которые автору неизвестны. (Здесь следует отметить, что дополнительные расчеты показали: в случаях квазистатического нагружения и динамического термоупругого деформирования пологих КМ-оболочек результаты, полученные по теории Амбарцумяна и по уточненной теории изгиба, практически совпадают.)

Сделанный выше вывод подтверждают и расчеты поперечных колебаний рассматриваемых панелей. Так, на рис. 4 представлены осцилляции прогиба центральной точки стеклопластиковой пологой КМ-оболочки ( $w_0(t) \equiv w(t, 0, 0)$ ), определенные при  $p_{\max} = 8$  МПа (рис. 4, а) и  $p_{\max} = -8$  МПа (рис. 4, б). Кривые 1 и 2 на рис. 4 получены при тех же значениях  $M$ , что и на рис. 3, а кривые 2' на рис. 4 изображены для сравнения: они рассчитаны по уточненной теории изгиба и соответствуют изотермическому упругопластическому случаю, когда изменение температуры в пологой КМ-оболочке не учитывается. Поведение кривых 1 и 2 на рис. 4 свидетельствует

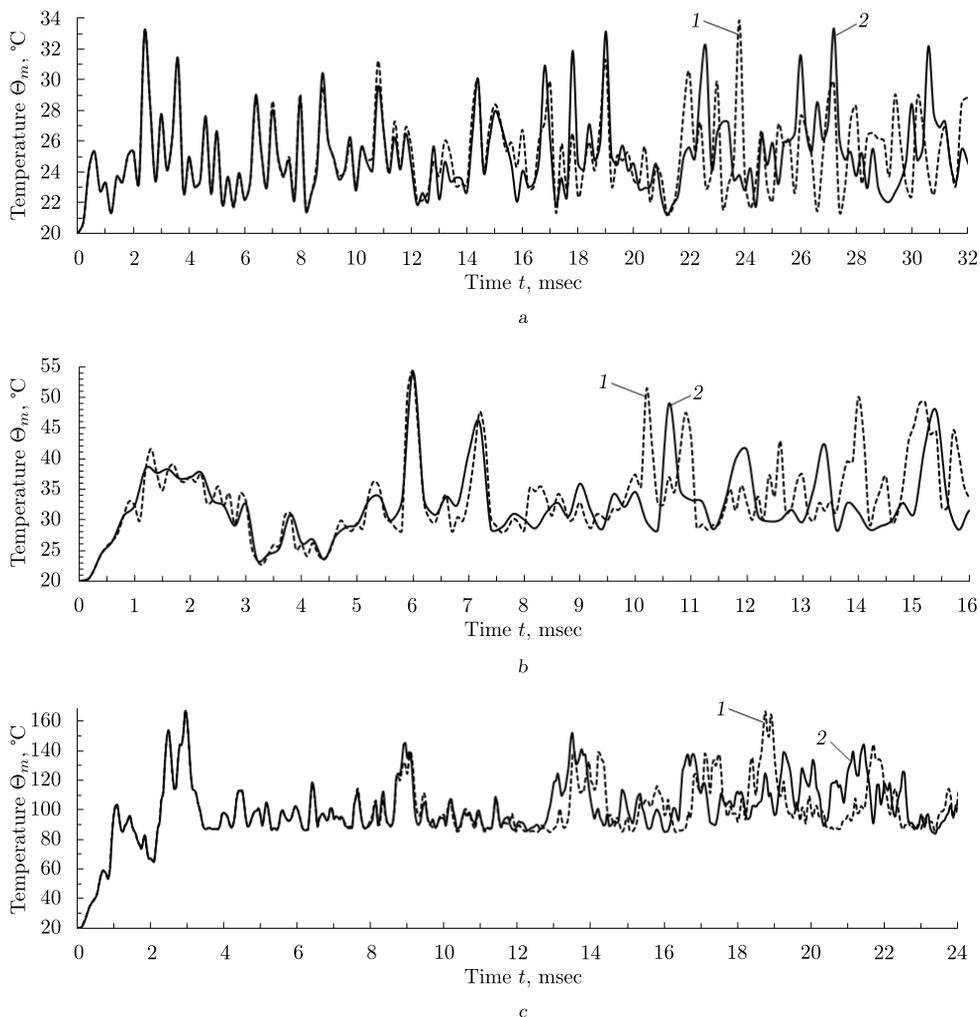


Рис. 3. Зависимость от времени максимального значения температуры в стеклопластиковой полой оболочке, нагруженной снизу (а) и сверху (б), а также в металлокомпозитной панели, нагруженной сверху (с)

[Figure 3. Time dependence of the maximum temperature value in a fiberglass shallow shell loaded from below (a) and from above (b), as well as in a metal-composite panel loaded from above (c)]

о том, что с увеличением времени зависимости  $w_0(t)$ , рассчитанные по теории Амбарцумяна (кривые 1) и по уточненной теории (кривые 2), существенно различаются. Аналогичное сопоставление кривых 2 и 2' демонстрирует, что с увеличением  $t$  зависимости  $w_0(t)$ , определенные с учетом (кривые 2) и без учета (кривые 2') температурного отклика в искривленной стеклопластиковой панели, все более отличаются друг от друга. Согласно этим результатам, в еще большей степени различаются напряженно-деформированные состояния в компонентах композиции таких тонкостенных конструкций, рассчитанные по теории Амбарцумяна ( $M = 0$ ) и уточненной теории изгиба ( $M = 7$ ), а также с учетом и без учета температурных полей, возникающих в них. Соответствующие зависимости здесь не представлены.

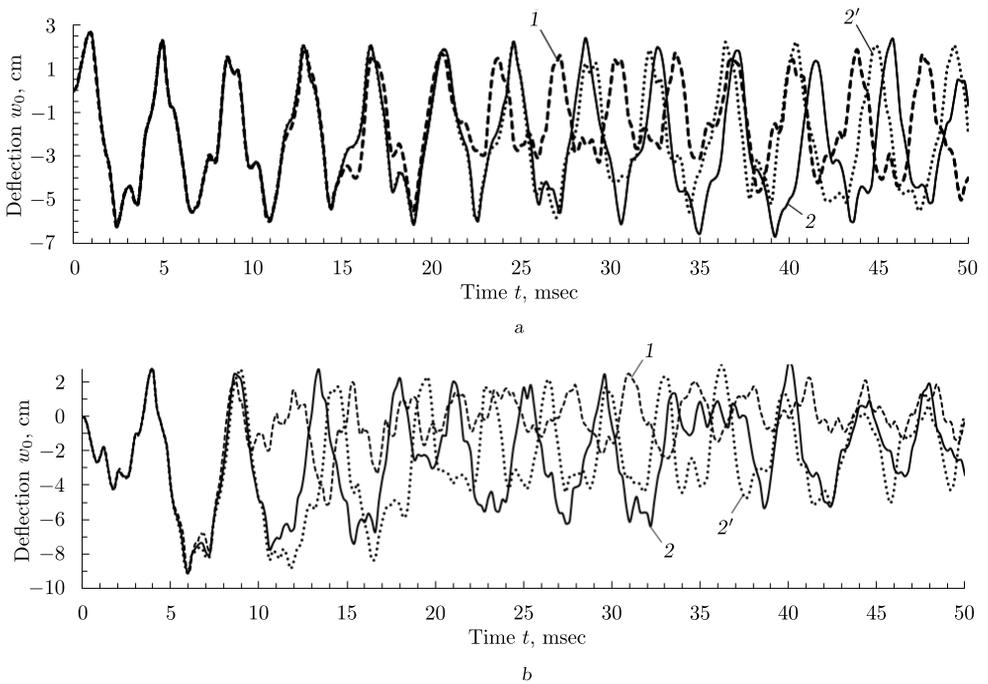


Рис. 4. Осцилляции прогиба центральной точки стеклопластиковой полой оболочки, нагруженной снизу (а) и сверху (б), рассчитанные по разным теориям изгиба

[Figure 4. Deflection oscillations of the central point of a fiberglass shallow shell loaded from below (a) and from above (b) calculated using different bending theories]

На рис. 5 изображены аналогичные кривые 1, 2 и 2', рассчитанные для металлокомпозитной полой оболочки при  $p_{\max} = 30$  МПа (рис. 5, а) и  $p_{\max} = -30$  МПа (рис. 5, б). Как видно из рис. 5, б, при нагружении искривленной Mg-У8А-панели сверху уже на рассматриваемом малом интервале времени ( $0 \leq t \leq 24$  мс) кривые 1 и 2, а также 2 и 2' значительно различаются между собой. Кривые 1 и 2 на рис. 5, а (нагружение снизу) визуально незначительно различаются между собой лишь при  $t \approx 23.5$  мс. Объяснятся это тем, что, как отмечалось выше, при нагружении металлокомпозитной полой оболочки снизу зависимости  $\Theta_m(t; M)$ , рассчитанные по теории Амбарцумяна (кривая 1) и по уточненной теории изгиба (кривая 2), заметно различаются только при  $t > 22$  мс. Однако сравнение кривых 2 и 2' на рис. 5, а свидетельствует о том, что даже в этом случае нагружения расчеты Mg-У8А-панели, выполненные по уточненной теории изгиба с учетом (кривая 2) и без учета (кривая 2') теплового отклика в ней, приводят к значительно различающимся зависимостям  $w_0(t)$ .

Несмотря на то, что на рис. 5, а кривые 1 и 2 визуально почти не различаются, деформированные состояния компонентов композиции, рассчитанные по теории Амбарцумяна и по уточненной теории изгиба, в этом случае на рассматриваемом интервале времени различаются весьма заметно. Так, на рис. 6 изображены осцилляции максимальных значений интенсивности деформаций  $\varepsilon_*^{(k)}$  ( $\varepsilon_m^{(k)}(t; M) = \max_{\mathbf{r}} \varepsilon_*^{(k)}(t, \mathbf{r}; M)$ ) связующего материала (рис. 6, а;  $k = 0$ ) и арматуры второго семейства (рис. 6, б;  $k = 2$ ), которая испытывает наи-

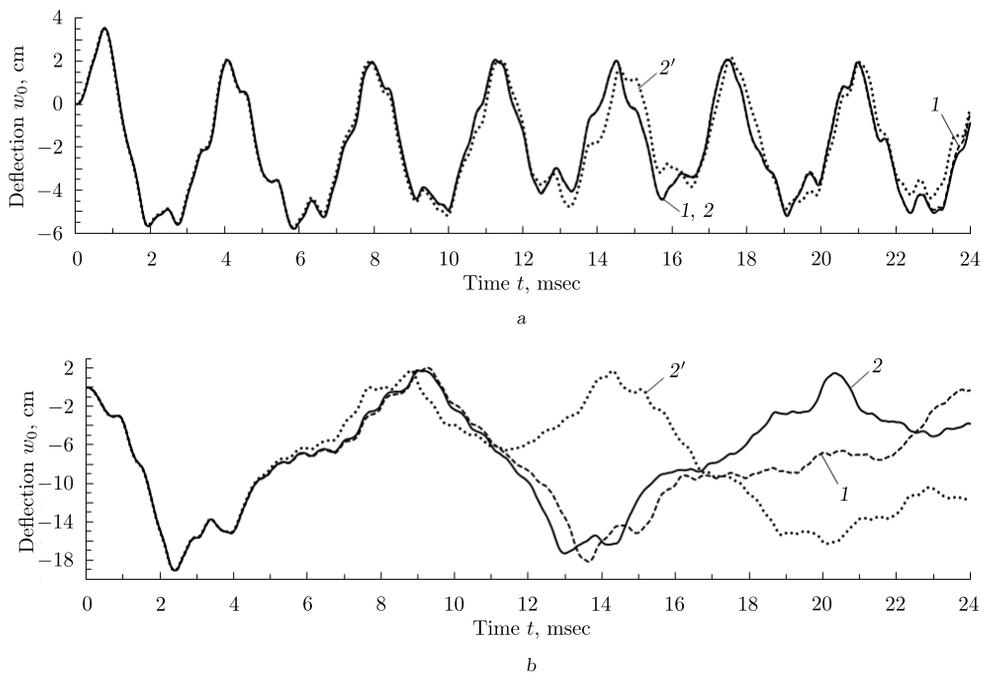


Рис. 5. Осцилляции прогиба центральной точки металлокомпозитной пологой оболочки, нагруженной снизу (а) и сверху (б), рассчитанные по разным теориям изгиба

[Figure 5. Deflection oscillations of the central point of a metal-composite shallow shell loaded from below (a) and from above (b) calculated using different bending theories]

большее деформирование в металлокомпозитной панели, нагруженной снизу. Кривые 1 и 2 на рис. 6 получены при тех же условиях, что и аналогичные кривые на рис. 5, а. Кривые 1 и 2 на рис. 6 (особенно на рис. 6, б) показывают, что расчет деформированного состояния материалов фаз композиции даже в этом случае необходимо проводить по уточненной теории изгиба (кривые 2). Действительно, поведение кривой 1 на рис. 6, б (расчет по теории Амбарцумяна) свидетельствует о том, что наибольшее значение интенсивности деформаций в волокнах второго семейства  $\varepsilon_{\max}^{(2)} = \max_t \varepsilon_m^{(2)}(t)$  достигается при  $t = 19.1$  мс и равно 4.99%, а согласно поведению кривой 2 на этом рисунке (уточненная теория изгиба), значение  $\varepsilon_{\max}^{(2)} = 4.78\%$  достигается при  $t = 6.7$  мс.

Согласно поведению кривой 2 на рис. 3, с, температура в металлокомпозитной панели, нагруженной сверху, в отдельных точках в некоторые моменты времени может достигать порядка 150–170 °С. При нагружении же такой пологой КМ-оболочки снизу температура не превышает 70 °С. (Как уже отмечалось, соответствующие зависимости  $\Theta_m(t; M)$  здесь не приводятся.) Целесообразно предположить, что высокий уровень нагрева динамически изгибаемой металлокомпозитной конструкции обусловлен тем, что в проведенных расчетах предполагалось: теплообмен КМ-панели с окружающей средой через лицевые поверхности реализуется при естественной конвекции воздуха ( $\alpha^{(\pm)} = 30$  Вт/(м<sup>2</sup>·К)). Однако при нагружении искривленной панели взрывной волной она осциллирует в поперечном направлении с высокой частотой (см. кривые на рис. 5), поэтому теплообмен через ее лицевые поверхности

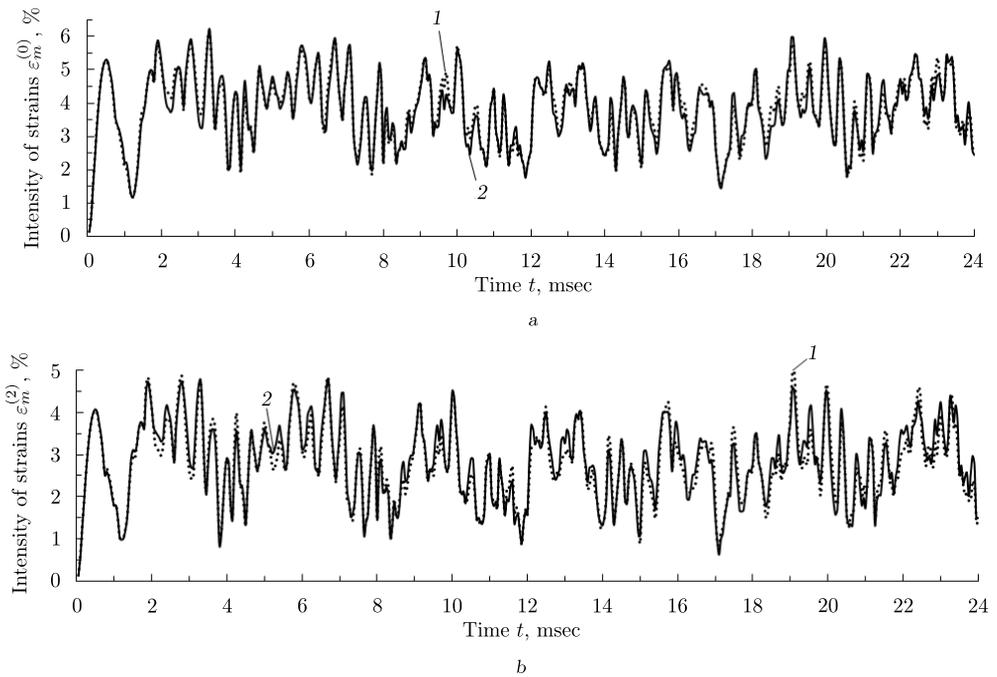


Рис. 6. Осцилляции максимальных значений интенсивности деформаций связующего материала (а) и волокон второго семейства (б) в металлокомпозитной полой оболочке, нагруженной снизу, рассчитанные по разным теориям изгиба

[Figure 6. Oscillations of the maximum values of the intensity of strains of the binder material (a) and fibers of the second family (b) in a metal-composite shallow shell loaded from below, calculated according to different bending theories]

следовало бы моделировать не при естественной, а при вынужденной конвекции. Согласно этому допущению, были выполнены дополнительные расчеты при значении коэффициентов теплоотдачи  $\alpha^{(\pm)} = 300 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$  (см. равенства (20)), которое характеризует вынужденную конвекцию для газов [29]. Определенные таким образом значения  $\Theta_m(t; M)$  отличаются от полученных ранее, т. е. при естественной конвекции (см. рис. 3), лишь в четвертой значащей цифре. А значит, увеличение коэффициентов теплоотдачи на лицевых поверхностях изучаемых искривленных КМ-панелей в 10 раз практически не оказывает влияния на результаты расчетов их неизотермического упругопластического поведения на рассматриваемых временных интервалах ( $0 \leq t \leq 50 \text{ мс}$ ). Следовательно, на таких, достаточно малых, интервалах времени теплофизические процессы в полых КМ-оболочках можно считать адиабатическими, т. е. можно не учитывать кондуктивную составляющую процесса теплопереноса в них.

**Закключение.** Разработанная математическая модель неизотермического упругопластического поведения гибких полых оболочек с произвольными структурами армирования непрерывными волокнами позволяет аппроксимировать тангенциальные перемещения и температуру в поперечном направлении с разной степенью точности.

Сравнительный анализ термоупругопластической динамики искривленных КМ-панелей показал, что в отличие от гибких армированных пластин [23]

как стеклопластиковые, так и металлокомпозитные пологие оболочки, нагруженные в поперечном направлении, необходимо рассчитывать, учитывая тепловой отклик в них. При этом целесообразно использовать не простейшую неклассическую теорию изгиба таких тонкостенных элементов конструкций (теорию Амбарцумяна [1, 23]), а уточненную теорию изгиба [22].

Выполненные расчеты показали, что при нагружении поперечной взрывной волной относительно тонкие искривленные панели из стеклопластика в отдельных точках кратковременно (менее 1 мс) могут дополнительно нагреваться на 14–34 °С (аналогичные по структуре и характерным размерам стеклопластиковые пластины нагреваются не более чем на 14 °С [23]), а металлокомпозитные пологие оболочки в отдельных точках способны дополнительно нагреваться на 50 °С при их нагружении со стороны вогнутой лицевой поверхности и на 150 °С при нагружении со стороны выпуклой лицевой поверхности (аналогичные металлокомпозитные гибкие пластины нагреваются не выше, чем на 30–32 °С [23]). Более интенсивное тепловыделение и, как результат, более активное воздействие температурных полей на механический отклик всегда наблюдается при динамическом нагружении искривленных КМ-панелей со стороны их выпуклой лицевой поверхности.

При нагружении пологой КМ-оболочки взрывной волной с любой лицевой стороны наблюдается ее прощелкивание в сторону вогнутости. Максимальный модуль прогиба конструкции при таком прощелкивании, которое реализуется позже прекращения действия нагрузки, в случае нагружения пологой оболочки со стороны ее выпуклой лицевой поверхности значительно превосходит аналогичную величину при нагружении искривленной панели со стороны ее вогнутой лицевой поверхности. Это обстоятельство и объясняет более интенсивное тепловыделение в первом случае. Наибольшее значение температуры в отдельных точках пологой КМ-оболочки достигается именно в момент ее прощелкивания.

**Конкурирующие интересы.** Конкурирующих интересов не имею.

**Авторский вклад и ответственность.** Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

**Финансирование.** Работа выполнена в рамках государственного задания (№ регистрации 121030900260-6).

### Библиографический список

1. Амбарцумян С. А. *Общая теория анизотропных оболочек*. М.: Наука, 1974. 446 с.
2. Богданович А. Е. *Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек*. Рига: Зинатне, 1987. 295 с.
3. Куликов Г. М. Термоупругость гибких многослойных анизотропных оболочек // *Изв. РАН. МТТ*, 1994. № 2. С. 33–42. EDN: [SLRUCB](https://doi.org/10.1016/S1359-835X(01)00008-2).
4. Bannister M. Challenges for composites into the next millennium — a reinforcement perspective // *Compos. Part A: Appl. Sci. Manuf.*, 2001. vol.32, no.7. pp. 901–910. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1359-835X\(01\)00008-2](https://doi.org/10.1016/S1359-835X(01)00008-2).
5. Абросимов Н. А., Баженов В. Г. *Нелинейные задачи динамики композитных конструкций*. Н. Новгород: ННГУ, 2002. 400 с.
6. Reddy J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis*. Boca Raton: CRC Press, 2004. xxiii+831 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/b12409>.

7. Qatu M. S., Sullivan R. W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 // *Compos. Struct.*, 2010. vol. 93, no. 1. pp. 14–31. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.05.014>.
8. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2011. vol. 46, no. 5. pp. 807–817. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011>.
9. Андреев А. *Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа*. Saarbrücken: Palmarium Academic Publ., 2013. 93 с. EDN: QZAPNP.
10. Vasiliev V. V., Morozov E. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements*. Amsterdam: Elsevier, 2013. xii+412 pp. EDN: UERHXD. DOI: <https://doi.org/10.1016/C2011-0-07135-1>.
11. Gill S. K., Gupta M., Satsangi P.S. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass fiber reinforced plastics composite // *Front. Mech. Eng.*, 2013. vol. 8, no. 2. pp. 187–200. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11465-013-0262-x>.
12. Соломонов Ю. С., Георгиевский В. П., Недбай А. Я., Андришин В. А. *Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек*. М.: Физматлит, 2014. 408 с. EDN: UGLCQJ.
13. Morinière F. D., Alderliesten R. C., Benedictus R. Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates — A review // *Int. J. Impact Eng.*, 2014. vol. 67. pp. 27–38. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2014.01.004>.
14. Gibson R. F. *Principles of Composite Material Mechanics*. Boca Raton: CRC Press, 2016. xxiii+700 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/b19626>.
15. Димитриенко Ю. И. *Механика композитных конструкций при высоких температурах*. М.: Физматлит, 2019. 448 с [https://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o\\_2079143#1](https://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o_2079143#1).
16. *Композиционные материалы: Справочник* / ред. Д. М. Карпинос. Киев: Наук. думка, 1985. 592 с.
17. *Handbook of Composites* / ed. G. Lubin. New York: Van Nostrand Reinhold, 1982.
18. Leu S.-Y., Hsu H.-C. Exact solutions for plastic responses of orthotropic strain-hardening rotating hollow cylinders // *Int. J. Mech. Sci.*, 2010. vol. 52, no. 12. pp. 1579–1587. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2010.07.006>.
19. Vena P., Gastaldi D., Contro R. Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites // *Int. J. Plasticity*, 2008. vol. 24, no. 3. pp. 483–508. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2007.07.001>.
20. Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L. Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle // *Int. J. Plasticity*, 2012. vol. 36. pp. 86–112. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.03.010>.
21. Ахундов В. М. Инкрементальная каркасная теория сред волокнистого строения при больших упругих и пластических деформациях // *Мех. композ. матер.*, 2015. Т. 51, № 3. С. 539–558.
22. Янковский А. П. Уточненная модель упругопластического изгибного деформирования гибких армированных пологих оболочек, построенная на основе явной схемы типа «крест» // *Вычисл. мех. сплош. сред*, 2017. Т. 10, № 3. С. 276–292. EDN: ZHZVIN DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.3.22>.
23. Янковский А. П. Моделирование термоупруговязкопластического деформирования гибких армированных пластин // *ПММ*, 2022. Т. 86, № 1. С. 121–150. EDN: EKGCRN DOI: <https://doi.org/10.31857/S003282352201009X>.
24. Reissner E. On transverse vibrations of thin shallow elastic shells // *Quart. Appl. Math.*, 1955. vol. 13, no. 2. pp. 169–176. DOI: <https://doi.org/10.1090/qam/69715>.
25. Грешнов В. М. *Физико-математическая теория больших необратимых деформаций металлов*. М.: Физматлит, 2018. 232 с.
26. Houlston R., DesRochers C. G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // *Comp. Struct.*, 1987. vol. 26, no. 1–2. pp. 1–15. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(87\)90232-X](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90232-X).

27. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. *Сопротивление жестких полимерных материалов*. Рига: Зинатне, 1972. 500 с.
28. Янковский А. П. Моделирование процессов теплопроводности в пространственно-армированных композитах с произвольной ориентацией волокон // *Прикл. физ.*, 2011. № 3. С. 32–38. EDN: [NURWHZ](#).
29. Луканин В. Н., Шатров М. Г., Камфер Г. М. [и др.] *Теплотехника* / ред. В. Н. Луканин. М.: Высш. шк., 2003. 671 с. EDN: [QMHYSH](#).
30. Безухов Н. И., Бажанов В. Л., Гольденблат И. И. [и др.] *Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур* / ред. И. И. Гольденблат. М.: Машиностроение, 1965. 567 с.

MSC: 74K20

## Modeling of non-isothermal elastic-plastic behavior of reinforced shallow shells in the framework of a refined bending theory

*A. P. Yankovskii*

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics,  
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,  
4/1, Institutskaya st., Novosibirsk, 630090, Russian Federation.

### Abstract

The dynamic problem of non-isothermal and inelastic deformation of flexible shallow multidirectionally reinforced shells is formulated in the frameworks of the refined theory of bending. The temperature is approximated by a 7th order polynomial over the thickness of constructions. The geometric nonlinearity of the problem is modeled by the Karman approximation. The solution of the formulated coupled nonlinear two-dimensional problem is obtained using an explicit numerical scheme. The thermo-elastic-plastic response of fiberglass and metal-composite cylindrical elongated panels with an orthogonal reinforcement structure, loaded frontally with an air blast wave, has been studied. It is shown that, unlike reinforced plates similar in structure and characteristic dimensions, shallow shells under intense short-term loading must be calculated taking into account the occurrence of temperature fields in them. In this case, the refined theory of bending of curved panels should be used instead of the simplified version (the non-classical theory of Ambartsumyan). The temperature increment at separate points of shallow fiberglass shells can reach 14–34 °C, and in similar metal-composite panels can reach 50–150 °C. Cylindrical shallow shells are more intensively deformed when they are loaded by an air blast wave from the side of a convex front surface.

**Keywords:** flexible shallow shells, multidirectional reinforcement, dynamic deformation, coupled thermo-elastic-plasticity, refined bending theory, explicit numerical scheme.

Received: 26<sup>th</sup> September, 2022 / Revised: 28<sup>th</sup> December, 2022 /

Accepted: 13<sup>th</sup> February, 2023 / First online: 27<sup>th</sup> March, 2023

---

### Mechanics of Solids

#### Research Article

© Authors, 2023

© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

#### Please cite this article in press as:

Yankovskii A. P. Modeling of non-isothermal elastic-plastic behavior of reinforced shallow shells in the framework of a refined bending theory, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 1, pp. 119–141. EDN: YRWNPW. DOI: [10.14498/vsgtu1958](https://doi.org/10.14498/vsgtu1958) (In Russian).

#### Author's Details:

*Andrei P. Yankovskii*  <https://orcid.org/0000-0002-2602-8357>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Leading Research Scientist; Lab. of Fast Processes Physics;

e-mail: [lab4nemir@rambler.ru](mailto:lab4nemir@rambler.ru)

**Competing interests.** I hereby declare that I have no conflict of interest in the authorship and publication of this article.

**Author's Responsibilities.** I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

**Funding.** The research was carried out within the framework of a state assignment; state registration number — 121030900260-6.

## References

1. Ambartsumian S. A. *Obshchaia teoriia anizotropnykh obolochek* [The General Theory of Anisotropic Shells]. Moscow, Nauka, 1974, 446 pp. (In Russian)
2. Bogdanovich A. E. *Nelineinye zadachi dinamiki tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek* [Nonlinear Problems of the Dynamics of Cylindrical Composite Shells]. Riga, Zinatne, 1987, 295 pp. (In Russian)
3. Kulikov G. M. Thermoelasticity of flexible multilayer anisotropic shells, *Mech. Solids*, 1994, vol. 29, no. 2, pp. 27–35. EDN: TVBRLF.
4. Bannister M. Challenges for composites into the next millennium — a reinforcement perspective, *Compos. Part A: Appl. Sci. Manuf.*, 2001, vol. 32, no. 7, pp. 901–910. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1359-835X\(01\)00008-2](https://doi.org/10.1016/S1359-835X(01)00008-2).
5. Abrosimov N. A., Bazhenov V. G. *Nelineinye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruksii* [Nonlinear Problems of Dynamics Composites Designs]. Nizhniy Novgorod, Nizhniy Novgorod State Univ., 2002, 400 pp. (In Russian)
6. Reddy J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis*. Boca Raton, CRC Press, 2004, xxiii+831 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/b12409>.
7. Qatu M. S., Sullivan R. W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009, *Compos. Struct.*, 2010, vol. 93, no. 1, pp. 14–31. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.05.014>.
8. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2011, vol. 46, no. 5, pp. 807–817. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011>.
9. Andreev A. *Uprugost' i termouprugost' sloistnykh kompozitnykh obolochek. Matematicheskaya model' i nekotorye aspekty chislennogo analiza* [Elasticity and Thermoelasticity of Layered Composite Shells. Mathematical Model and Some Aspects of Numerical Analysis]. Saarbrücken, Palmarium Academic Publ., 2013, 93 pp. (In Russian). EDN: QZAPNP.
10. Vasiliev V. V., Morozov E. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements*. Amsterdam, Elsevier, 2013, xii+412 pp. EDN: UERHXD. DOI: <https://doi.org/10.1016/C2011-0-07135-1>.
11. Gill S. K., Gupta M., Satsangi P.S. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass fiber reinforced plastics composite, *Front. Mech. Eng.*, 2013, vol. 8, no. 2, pp. 187–200. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11465-013-0262-x>.
12. Solomonov Yu. S., Georgievskii V. P., Nedbai A. Ya., Andryushin V. A. *Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek* [Applied Problems of Mechanics of Composite Cylindrical Shells]. Moscow, Fizmatlit, 2014, 408 pp. (In Russian)
13. Morinière F. D., Alderliesten R. C., Benedictus R. Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates — A review, *Int. J. Impact Eng.*, 2014, vol. 67, pp. 27–38. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2014.01.004>.
14. Gibson R. F. *Principles of Composite Material Mechanics*. Boca Raton, CRC Press, 2016, xxiii+700 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/b19626>.
15. Dimitrienko Yu. I. *Mekhanika kompozitnykh konstruksii pri vysokikh temperaturakh* [Mechanics of Composite Structures under High Temperatures]. Moscow, Fizmatlit, 2019, 448 pp. (In Russian). [https://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o\\_2079143#1](https://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o_2079143#1)
16. *Kompozitsionnye materialy: Spravochnik* [Composite Materials: Handbook], ed. D. M. Karpinos. Kiev, Nauk. Dumka, 1985, 592 pp. (In Russian)

17. *Handbook of Composites*, ed. G. Lubin. New York, Van Nostrand Reinhold, 1982.
18. Leu S.-Y., Hsu H.-C. Exact solutions for plastic responses of orthotropic strain-hardening rotating hollow cylinders, *Int. J. Mech. Sci.*, 2010, vol. 52, no. 12, pp. 1579–1587. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2010.07.006>.
19. Vena P., Gastaldi D., Contro R. Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites, *Int. J. Plasticity*, 2008, vol. 24, no. 3, pp. 483–508. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2007.07.001>.
20. Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L. Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle, *Int. J. Plasticity*, 2012, vol. 36, pp. 86–112. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.03.010>.
21. Akhundov V. M. Incremental carcass theory of fibrous media under large elastic and plastic deformations, *Mech. Compos. Mater.*, 2015, vol. 51, no. 3, pp. 383–396. EDN: MCFUEJ. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11029-015-9509-4>.
22. Yankovskii A. P. A refined model of elastic-plastic bending deformation of flexible reinforced shallow shells based on explicit “cross” scheme, *Comput. Cont. Mech.*, 2017, vol. 10, no. 3, pp. 276–292 (In Russian). EDN: ZHZVIN DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.3.22>.
23. Yankovskii A. P. Modeling of thermoelastic-visco-plastic deformation of flexible reinforced plates, *Mech. Solids*, 2022, vol. 57, no. 7, pp. 111–133. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654422070184>.
24. Reissner E. On transverse vibrations of thin shallow elastic shells, *Quart. Appl. Math.*, 1955, vol. 13, no. 2, pp. 169–176. DOI: <https://doi.org/10.1090/qam/69715>.
25. Greshnov V. M. *Physico-Mathematical Theory of High Irreversible Strains in Metals*. Boca Raton, CRC Press, 2019, xii+242 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/9780429259791>.
26. Houlston R., DesRochers C. G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading, *Comp. Struct.*, 1987, vol. 26, no. 1–2, pp. 1–15. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(87\)90232-X](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90232-X).
27. Malmeister A. K., Tamuzh V. P., Teters G. A. *Soprotivlenie zhestkikh polimernykh materialov* [Resistance of Rigid Polymeric Materials]. Riga, Zinatne, 1972, 500 pp. (In Russian)
28. Yankovskii A. P. Simulation of processes of heat conductivity in spatially reinforced composites with an arbitrary orientation of fibers, *Prikl. Fiz.*, 2011, no. 3, pp. 32–38 (In Russian). EDN: NURWHZ.
29. Lukanin V. N., Shatrov M. G., Kamfer G. M., et al. *Teplotekhnika* [Heat Engineering], ed. V. N. Lukanin. Moscow, Vyssh. Shk., 2003, 671 pp. (In Russian). EDN: QMHYSH.
30. Bezukhov N. I., Bazhanov V. L., Gol'denblat I. I., et al. *Raschety na prochnost', ustoychivost' i kolebaniia v usloviakh vysokikh temperatur* [Calculations for Strength, Stability Vibrations under High Temperatures], ed. I. I. Gol'denblat. Moscow, Mashinostroenie, 1965, 567 pp. (In Russian)