



УДК 539.3

К теории гемитропных тензоров четвертого ранга в трехмерных пространствах Евклида

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,
Россия, 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1.

Аннотация

Рассматриваются представляющие интерес с точки зрения механики микрополярных континуумов тензоры с постоянными компонентами, полуизотропные тензоры и псевдотензоры. Обсуждаются свойства и способы координатного представления тензоров и псевдотензоров с постоянными компонентами. На основе неконвенционального определения полуизотропного тензора четвертого ранга приводится координатное представление в терминах дельт Кронекера и метрических тензоров. Выясняются условия приведения произвольного (arbitrary) полуизотропного тензора четвертого ранга к тензору с постоянными компонентами. Координатные представления для определяющих тензоров и псевдотензоров, использующихся при математическом моделировании линейных гемитропных микрополярных континуумов, даны в терминах метрического тензора. Устанавливаются условия ковариантного постоянства псевдотензоров с постоянными компонентами и полуизотропных тензоров.

Ключевые слова: тензор, псевдотензор, тензор четверго ранга, определяющий псевдотензор, гемитропность, микрополярность, упругость, тензор с постоянными компонентами, полуизотропный тензор.

Получение: 14 июля 2022 г. / Исправление: 5 сентября 2022 г. /
Принятие: 13 сентября 2022 г. / Публикация онлайн: 26 сентября 2022 г.

Механика деформируемого твердого тела Краткое сообщение

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории гемитропных тензоров четвертого ранга в трехмерных пространствах Евклида // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 3. С. 592–602. EDN: [AFCREX](#). DOI: [10.14498/vsgtu1941](https://doi.org/10.14498/vsgtu1941).

Сведения об авторах

Евгений Валерьевич Мурашкин <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>

кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: evmurashkin@gmail.com

Юрий Николаевич Радаев <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>

доктор физико-математических наук, профессор; ведущий научный сотрудник; лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

1. Введение. В математических моделях современной механики континуума [1–7] особое значение имеют определяющие тензоры и псевдотензоры четвертого ранга, участвующие в записи определяющих уравнений линейных анизотропных микрополярных упругих сред. Поэтому привлечение формализма псевдотензорного анализа [8–12] необходимо для геометрически корректного построения определяющих уравнений микрополярных континуумов. При этом особую роль играет ротационная инвариантность (полуизотропность, демитропность, гемитропность) компонент тензоров и псевдотензоров [6, 13–16] и ковариантное постоянство¹ псевдотензорного поля [8, 11, 12]. Достаточно подробное и полное описание псевдотензорного формализма можно найти в книгах по тензорному анализу и механике сплошных сред [8–12]. Использование псевдотензорного формализма имеет исключительное значение при разработке математических моделей изотропных и гемитропных микрополярных упругих сред (см. [17–21]).

Основной целью работы является исследование свойств тензоров четвертого ранга и их координатных представлений, представляющих интерес с точки зрения механики микрополярных континуумов [17–24]. Во втором разделе статьи обсуждаются свойства и способы координатного представления тензоров и псевдотензоров с постоянными компонентами. Рассмотрен алгоритм получения ковариантно постоянных тензоров и псевдотензоров, предложенный в монографии [8]. Устанавливаются условия ковариантного постоянства псевдотензоров с постоянными компонентами. В третьем разделе обсуждается оптимальная неконвенциональная терминология, связанная с понятиями полностью изотропных, конвенционально изотропных, неконвенционально изотропных, полуизотропных (демитропных, гемитропных) тензоров и псевдотензоров четвертого ранга. На основе неконвенционального определения для полуизотропного тензора четвертого ранга приводится координатное представление в терминах дельт Кронекера и метрических тензоров. Выясняются условия приведения произвольного полуизотропного тензора четвертого ранга к тензору с постоянными компонентами. В четвертом разделе приводятся координатные представления для определяющих тензоров и псевдотензоров, используемых при математическом моделировании линейных гемитропных микрополярных континуумов.

В работе будет использована неконвенциональная терминология, существо которой будет разъяснено позже.

2. Тензоры и псевдотензоры с постоянными компонентами. Тензором (псевдотензором) с постоянными компонентами [8, стр. 164] называется тензор (псевдотензор), сохраняющий (retain) неизменными все свои компоненты при любых линейных преобразованиях координатного репера: самые важные из них — повороты, преобразования масштабирования (scaling), центральная инверсия, зеркальные отражения.

Абсолютный тензор второго ранга, с точностью до постоянного множителя a (абсолютного инварианта) совпадающий с единичным аффинором, будет

¹Например, вслед за И. С. Сокольниковым [12], ковариантные постоянные (параллельные) векторные поля Эйлера могут быть использованы для формулировки принципа виртуальных перемещений. Уравнения ковариантного постоянства учитываются, следуя правилу множителей Лагранжа [17]. Ковариантное постоянство псевдотензорных полей позволяет легко оперировать с ними при ковариантном дифференцировании [23].

тензором с постоянными компонентами:

$$C_k^h = a\delta_k^h.$$

Псевдотензор третьего ранга с постоянными компонентами пропорционален символам перестановок. Дельты Кронекера и символы перестановок — простейшие и самые важные примеры тензоров с постоянными компонентами.

Несложно показать, что наиболее общий абсолютный тензор четвертого ранга C_{sm}^{il} с постоянными компонентами можно представить в виде

$$C_{sm}^{il} = a\delta_s^i\delta_m^l + c\delta_s^l\delta_m^i, \quad (1)$$

где a и c — абсолютные инварианты (абсолютные скаляры).²

В монографии [8, стр. 164–176] предлагается общий алгоритм построения тензоров и псевдотензоров с постоянными компонентами для целых положительных (отрицательных) весов. Например, общий вид псевдотензора $C_{k_1k_2\dots k_r}^{h_1h_2\dots h_s}$ с постоянными компонентами целого отрицательного веса представляется формулой

$$C_{k_1k_2\dots k_r}^{h_1h_2\dots h_s} = \sum_{P=1}^{r!} \lambda_P \delta_{\{k_1}^{h_1} \delta_{k_2}^{h_2} \dots \delta_{k_s}^{h_s} \underbrace{\epsilon_{k_{s+1}\dots k_{s+N}}^{[-1]} \dots \epsilon_{k_{r-N+1}\dots k_r}^{[-1]}}_{|w|} \}_{P}, \quad (2)$$

где r — число ковариантных индексов, s — число контравариантных индексов, N — размерность пространства, w — вес, целое отрицательное число, λ_P ($P = 1, 2, \dots, r!$) — произвольные постоянные (абсолютные инварианты), P — перестановка ряда натуральных чисел

$$k_1, \dots, k_s, \dots, k_{s+N}, \dots, k_{r-N+1}, \dots, k_r.$$

В формуле (2) по ковариантным индексам, заключенным в фигурные скобки, производятся всевозможные перестановки. Число ковариантных, контравариантных индексов и вес псевдотензора должны удовлетворять ограничению

$$r = s + N|w|, \quad (3)$$

откуда

$$r \geq s.$$

Если условие (3) не выполняется, то псевдотензор $C_{k_1k_2\dots k_r}^{h_1h_2\dots h_s}$ с постоянными компонентами будет равен нулю.

Отметим, что псевдотензорное поле $C_{k_1k_2\dots k_r}^{h_1h_2\dots h_s}$ с постоянными компонентами является ковариантно постоянным и удовлетворяет псевдотензорному уравнению

$$\nabla_s C_{k_1k_2\dots k_r}^{h_1h_2\dots h_s} = 0,$$

²Ясно, что C_{12}^{12} и C_{21}^{12} также являются абсолютными инвариантами.

при условии

$$\nabla_s \lambda_P = 0.$$

Обратим внимание, что псевдотензоры вида (2) не составляют полного набора ковариантно постоянных абсолютных тензоров. Наглядный пример — параллельное векторное поле, которое является ковариантно постоянным вектором, но не может быть представлено в виде вектора с постоянными компонентами. Примеры ковариантно постоянных тензоров и псевдотензоров подробно обсуждались в работах (см. [8, 11, 12, 22, 23]). Среди них — фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр e^3 и его алгебраические степени, δ -символы, ϵ -символы, e -символы, метрические тензоры g^{kh} , g_{hk} которые часто используются в микрополярных теориях механики сплошных сред [18–21].

3. Абсолютные полуизотропные тензоры четвертого ранга. В дальнейшем будем придерживаться неконвенциональной терминологии. Неконвенционально изотропным (полностью изотропным) будем называть тензор (псевдотензор), не меняющий свои компоненты при любых поворотах координатного репера, зеркальных отражениях и центральных инверсиях трехмерного пространства [6, 13, 14, 16].

Конвенционально изотропным тензором (псевдотензором) называется тензор (псевдотензор), сохраняющий неизменными все свои компоненты при поворотах координатного репера. Конвенционально изотропные тензоры (псевдотензоры) терминологически лучше неконвенционально называть полуизотропными, демитропными или гемитропными.

Для абсолютного полуизотропного тензора четвертого ранга в декартовой системе координат будет справедливо представление [13, р. 77]:

$$H_{islm} = a\delta_{is}\delta_{lm} + \frac{b-c}{2}(\delta_{il}\delta_{sm} - \delta_{im}\delta_{sl}) + \frac{b-c}{2}(\delta_{il}\delta_{sm} + \delta_{im}\delta_{sl}),$$

т.е.

$$H_{islm} = a\delta_{is}\delta_{lm} + b\delta_{il}\delta_{sm} + c\delta_{im}\delta_{sl}. \quad (4)$$

Здесь a , b , c — ротационные инварианты, сохраняющие свои значения при поворотах декартова репера. В отличие от представления (1) для тензора с постоянными компонентами, в представлении (4) для полуизотропных тензоров четвертого ранга участвует слагаемое $\delta_{il}\delta_{sm}$ с множителем b .

Представление (4) легко записывается в произвольной системе координат после замены δ -символов на метрические тензоры:

$$H^{islm} = ag^{is}g^{lm} + bg^{il}g^{sm} + cg^{im}g^{sl}. \quad (5)$$

Так как компоненты метрического тензора g^{is} не меняются при поворотах координатного репера, то правая часть в (5), очевидно, также остается неизменной. Если считать a , b , c абсолютными инвариантами, то правая часть в (5) не будет также меняться при зеркальных отражениях и центральных инверсиях.

³В трехмерных пространствах Евклида $e = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)$, где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — ковариантные базисные векторы; $e^2 = \det(g_{ij})$. В многомерных пространствах Евклида фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр определяется с помощью косога произведения базисных векторов.

Полуизотропное тензорное поле H^{islm} оказывается ковариантно постоянным и удовлетворяет псевдотензорному уравнению

$$\nabla_k H^{islm} = 0$$

при условии ковариантного постоянства инвариантов a, b, c , т.е.

$$\nabla_k a = 0, \quad \nabla_k b = 0, \quad \nabla_k c = 0,$$

или

$$\partial_k a = 0, \quad \partial_k b = 0, \quad \partial_k c = 0.$$

Очевидно, что полностью изотропный тензор четвертого ранга не отличается от полуизотропного тензора.

4. Применение в линейных микрополярных теориях. Тензоры и псевдотензоры четвертого ранга играют исключительно важную роль в математических моделях линейных анизотропных микрополярных упругих континуумов [17, 21, 25].

Введем в рассмотрение микрополярный упругий потенциал $\mathcal{U}$, рассчитанный на единицу инвариантного элемента объема, с естественными псевдотензорными аргументами

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\epsilon_{ij}, \kappa_{i \cdot}^{[+1] \cdot s}),$$

где ϵ_{ij} — асимметричный тензор деформации; $\kappa_{i \cdot}^{[+1] \cdot s}$ — псевдотензор деформации изгиба–кручения. Упругий потенциал полагается абсолютным инвариантом (скаляром), не зависящим в том числе от зеркальных отражений и центральной инверсии трехмерного пространства.

В случае линейного анизотропного микрополярного упругого тела упругий потенциал в произвольной системе координат получается в форме

$$\mathcal{U} = H_1^{islm} \epsilon_{is} \epsilon_{lm} + H_2^{[-2] islm} \kappa_{is}^{[+1]} \kappa_{lm}^{[+1]} + H_3^{[-1] islm} \epsilon_{is} \kappa_{lm}^{[+1]}. \quad (6)$$

Отметим, что единственным определяющим тензором четвертого ранга чувствительным к преобразованиям зеркального отражения и центральной инверсии трехмерного пространства, оказывается определяющий псевдотензор $H_3^{[-1] islm}$. Микрополярное тело называется гемитропным, если компоненты его определяющих тензоров не изменяются при поворотах координатного репера, т.е. полуизотропны.

Чтобы воспользоваться результатами предыдущего раздела, преобразуем энергетическую форму (6) с помощью фундаментального ориентирующего псевдоскаляра e , элиминируя веса псевдотензоров:

$$\mathcal{U} = H_1^{islm} \epsilon_{is} \epsilon_{lm} + e^2 H_2^{[-2] islm} \frac{\kappa_{is}^{[+1]}}{e} \frac{\kappa_{lm}^{[+1]}}{e} + e H_3^{[-1] islm} \epsilon_{is} \frac{\kappa_{lm}^{[+1]}}{e},$$

в итоге получим

$$\mathcal{U} = H_1^{islm} \epsilon_{is} \epsilon_{lm} + H_2^{islm} \kappa_{is} \kappa_{lm} + H_3^{islm} \epsilon_{is} \kappa_{lm}. \quad (7)$$

Полученная энергетическая форма (7), как правило, используется при построении моделей гемитропных микрополярных упругих континуумов. С помощью координатного представления (5) для определяющих линейный гемитропный микрополярный упругий континуум псевдотензоров можно получить следующие формы:

$$\begin{aligned} H_1^{islm} &= a_1 g^{is} g^{lm} + b_1 g^{il} g^{sm} + c_1 g^{im} g^{sl}, \\ H_2^{islm} &= a_2 g^{is} g^{lm} + b_2 g^{il} g^{sm} + c_2 g^{im} g^{sl}, \\ H_3^{islm} &= a_3 g^{is} g^{lm} + b_3 g^{il} g^{sm} + c_3 g^{im} g^{sl}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ — девять определяющих постоянных гемитропного микрополярного упругого тела. С точки зрения тензорной алгебры $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ как минимум являются полуизотропными инвариантами.

С тем чтобы вернуться к энергетической форме (6), необходимо преобразовать представления для определяющих тензоров (8). Для этого выполним следующие замены:

$$\begin{aligned} H_2^{[-2] islm} &= e^{-2} H_2^{islm}, & H_3^{[-1] islm} &= e^{-1} H_3^{islm}, \\ a_2^{[-2]} &= e^{-2} a_2, & b_2^{[-2]} &= e^{-2} b_2, & c_2^{[-2]} &= e^{-2} c_2, \\ a_3^{[-1]} &= e^{-1} a_3, & b_3^{[-1]} &= e^{-1} b_3, & c_3^{[-1]} &= e^{-1} c_3. \end{aligned} \quad (9)$$

Подставив выражения (9) в координатные представления (8), получим

$$\begin{aligned} H_1^{islm} &= a_1 g^{is} g^{lm} + b_1 g^{il} g^{sm} + c_1 g^{im} g^{sl}, \\ H_2^{[-2] islm} &= a_2^{[-2]} g^{is} g^{lm} + b_2^{[-2]} g^{il} g^{sm} + c_2^{[-2]} g^{im} g^{sl}, \\ H_3^{[-1] islm} &= a_3^{[-1]} g^{is} g^{lm} + b_3^{[-1]} g^{il} g^{sm} + c_3^{[-1]} g^{im} g^{sl}. \end{aligned}$$

Если вместо определяющих постоянных a_a, b_a, c_a перейти к конвенциональным механическим постоянным, таким как $G, \nu, L, \dots$, то характерная микродлина L будет псевдоскаляром отрицательного веса -1 .

5. Выводы. В статье выясняется круг вопросов, связанных с координатными представлениями тензоров и псевдотензоров с постоянными компонентами, абсолютных полуизотропных тензоров и их применением к механике гемитропных микрополярных тел.

- 1) Обсуждаются свойства и способы координатного представления тензоров и псевдотензоров с постоянными компонентами.
- 2) Предложена оптимальная неконвенциональная терминология, связанная с понятиями полностью изотропных (неконвенционально изотропных), конвенционально изотропных (полуизотропных), полуизотропных (демитропных, гемитропных) абсолютных тензоров.
- 3) Дается неконвенциональное определение полуизотропного тензора. Для полуизотропного тензора четвертого ранга приводится представление в терминах метрического тензора.
- 4) Сравниваются формы представления полуизотропных абсолютных тензоров четвертого ранга и абсолютных тензоров четвертого ранга с постоянными компонентами.
- 5) Полностью изотропный тензор четвертого ранга не отличается от полуизотропного тензора.
- 6) Обсуждается общая форма упругого потенциала линейного гемитропного микрополярного упругого континуума.
- 7) Приводятся координатные представления для определяющих тензоров и псевдотензоров четвертого ранга, использующихся при моделировании линейных гемитропных микрополярных упругих континуумов.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА–А20–120011690132–4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20–01–00666).

Библиографический список

1. Truesdell C., Toupin R. The classical field theories / *Principles of Classical Mechanics and Field Theory*: Encyclopedia of Physics, III/1; eds. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960. pp. 226–858. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2.
2. Truesdell C., Noll W. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2004. xxix+602 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-10388-3>.
3. Maugin G. A. *Material Inhomogeneities in Elasticity*. New York: CRC Press, 1993. 292 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781003059882>.
4. Mase G. T., Smelser R. E., Mase G. E. *Continuum Mechanics for Engineers*. Boca Raton: CRC Press, 2009. 398 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781420085396>.
5. Haupt P. *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2002. xxviii+643 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-04775-0>.
6. Spencer A. J. M. *Continuum Mechanics*. Mineola: Dover Publ., 2004. viii+183 pp.
7. Irgens F. *Continuum Mechanics*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008. xviii+661 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-74298-2>.
8. Gurevich G. B. *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants*. Groningen: P. Noordhoff, 1964. viii+429 pp.
9. Synge J. L., Schild A. *Tensor Calculus* / Dover Books on Advanced Mathematics. New York: Dover Publ., 1978. xi+324 pp.
10. Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford: Clarendon Press, 1954. xii+277 pp.

11. McConnell A. J. *Application of Tensor Analysis*. New York: Dover Publ., 1957. xii+318 pp.
12. Sokolnikoff I. S. *Tensor Analysis. Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua* / Applied Mathematics Series. New York: John Wiley & Sons, 1964. xii+361 pp.
13. Jeffreys H. *Cartesian Tensors*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1931. vii+93 pp.
14. Jeffreys H., Swirles B. *Methods of Mathematical Physics* / Cambridge Mathematical Library. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1950. viii+679 pp. DOI: <https://doi.org/10.1017/cbo9781139168489>.
15. Smith G. F., Rivlin R. S. The anisotropic tensors // *Quart. Appl. Math.*, 1957. vol. 15, no. 3. pp. 308–314. DOI: <https://doi.org/10.1090/qam/101883>.
16. Лурье А. И. *Нелинейная теория упругости*. М.: Наука, 1980. 512 с.
17. Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 3. С. 504–517. EDN: YOYJQD. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>.
18. Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // *Пробл. прочн. пластичн.*, 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412. EDN: TODIFV. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>.
19. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020. vol. 24, no. 3. pp. 424–444. EDN: TYGBER. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>.
20. Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020. vol. 24, no. 4. pp. 752–761. EDN: IVEASC. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1799>.
21. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об определяющих псевдоскалярах гемитропных микрополярных сред в инверсных координатных системах // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 3. С. 457–474. EDN: XYERLC. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1870>.
22. Radayev Yu. N., Murashkin E. V. Generalized pseudotensor formulations of the Stokes' integral theorem // *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2022. vol. 22, no. 2. pp. 205–215. EDN: VURXND. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-205-215>.
23. Radayev Yu. N., Murashkin E. V., Nesterov T. K. On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022. vol. 26, no. 1. pp. 36–47. EDN: EWDQGG. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1891>.
24. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О согласовании ориентаций тензорных элементов площади в микрополярном континууме, погружаемом во внешнее плоское пространство // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 4. С. 776–786. EDN: ZKIAAJ. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1883>.
25. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford: Pergamon Press, 1986. viii+383 pp.

MSC: 15A72, 53A45, 74D05

On the theory of fourth-rank hemitropic tensors in three-dimensional Euclidean spaces

E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences,
101–1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

Abstract

The paper is devoted to problems concerning the tensors with constant components, hemitropic tensors and pseudotensors that are of interest from the point of view of micropolar continuum mechanics. The properties and coordinate representations of tensors and pseudotensors with constant components are discussed. Based on an unconventional definition of a hemitropic fourth-rank tensor, a coordinate representations in terms of Kronecker deltas and metric tensors are given. A comparison of an arbitrary hemitropic fourth-rank tensor and a tensor with constant components are discussed. The coordinate representations for constitutive tensors and pseudotensors used in mathematical modeling of linear hemitropic micropolar continua are given in terms of the metric tensor. The covariant constancy of fourth-rank pseudotensors with constant components and hemitropic tensors is considered and discussed.

Keywords: tensor, pseudotensor, fourth-rank tensor, constitutive pseudotensor, hemitropic, micropolar, elasticity, tensor with constant components, half-isotropic tensor.

Received: 14th July, 2022 / Revised: 5th September, 2022 /

Accepted: 13th September, 2022 / First online: 26th September, 2022

Mechanics of Solids Short Communication

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the theory of fourth-rank hemitropic tensors in three-dimensional Euclidean spaces, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 3, pp. 592–602. EDN: **AFCREX**. DOI: [10.14498/vsgtu1941](https://doi.org/10.14498/vsgtu1941) (In Russian).

Authors' Details:

Evgenii V. Murashkin  <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>

Cand. Phys. & Math. Sci., PhD, MD; Senior Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics;
e-mail: evmurashkin@gmail.com

Yuri N. Radayev  <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>

D.Sc. (Phys. & Math. Sci.), Ph.D., M.Sc., Professor; Leading Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics; e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Competing interests. We declare that we have no competing interests.

Author's Responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. We take full responsibility for submit the final manuscript to print. We approved the final version of the manuscript.

Funding. The work was carried out within the framework of a state assignment (state registration no. AAAA–A20–120011690132–4) and with the support of the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20–01–00666).

References

1. Truesdell C., Toupin R. The classical field theories, In: *Principles of Classical Mechanics and Field Theory*, Encyclopedia of Physics, III/1; eds. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer, 1960, pp. 226–858. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2.
2. Truesdell C., Noll W. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2004, xxix+602 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-10388-3>.
3. Maugin G. A. *Material Inhomogeneities in Elasticity*. New York, CRC Press, 1993, 292 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781003059882>.
4. Mase G. T., Smelser R. E., Mase G. E. *Continuum Mechanics for Engineers*. Boca Raton, CRC Press, 2009, 398 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781420085396>.
5. Haupt P. *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2002, xxviii+643 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-04775-0>.
6. Spencer A. J. M. *Continuum Mechanics*. Mineola, Dover Publ., 2004, viii+183 pp.
7. Irgens F. *Continuum Mechanics*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2008, xviii+661 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-74298-2>.
8. Gurevich G. B. *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants*. Groningen, P. Noordhoff, 1964, viii+429 pp.
9. Synge J. L., Schild A. *Tensor Calculus*, Dover Books on Advanced Mathematics. New York, Dover Publ., 1978, xi+324 pp.
10. Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford, Clarendon Press, 1954, xii+277 pp.
11. McConnell A. J. *Application of Tensor Analysis*. New York, Dover Publ., 1957, xii+318 pp.
12. Sokolnikoff I. S. *Tensor Analysis. Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*, Applied Mathematics Series. New York, John Wiley & Sons, 1964, xii+361 pp.
13. Jeffreys H. *Cartesian Tensors*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1931, vii+93 pp.
14. Jeffreys H., Swirles B. *Methods of Mathematical Physics*, Cambridge Mathematical Library. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1950, viii+679 pp. DOI: <https://doi.org/10.1017/cbo9781139168489>.
15. Smith G. F., Rivlin R. S. The anisotropic tensors, *Quart. Appl. Math.*, 1957, vol. 15, no. 3, pp. 308–314. DOI: <https://doi.org/10.1090/qam/101883>.
16. Lurie A. I. *Nelineinaia teoriia uprugosti* [Nonlinear Theory of Elasticity]. Moscow, Nauka, 1980, 512 pp. (In Russian)
17. Radayev Yu. N. The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 3, pp. 504–517 (In Russian). EDN: YOYJQD. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>.
18. Radayev Yu. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media, *Problems of Strength and Plasticity*, 2020, vol. 82, no. 4, pp. 399–412 (In Russian). EDN: TODIFV. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>.
19. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 424–444. EDN: TYGBER. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>.

20. Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 752–761. EDN: IVEASC. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1799>.
21. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the constitutive pseudoscalars of hemitropic micropolar media in inverse coordinate frames, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 457–474 (In Russian). EDN: XYERLC. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1870>.
22. Radayev Yu. N., Murashkin E. V. Generalized pseudotensor formulations of the Stokes' integral theorem, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2022, vol. 22, no. 2, pp. 205–215. EDN: VURXND. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-205-215>.
23. Radayev Yu. N., Murashkin E. V., Nesterov T. K. On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 1, pp. 36–47. EDN: EWDQGG. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1891>.
24. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a ordering of area tensor elements orientations in a micropolar continuum immersed in an external plane space, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 776–786 (In Russian). EDN: ZKIAAJ. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1883>.
25. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, Pergamon Press, 1986, viii+383 pp.