



УДК 539.3

## Связанная нестационарная осесимметричная задача термоэластостатики для круглой пьезокерамической шарнирно закрепленной пластины

Д. А. Шляхин, Е. В. Савинова

Самарский государственный технический университет,  
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

### Аннотация

Построено новое замкнутое решение связанной нестационарной осесимметричной задачи термоэластостатики для круглой аксиально поляризованной шарнирно закрепленной пьезокерамической пластины в трехмерной постановке. Ее цилиндрическая поверхность шарнирно закреплена. Рассматривается случай изменения температуры на цилиндрической поверхности и лицевых плоскостях пластины (граничные условия теплопроводности 1-го рода). Лицевые электродированные поверхности конструкции подключены к измерительному прибору с большим входным сопротивлением (электрический холостой ход).



Исследуется пластина, геометрические размеры которой и скорость изменения температурной нагрузки не оказывают существенного влияния на инерционные характеристики электроупругой системы, что позволяет использовать при математической формулировке задачи уравнения равновесия, электростатики и теплопроводности. При этом исходные расчетные соотношения формируют несамосопряженную систему дифференциальных уравнений в частных производных.

Решение задачи осуществляется с помощью последовательного использования интегрального преобразования Ханкеля по радиальной координате и обобщенного метода биортогонального конечного интегрального преобразования (КИП) по аксиальной переменной. При этом на каждом этапе исследования выполняется процедура стандартизации, связанная с приведением соответствующих неоднородных граничных

**Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ**  
**Научная статья**

© Коллектив авторов, 2023

© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)

  Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International \(https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)


### Образец для цитирования

Шляхин Д. А., Савинова Е. В. Связанная нестационарная осесимметричная задача термоэластостатики для круглой пьезокерамической шарнирно закрепленной пластины // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 1. С. 159–178. EDN: **WXLOUH**. DOI: [10.14498/vsgtu1959](https://doi.org/10.14498/vsgtu1959).

### Сведения об авторах

*Дмитрий Аверкиевич Шляхин*  <https://orcid.org/0000-0003-0926-7388>

доктор технических наук, доцент; зав. кафедрой; каф. строительной механики, инженерной геологии, оснований и фундаментов; e-mail: [d-612-mit2009@yandex.ru](mailto:d-612-mit2009@yandex.ru)

*Елена Владимировна Савинова*  <https://orcid.org/0000-0001-7155-2281>

аспирант; старший преподаватель; каф. строительной механики, инженерной геологии, оснований и фундаментов; e-mail: [slenax@yandex.ru](mailto:slenax@yandex.ru)

условий к однородным. Использование структурного алгоритма КИП позволяет построить сопряженный оператор, без которого невозможно осуществить решение несамосопряженных линейных задач путем разложения по собственным вектор-функциям.

Построенные расчетные соотношения дают возможность определить напряженно-деформированное состояние, температурное и электрическое поля, индуцируемые в пьезокерамическом элементе при произвольном температурном внешнем воздействии, а также проанализировать влияние скоростей изменения объема тела и напряженности на температурное поле.

**Ключевые слова:** задача термоэластостатики, связанная задача, круглая пьезокерамическая пластина, биортогональные конечные интегральные преобразования.

Получение: 5 октября 2022 г. / Исправление: 19 декабря 2022 г. /

Принятие: 27 декабря 2022 г. / Публикация онлайн: 24 марта 2023 г.

---

**Введение.** Для бесконтактного определения температуры широкое применение получили тепловые датчики [1, 2], основным элементом в которых является пьезокерамический элемент. Для описания их работы и повышения функциональных возможностей возникает необходимость углубленного анализа нестационарных процессов, без которого невозможно понять взаимодействие температурных, электрических и упругих полей. При решении данной проблемы используются различные теории термоэластостатики [3,4], в которых математическая формулировка включает систему несамосопряженных дифференциальных уравнений в частных производных.

Для наиболее точного учета эффекта связанности термоэластостатических полей на первый план выходят методы, позволяющие получить замкнутые решения нестационарных краевых задач в трехмерной постановке. При этом для преодоления математических трудностей в случае интегрирования исходной системы уравнений используются различные упрощения: исследуются стационарные задачи, рассматриваются в несвязанной постановке или анализируются конструкции с вырожденной геометрией.

В частности, в статье [5] рассматривается несвязанная стационарная осесимметричная задача для длинного электроупругого цилиндра. В работе [6] изложен подход к решению трехмерных статических задач для изотропного тела и систематизированы решения для пьезокерамических тел канонической формы.

В работе [7] в несвязанной постановке рассматривается толстостенный шар с короткозамкнутыми электродированными поверхностями при наличии на его внутренней поверхности осесимметричной механической и температурной (граничные условия теплопроводности 1-го рода) нагрузки. В статьях [8, 9] исследуется нестационарная задача радиально поляризованного функционально градуированного пьезоэлектрического полого цилиндра. Исследования [10, 11] посвящены построению решения несвязанных задач для пьезокерамической оболочки и круглой пластины при удовлетворении на лицевых поверхностях граничных условий теплопроводности 1-го и 3-го рода.

Связанные нестационарные задачи термоэластостатики для однородного и неоднородного пьезокерамического слоя рассматривались в работах

[12–14], а в статьях [15, 16] объектом исследования являлась неограниченная среда. Работы [17, 18] посвящены анализу связанных нестационарных полей в длинном пьезокерамическом цилиндре. В статье [19] рассмотрена нелинейная одномерная задача термоэлектроупругости с термической релаксацией.

Целью настоящей работы является построение нового замкнутого решения нестационарной осесимметричной задачи термоэлектроупругости для шарнирно закрепленной круглой пьезокерамической пластины с учетом связанности механических, электрических и температурных полей при удовлетворении граничных условий теплопроводности 1-го рода. При этом ограничение по скорости изменения температуры на ее лицевой поверхности [11] позволяет использовать в расчетных соотношениях уравнения равновесия.

**1. Постановка задачи.** Круглая сплошная однородная шарнирно закрепленная пьезокерамическая пластина в цилиндрической системе координат  $(r_*, \theta, z_*)$  занимает область  $\Omega : \{0 \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z_* \leq h^*\}$ , где  $b, h^*$  — радиус и толщина. Рассматривается случай нестационарного изменения температуры  $\omega_1^*(r_*, t_*)$ ,  $\omega_2^*(r_*, t_*)$ ,  $\omega_3^*(t_*)$  соответственно на ее верхней ( $z_* = 0$ ) и нижней ( $z_* = h^*$ ) лицевых плоскостях, а также на цилиндрической ( $r_* = b$ ) поверхности;  $t_*$  — время. Лицевые электродированные поверхности пластины подключены к измерительному прибору с большим входным сопротивлением (рис. 1), при этом нижний электрод заземлен. Пренебрежимо малая толщина электродного металлопокрытия по сравнению с высотой пластины позволяет учитывать его только при формировании электрических граничных условий.

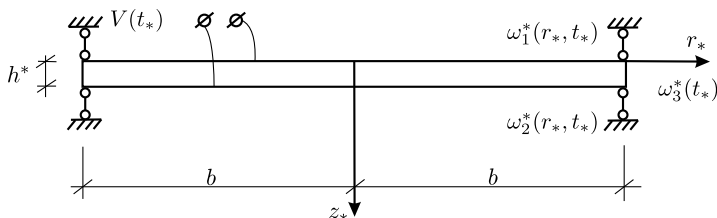


Рис. 1. Расчетная схема для закрепленной пьезокерамической пластины  
 [Fig. 1. Calculation scheme for a fixed piezoceramic plate]

Математическая формулировка рассматриваемой задачи термоэлектроупругости включает в себя систему дифференциальных уравнений для аксиально поляризованного трансверсально-изотропного пьезокерамического материала с гексагональной кристаллической решеткой и следующие краевые условия данной задачи в безразмерной форме [20]:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial r} \nabla U + a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_2 \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} + a_3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} - \frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0, \\
 & a_1 \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + a_4 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_2 \nabla \frac{\partial U}{\partial z} + a_5 \nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} + a_6 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - a_7 \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0, \\
 & -\nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} - a_8 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + a_9 \nabla \frac{\partial U}{\partial z} + a_{10} \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + a_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_{12} \nabla \Theta + a_{13} \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0, \\
 & \nabla \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left[ \Theta + a_{14} \left( \nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} \right) - a_{15} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] = 0;
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \{U, W, \phi, \Theta\}|_{r=0} < \infty, \quad \{W, \phi\}|_{r=1} = 0, \quad \Theta|_{r=1} = \omega_3, \\ \left\{ \frac{\partial U}{\partial r} + a_{16} \frac{U}{r} + a_{17} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} - \Theta \right\}|_{r=1} = 0; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \left( a_{17} \nabla U + a_4 \frac{\partial W}{\partial z} + a_6 \frac{\partial \phi}{\partial z} - a_7 \Theta \right)|_{z=0, h} = 0, \quad \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right)|_{z=0, h} = 0, \\ \left( -a_8 \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{a_{10}}{a_5} \nabla U + a_{11} \frac{\partial W}{\partial z} + a_{13} \Theta \right)|_{z=0} = 0, \\ \phi|_{z=h} = 0, \quad \Theta|_{z=0} = \omega_1, \quad \Theta|_{z=h} = \omega_2; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\{U, W, \phi, \Theta\}|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \{U, W, \phi\}}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial t}|_{t=0} = \dot{\Theta}_0. \quad (4)$$

В равенствах (1)–(4) использованы следующие обозначения:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}; \quad \{U, W, r, z\} = \frac{1}{b} \{U^*, W^*, r_*, z_*\}, \quad \phi = \frac{e_{31}}{C_{11}b} \phi^*,$$

$$t = \frac{\Lambda}{kb^2} t_*, \quad \Theta = \frac{\gamma_{11}}{C_{11}} \Theta^*, \quad \Theta^* = T - T_0, \quad \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} = \frac{\gamma_{11}}{C_{11}} [\{\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*\} - T_0];$$

$$a_1 = \frac{C_{55}}{C_{11}}, \quad a_2 = \frac{C_{13} + C_{55}}{C_{11}}, \quad a_3 = \frac{e_{15} + e_{31}}{e_{31}}, \quad a_4 = \frac{C_{33}}{C_{11}}, \quad a_5 = \frac{e_{15}}{e_{31}},$$

$$a_6 = \frac{e_{33}}{e_{31}}, \quad a_7 = \frac{\gamma_{33}}{\gamma_{11}}, \quad a_8 = \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}}, \quad a_9 = \frac{e_{31}(e_{15} + e_{31})}{C_{11}\varepsilon_{11}}, \quad a_{10} = \frac{e_{15}e_{31}}{C_{11}\varepsilon_{11}},$$

$$a_{11} = a_{10} \frac{e_{33}}{e_{15}}, \quad a_{12} = \frac{g_{11}e_{31}}{\gamma_{11}\varepsilon_{11}}, \quad a_{13} = a_{12} \frac{g_{33}}{g_{11}}, \quad a_{14} = T_0 \frac{\gamma_{11}\gamma_{33}}{C_{11}k},$$

$$a_{15} = T_0 \frac{g_{33}\gamma_{11}}{e_{31}k}, \quad a_{16} = \frac{C_{12}}{C_{11}}, \quad a_{17} = \frac{C_{13}}{C_{11}},$$

где  $\nabla$  — дифференциальный оператор;  $U^*(r_*, z_*, t_*)$ ,  $W^*(r_*, z_*, t_*)$ ,  $\phi^*(r_*, z_*, t_*)$ ,  $\Theta^*(r_*, z_*, t_*)$  — компоненты вектора перемещений, потенциал электрического поля и приращение температуры в размерной форме;  $C_{ms}$ ,  $e_{ms}$ ,  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{33}$  — модули упругости, пьезомодули и коэффициенты диэлектрической проницаемости электроупругого материала,  $m, s = \overline{1, 3}$ ;  $\gamma_{11}$ ,  $\gamma_{33}$  — компоненты тензора температурных напряжений,  $\gamma_{11} = C_{11}\alpha_t$ ,  $\gamma_{33} = C_{33}\alpha_t$ ;  $\Lambda$ ,  $k$ ,  $\alpha_t$  — коэффициенты теплопроводности, объемной теплоемкости и линейного температурного расширения материала;  $g_{11}$ ,  $g_{33}$  — компоненты тензора пироккоэффициентов;  $T$ ,  $T_0$  — соответственно текущая температура и температура первоначального состояния тела;  $\dot{\Theta}_0$  — известная в начальный момент скорость изменения температуры.

Последнее условие (2) и первые две зависимости (3) соответственно учитывают отсутствие механических напряжений на цилиндрической и лицевых поверхностях. Равенство  $\phi|_{r=1} = 0$  учитывает отсутствие свободных электрических зарядов вследствие аксиальной поляризации материала. Условия (4) предполагают, что в начальный момент времени конструкция имеет температуру  $T_0$  и находится в недеформированном состоянии.

Напряжение холостого хода  $V(t_*)$  определяется зависимостью

$$V^*(t_*) = \frac{2}{b^2} \int_0^b \phi^*(r_*, 0, t_*) r_* dr$$

с учетом заземления нижней лицевой поверхности пьезокерамического элемента.

**2. Построение общего решения.** Для использования преобразования Ханкеля по радиальной координате необходимо принять  $C_{11} = C_{12}$  ( $a_{16} = 1$ ) и привести неоднородное граничное условие (2) на цилиндрической поверхности к однородному путем введения новых функций  $u(r, z, t)$ ,  $\Phi(r, z, t)$ , связанных с  $U(r, z, t)$ ,  $\Theta(r, z, t)$  следующими зависимостями:

$$\Theta(r, z, t) = \omega_3(t) + \Phi(r, z, t), \quad U(r, z, t) = \frac{r}{2} \omega_3(t) + u(r, z, t). \quad (5)$$

В результате подстановки (5) в (1)–(4) получаем новую краевую задачу относительно функций  $u$ ,  $W$ ,  $\phi$ ,  $\Phi$ . При этом второе и третье уравнения (1), а также граничные (2) и начальные условия (4), включающие функции  $U$ ,  $\Theta$ , становятся неоднородными соответственно с правыми частями  $F_1, F_2, B_1, \dots, B_4, u_0, \dot{u}_0, \Phi_0, \dot{\Phi}_0$  следующего вида:

$$\begin{aligned} F_1 &= -a_{12} r^{-1} \omega_3, & F_2 &= (1 + a_{14}) \frac{d\omega_3}{dt}, & B_1 &= (a_7 - a_{17}) \omega_3, \\ B_2 &= -\left(a_{13} + \frac{a_{10}}{a_5}\right) \omega_3, & B_3 &= \omega_1 - \omega_3, & B_4 &= \omega_2 - \omega_3, & u_0 &= -\frac{r}{2} \omega_3(0), \\ \dot{u}_0 &= -\frac{r}{2} \frac{d\omega_3}{dt} \Big|_{t=0}, & \Phi_0 &= -\omega_3(0), & \dot{\Phi}_0 &= \dot{\Theta}_0 - \frac{d\omega_3}{dt} \Big|_{t=0}, \end{aligned}$$

а граничные условия (2) принимают вид

$$\{u, W, \phi, \Phi\}|_{r=0} < \infty, \quad \{W, \phi, \Phi\}|_{r=1} = 0, \quad \left\{ \nabla u + a_{17} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} - \Phi \right\} \Big|_{r=1} = 0.$$

Введем на сегменте  $[0, 1]$  однокомпонентное интегральное преобразование Ханкеля с конечными пределами по переменной  $r$  при использовании следующих трансформант:

$$\begin{aligned} u_H(n, z, t) &= \int_0^1 u(r, z, t) r J_1(j_n r) dr, \\ \{w_H(n, z, t), \phi_H(n, z, t), \Theta_H(n, z, t)\} &= \\ &= \int_0^1 \{W(r, z, t), \phi(r, z, t), \Phi(r, z, t)\} r J_0(j_n r) dr, \end{aligned}$$

и формул обращения

$$u(r, z, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_H(n, z, t)}{J_1(j_n)^2} J_1(j_n r),$$

$$\begin{aligned} & \{W(r, z, t), \phi(r, z, t), \Theta(r, z, t)\} = \\ & = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{w_H(n, z, t), \phi_H(n, z, t), \Theta_H(n, z, t)\}}{J_1(j_n)^2} J_0(j_n r), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $j_n$  – положительные нули (корни) функции  $J_0(j_n)$ ,  $J_\nu(\cdot)$  – функции Бесселя первого рода порядка  $\nu$ .

В результате использования алгоритма преобразования получается начально-краевая задача относительно трансформант Ханкеля:

$$\begin{aligned} & -j_n^2 u_H + a_1 \frac{\partial^2 u_H}{\partial z^2} - a_2 j_n \frac{\partial w_H}{\partial z} + a_3 j_n \frac{\partial \phi_H}{\partial z} + j_n \Theta_H = 0, \\ & -a_1 j_n^2 w_H + a_4 \frac{\partial^2 w_H}{\partial z^2} + a_2 j_n \frac{\partial u_H}{\partial z} - a_5 j_n^2 \phi_H + a_6 \frac{\partial^2 \phi_H}{\partial z^2} - a_7 \frac{\partial \Theta_H}{\partial z} = 0, \\ & j_n^2 \phi_H - a_8 \frac{\partial^2 \phi_H}{\partial z^2} + a_9 j_n \frac{\partial u_H}{\partial z} - a_{10} j_n^2 w_H + a_{11} \frac{\partial^2 w_H}{\partial z^2} + a_{12} j_n \Theta_H + a_{13} \frac{\partial \Theta_H}{\partial z} = F_{1H}, \\ & -j_n^2 \Theta_H + \frac{\partial^2 \Theta_H}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left[ \Theta_H + a_{14} \left( j_n u_H + \frac{\partial w_H}{\partial z} \right) - a_{15} \frac{\partial \phi_H}{\partial z} \right] = F_{2H}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \left( a_{17} j_n u_H + a_4 \frac{\partial w_H}{\partial z} + a_6 \frac{\partial \phi_H}{\partial z} - a_7 \Theta_H \right) \Big|_{z=0,h} = B_{1H}, \quad \left( \frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H \right) \Big|_{z=0,h} = 0, \\ & \left( -a_8 \frac{\partial \phi_H}{\partial z} + \frac{a_{10}}{a_5} j_n u_H + a_{11} \frac{\partial w_H}{\partial z} + a_{13} \Theta_H \right) \Big|_{z=0} = B_{2H}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\phi_H|_{z=h} = 0, \quad \Theta_H|_{z=0} = B_{3H}, \quad \Theta_H|_{z=h} = B_{4H};$$

$$\begin{aligned} & u_H|_{t=0} = u_{0H}, \quad \Theta_H|_{t=0} = \Theta_{0H}, \quad \{w_H, \phi_H\}|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_H}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{u}_{0H}, \\ & \frac{\partial \{u_H, w_H\}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \Theta_H}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{\Theta}_{0H}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} & \{u_{0H}, \dot{u}_{0H}\} = \int_0^1 \{u_0, \dot{u}_0\} r J_1(j_n r) dr, \\ & \{F_{1H}, F_{2H}, B_{1H}, B_{2H}, B_{3H}, B_{4H}, \Theta_{0H}, \dot{\Theta}_{0H}\} = \\ & = \int_0^1 \{F_1, F_2, B_1, B_2, B_3, B_4, \Phi_0, \dot{\Phi}_0\} r J_0(j_n r) dr. \end{aligned}$$

На следующем этапе решения выполняется процедура приведения расчетных соотношений (7)–(9) к виду, позволяющему в дальнейшем использовать метод конечных биортогональных интегральных преобразований [21]. Для этого вводятся новые функции  $U_H(n, z, t)$ ,  $W_H(n, z, t)$ ,  $\varphi_H(n, z, t)$ ,  $\Phi_H(n, z, t)$ , связанные с  $u_H(n, z, t)$ ,  $w_H(n, z, t)$ ,  $\phi_H(n, z, t)$ ,  $\Theta_H(n, z, t)$  следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} & u_H(n, z, t) = H_1(n, z, t) + U_H(n, z, t), \quad w_H(n, z, t) = H_2(n, z, t) + W_H(n, z, t), \\ & \phi_H(n, z, t) = H_3(n, z, t) + \varphi_H(n, z, t), \quad \Theta_H(n, z, t) = H_4(n, z, t) + \Phi_H(n, z, t), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \{H_1, H_2, H_3, H_4\} = & \{f_1(z), f_2(z), f_3(z), f_4(z)\}B_{1H}(0, t) + \\ & + \{f_5(z), f_6(z), f_7(z), f_8(z)\}B_{1H}(h, t) + \\ & + \{f_9(z), f_{10}(z), f_{11}(z), f_{12}(z)\}B_{2H}(0, t) + \\ & + \{f_{13}(z), f_{14}(z), f_{15}(z), f_{16}(z)\}B_{3H}(0, t) + \\ & + \{f_{17}(z), f_{18}(z), f_{19}(z), f_{20}(z)\}B_{4H}(h, t), \end{aligned}$$

$f_1(z), \dots, f_{20}(z)$  — дважды дифференцируемые функции.

Подстановка (10) в (7)–(9) при удовлетворении условий для случая  $z = 0, h$ :

$$\begin{aligned} \left( a_{17}j_n H_1 + a_4 \frac{\partial H_2}{\partial z} + a_6 \frac{\partial H_3}{\partial z} - a_7 H_4 \right) \Big|_{z=0, h} = B_{1H}, \quad j_n H_2 - \frac{\partial H_1}{\partial z} = 0, \\ H_3|_{z=h} = 0, \quad \left( -a_8 \frac{\partial H_3}{\partial z} + \frac{a_{10}}{a_5} j_n H_1 + a_{11} \frac{\partial H_2}{\partial z} + a_{13} H_4 \right) \Big|_{z=0} = B_{2H}, \\ H_4|_{z=0} = B_{3H}, \quad H_4|_{z=h} = B_{4H} \end{aligned} \quad (11)$$

позволяет получить начально-краевую задачу относительно функций  $U_H(n, z, t)$ ,  $W_H(n, z, t)$ ,  $\varphi_H(n, z, t)$ ,  $\Phi_H(n, z, t)$  с однородными граничными условиями:

$$\begin{aligned} -j_n^2 U_H + a_1 \frac{\partial^2 U_H}{\partial z^2} - a_2 j_n \frac{\partial W_H}{\partial z} + a_3 j_n \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} + j_n \Phi_H = F_{1H}^*, \\ -a_1 j_n^2 W_H + a_4 \frac{\partial^2 W_H}{\partial z^2} + a_2 j_n \frac{\partial U_H}{\partial z} - a_5 j_n^2 \varphi_H + a_6 \frac{\partial^2 \varphi_H}{\partial z^2} - a_7 \frac{\partial \Phi_H}{\partial z} = F_{2H}^*, \\ j_n^2 \varphi_H - a_8 \frac{\partial^2 \varphi_H}{\partial z^2} + a_9 j_n \frac{\partial U_H}{\partial z} - a_{10} j_n^2 W_H + a_{11} \frac{\partial^2 W_H}{\partial z^2} + \\ + a_{12} j_n \Phi_H + a_{13} \frac{\partial \Phi_H}{\partial z} = F_{3H}^*, \\ -j_n^2 \Phi_H + \frac{\partial^2 \Phi_H}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left[ \Phi_H + a_{14} \left( j_n U_H + \frac{\partial W_H}{\partial z} \right) - a_{15} \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} \right] = F_{4H}^*; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\left( a_{17} j_n U_H + a_4 \frac{\partial W_H}{\partial z} + a_6 \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} - a_7 \Phi_H \right) \Big|_{z=0, h} = 0, \quad \left( \frac{\partial U_H}{\partial z} - j_n W_H \right) \Big|_{z=0, h} = 0,$$

$$\left( -a_8 \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} + \frac{a_{10}}{a_5} j_n U_H + a_{11} \frac{\partial W_H}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad (13)$$

$$\varphi_H|_{z=h} = \Phi_H|_{z=0} = \Phi_H|_{z=h} = 0;$$

$$U_H|_{t=0} = U_{0H}, \quad W_H|_{t=0} = W_{0H}, \quad \varphi_H|_{t=0} = \varphi_{0H}, \quad \Phi_H|_{t=0} = \Phi_{0H},$$

$$\frac{\partial U_H}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{U}_{0H}, \quad \frac{\partial W_H}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{W}_{0H}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \varphi_H}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{\varphi}_{0H}, \quad \frac{\partial \Phi_H}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{\Phi}_{0H};$$

где

$$\begin{aligned}
 F_{1H}^* &= j_n^2 H_1 - a_1 \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} + a_2 j_n \frac{\partial H_2}{\partial z} - a_3 j_n \frac{\partial H_3}{\partial z} - j_n H_4, \\
 F_{2H}^* &= a_1 j_n^2 H_2 - a_4 \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} - a_2 j_n \frac{\partial H_1}{\partial z} + a_5 j_n^2 H_3 - a_6 \frac{\partial^2 H_3}{\partial z^2} + a_7 \frac{\partial H_4}{\partial z}, \\
 F_{3H}^* &= F_{1H} - j_n^2 H_3 + a_8 \frac{\partial^2 H_3}{\partial z^2} - a_9 j_n \frac{\partial H_1}{\partial z} + a_{10} j_n^2 H_2 - \\
 &\quad - a_{11} \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} - a_{12} j_n H_4 - a_{13} \frac{\partial H_4}{\partial z}, \\
 F_{4H}^* &= F_{2H} + j_n^2 H_4 - \frac{\partial^2 H_4}{\partial z^2} + \left( \frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \times \\
 &\quad \times \left[ H_4 + a_{14} \left( j_n H_1 + \frac{\partial H_2}{\partial z} \right) - a_{15} \frac{\partial H_3}{\partial z} \right]; \\
 U_{0H} &= u_{0H} - H_1|_{t=0}, \quad W_{0H} = -H_2|_{t=0}, \\
 \varphi_{0H} &= -H_3|_{t=0}, \quad \Phi_{0H} = \Theta_{0H} - H_4|_{t=0}, \\
 \dot{U}_{0H} &= \dot{u}_{0H} - \frac{\partial H_1}{\partial t} \Big|_{t=0}, \quad \dot{W}_{0H} = -\frac{\partial H_2}{\partial t} \Big|_{t=0}, \\
 \dot{\varphi}_{0H} &= -\frac{\partial H_3}{\partial t} \Big|_{t=0}, \quad \dot{\Phi}_{0H} = \dot{\Theta}_{0H} - \frac{\partial H_4}{\partial t} \Big|_{t=0}.
 \end{aligned}$$

Начально-краевую задачу (12)–(14) решаем, используя структурный алгоритм вырожденного биортогонального конечного интегрального преобразования (КИП) [21]. Для этого вводим на сегменте  $[0, h]$  КИП с неизвестными компонентами собственных вектор-функций ядер преобразований  $K_m(\lambda_{in}, z)$ ,  $N_m(\mu_{in}, z)$ ,  $m = \overline{1, 4}$ :

$$\begin{aligned}
 G(n, \lambda_{in}, t) &= \int_0^h \left[ \Phi_H + a_{14} \left( j_n U_H + \frac{\partial W_H}{\partial z} \right) - a_{15} \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} \right] K_4(\lambda_{in}, z) dz, \\
 \{U_H, W_H, \varphi_H, Y_H\} &= \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) \frac{\{N_1(\mu_{in}, z), N_2(\mu_{in}, z), N_3(\mu_{in}, z), N_4(\mu_{in}, z)\}}{\|K_{in}\|^2}, \quad (15) \\
 \|K_{in}\|^2 &= \int_0^h K_4(\lambda_{in}, z) N_4(\mu_{in}, z) dz,
 \end{aligned}$$

где  $\lambda_{in}$ ,  $\mu_{in}$  — собственные значения соответствующих однородных линейных краевых задач относительно сопряженных  $K_k(\lambda_{in}, z)$  и инвариантных  $N_k(\mu_{in}, z)$  компонент вектор-функций ядер КИП,  $k = \overline{1, 4}$ .

Особенность данного преобразования заключается в том, что трансформанта и формулы обращения (15) содержат различные ядровые вектор-функции  $K_4(\lambda_{in}, z)$ ,  $N_k(\mu_{in}, z)$ .

Согласно процедуре преобразования формируется счетное множество задач для трансформанты  $G(n, \lambda_{in}, t)$  вида

$$\left( \frac{d}{dt} + \lambda_{in}^2 \right) G(n, \lambda_{in}, t) = -F_H(n, \lambda_{in}, t), \quad i = \overline{1, \infty}, \quad n = \overline{0, \infty};$$



$$G(\lambda_{in}, n, t)|_{t=0} = G_{0H},$$

решение которых имеет вид

$$G(n, \lambda_{in}) = G_0 \exp(-\lambda_{in}^2 t) - \int_0^t F_H(n, \lambda_{in}, \tau) \exp[\lambda_{in}^2(\tau - t)] d\tau, \quad (16)$$

и две однородные задачи относительно компонент ядра преобразования  $K_k(\lambda_{in}, z)$ ,  $k = \overline{1, 4}$ :

$$\begin{aligned} -j_n^2 K_{1in} + a_1 \frac{d^2 K_{1in}}{dz^2} - a_2 j_n \frac{dK_{2in}}{dz} - a_9 j_n \frac{dK_{3in}}{dz} + \lambda_{in}^2 a_{14} j_n K_{4in} &= 0, \\ -a_1 j_n^2 K_{2in} + a_4 \frac{d^2 K_{2in}}{dz^2} + a_2 j_n \frac{dK_{1in}}{dz} - a_{10} j_n^2 K_{3in} + \\ &+ a_{11} \frac{d^2 K_{3in}}{dz^2} - \lambda_{in}^2 a_{14} \frac{dK_{4in}}{dz} = 0, \\ j_n^2 K_{3in} - a_8 \frac{d^2 K_{3in}}{dz^2} - a_3 j_n \frac{dK_{1in}}{dz} - a_5 j_n^2 K_{2in} + \\ &+ a_6 \frac{d^2 K_{2in}}{dz^2} + \lambda_{in}^2 a_{15} \frac{dK_{4in}}{dz} = 0, \\ (\lambda_{in}^2 - j_n^2) K_{4in} + \frac{d^2 K_{4in}}{dz^2} + j_n K_{1in} + a_7 \frac{dK_{2in}}{dz} + a_{12} j_n K_{3in} - a_{13} \frac{dK_{3in}}{dz} &= 0; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \left( a_{17} j_n K_{1in} + a_4 \frac{dK_{2in}}{dz} + a_{11} \frac{dK_{3in}}{dz} \right) \Big|_{z=0, h} &= 0, \\ \left( \frac{dK_{1in}}{dz} - j_n K_{2in} - \frac{a_{10}}{a_1} j_n K_{3in} \right) \Big|_{z=0, h} &= 0, \\ \left( -a_8 \frac{dK_{3in}}{dz} - a_3 j_n K_{1in} + a_6 \frac{dK_{2in}}{dz} \right) \Big|_{z=0} &= 0, \\ K_{3in}|_{z=h} = K_{4in}|_{z=0} = K_{4in}|_{z=h} &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

и компонент  $N_k(\mu_{in}, z)$ ,  $k = \overline{1, 4}$ :

$$\begin{aligned} -j_n^2 N_{1in} + a_1 \frac{d^2 N_{1in}}{dz^2} - a_2 j_n \frac{dN_{2in}}{dz} + a_3 j_n \frac{dN_{3in}}{dz} + j_n N_{4in} &= 0, \\ -a_1 j_n^2 N_{2in} + a_4 \frac{d^2 N_{2in}}{dz^2} + a_2 j_n \frac{dN_{1in}}{dz} - a_5 j_n^2 N_{3in} + \\ &+ a_6 \frac{d^2 N_{3in}}{dz^2} - a_7 \frac{dN_{4in}}{dz} = 0, \\ j_n^2 N_{3in} - a_8 \frac{d^2 N_{3in}}{dz^2} + a_9 j_n \frac{dN_{1in}}{dz} - a_{10} j_n^2 N_{2in} + a_{11} \frac{d^2 N_{2in}}{dz^2} + \\ &+ a_{12} j_n N_{4in} + a_{13} \frac{dN_{4in}}{dz} = 0, \\ -j_n^2 N_{4in} + \frac{d^2 N_{4in}}{dz^2} + \mu_{in}^2 \left( N_{4in} + a_{14} j_n N_{1in} + a_{14} \frac{dN_{2in}}{dz} - a_{15} \frac{dN_{3in}}{dz} \right) &= 0; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
 & \left( a_{17} j_n N_{1in} + a_4 \frac{dN_{2in}}{dz} + a_6 \frac{dN_{3in}}{dz} \right) \Big|_{z=0,h} = 0, \\
 & \left( \frac{\partial N_{1in}}{\partial z} - j_n N_{2in} \right) \Big|_{z=0,h} = 0, \\
 & \left( -a_8 \frac{dN_{3in}}{dz} + \frac{a_{10}}{a_5} j_n N_{1in} + a_{11} \frac{dN_{2in}}{dz} \right) \Big|_{z=0} = 0, \\
 & N_{3in}|_{z=h} = N_{4in}|_{z=0} = N_{4in}|_{z=h} = 0,
 \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\begin{aligned}
 F_H(n, \lambda_{in}, t) &= \int_0^h (F_1 K_{1in} + F_2 K_{2in} + F_3 K_{3in} + F_4 K_{4in}) dz, \\
 G_{0H} &= \int_0^h \left[ \Phi_{0H} + a_{14} \left( j_n U_{0H} + \frac{dW_{0H}}{dz} \right) - a_{15} \frac{d\varphi_{0H}}{dz} \right] K_{4in} dz.
 \end{aligned}$$

Построенная однородная задача (19), (20) относительно функций  $N_k(\mu_{in}, z)$ ,  $k = \overline{1,4}$ , является сопряженной по отношению к исходным расчетным соотношениям (12), (13).

Системы (17), (19) приводятся к следующим дифференциальным уравнениям относительно  $K_2(\lambda_{in}, z)$ ,  $N_2(\mu_{in}, z)$ :

$$\left( \frac{d^8}{dz^8} + e_{1in} \frac{d^6}{dz^6} + e_{2in} \frac{d^4}{dz^4} + e_{3in} \frac{d^2}{dz^2} + e_{4in} \right) \{K_{2in}, N_{2in}\} = 0, \tag{21}$$

левые части которых можно разложить на следующие коммутативные сомножители:

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} - A_{1in}^2 \right) \left( \frac{d^2}{dz^2} + A_{2in}^2 \right) \left( \frac{d^4}{dz^4} + m_{3in}^2 \frac{d^2}{dz^2} + m_{4in}^2 \right) \{K_{2in}, N_{2in}\} = 0, \tag{22}$$

где

$$A_{1in} = \sqrt{B_{1in}}, \quad A_{2in} = \sqrt{S_{1in}}, \quad m_{3in}^2 = e_{1in} + B_{1in} + S_{1in}, \quad m_{4in}^2 = \frac{e_{4in}}{B_{1in} S_{2in}};$$

$B_{1in}$ ,  $S_{1in}$  — действительные положительные корни следующих характеристических уравнений:

$$\begin{aligned}
 & B_{in}^4 + e_{1in} B_{in}^3 + e_{2in} B_{in}^2 + e_{3in} B_{in} + e_{4in} = 0, \\
 & S_{in}^3 - (e_{1in} + B_{1in}) S_{in}^2 + (e_{1in} B_{1in} + B_{1in}^2 + e_{2in}) S_{in} - \frac{e_{4in}}{B_{1in}} = 0;
 \end{aligned}$$

величины  $e_{1in}, \dots, e_{4in}$  определяются различными комбинациями коэффициентов  $a_1, \dots, a_{15}$ .

Общий интеграл уравнений (22) при исследовании пластины из пьезокерамического материала имеет вид

$$\begin{aligned}
 \{K_{2in}, N_{2in}\} &= \{D_{1in}, E_{1in}\} \exp(A_{1in}z) + \{D_{2in}, E_{2in}\} \exp(-A_{1in}z) + \\
 &+ \{D_{3in}, E_{3in}\} \sin(A_{2in}z) + \{D_{4in}, E_{4in}\} \cos(A_{2in}z) + \\
 &+ \{D_{5in}, E_{5in}\} \sin(A_{3in}z) + \{D_{6in}, E_{6in}\} \cos(A_{3in}z) + \\
 &+ \{D_{7in}, E_{7in}\} \sin(A_{4in}z) + \{D_{8in}, E_{8in}\} \cos(A_{4in}z), \tag{23}
 \end{aligned}$$

где коэффициенты

$$A_{3in} = \left( \frac{m_{3in}^2 + (m_{3in}^4 - 4m_{4in}^2)^{1/2}}{2} \right)^{1/2}, \quad A_{4in} = \left( \frac{m_{3in}^2 - (m_{3in}^4 - 4m_{4in}^2)^{1/2}}{2} \right)^{1/2}.$$

Здесь следует отметить, что условия о действительных положительных значениях коэффициентов  $B_{1in}$ ,  $S_{1in}$ ,  $A_{1in}$ ,  $\dots$ ,  $A_{4in}$  выполняются для большинства конструкций, изготовленных из пьезокерамического материала. В противном случае меняется структура формул (22), (23).

Принимая во внимание связи, полученные в результате приведения (17), (19) к (21), получаем выражения для функций  $K_1(\lambda_{in}, z)$ ,  $K_3(\lambda_{in}, z)$ ,  $K_4(\lambda_{in}, z)$ ,  $N_1(\lambda_{in}, z)$ ,  $N_3(\lambda_{in}, z)$ ,  $N_4(\lambda_{in}, z)$ . Их подстановка в граничные условия (18), (20) позволяет сформировать две системы алгебраических уравнений, решение которых позволяет определить постоянные интегрирования  $D_{kin}$ ,  $E_{kin}$ ,  $k = \overline{1, 8}$ , и собственные значения  $\lambda_{in}$ ,  $\mu_{in}$ .

Окончательные выражения функций  $U(r, z, t)$ ,  $W(r, z, t)$ ,  $\phi(r, z, t)$ ,  $\Theta(r, z, t)$  получим, последовательно применяя к трансформанте (16) формулы обращения (15), (6). В результате с учетом (5), (10) имеем

$$U(r, z, t) = \frac{r}{2} \omega_3(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \times \\ \times \left[ H_1(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) N_1(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right],$$

$$W(r, z, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[ H_2(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) N_2(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right],$$

$$\phi(r, z, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[ H_3(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) N_3(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right],$$

$$\Theta(r, z, t) = \omega_3(t) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \times \\ \times \left[ H_4(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) N_4(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right].$$

Заключительным этапом исследования является определение функций  $f_1(z)$ ,  $\dots$ ,  $f_{20}(z)$  из условия упрощения правых частей дифференциальных уравнений (12) и удовлетворения граничных условий (11).

**3. Вычислительный эксперимент и анализ результатов.** Рассмотрим круглую пластину ( $b = 0.014$  м) из пьезокерамики состава PZT-5A со следующими термоэлектроупругими характеристиками [22]:

$$\{C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{33}, C_{55}\} = \{9.92, 5.4, 5.08, 8.69, 1.6\} \times 10^{10} \text{ Па}, \\ \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}\} = \{15.3, 15.0\} \times 10^{-9} \text{ Ф/м},$$

$$\{e_{15}, e_{31}, e_{33}\} = \{12.3, -7.2, 15.1\} \text{ Кл/м}^2, \quad \Lambda = 1.8 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)},$$

$$\alpha_t = 0.33 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}, \quad k = 3 \cdot 10^6 \text{ Дж/(м}^3 \cdot \text{К)},$$

$$g_{11} = g_{33} = -2 \cdot 10^{-4} \text{ Кл/(м}^2 \cdot \text{К)}, \quad \{\gamma_{11}, \gamma_{33}\} = \{3.31, 2.89\} \times 10^5 \text{ Па/К}.$$

Изменение температуры на верхней лицевой плоскости ( $z_* = 0$ ) задается в виде

$$\omega_1^*(r_*, t_*) = \left(1 - \frac{r_*}{b}\right) T_{\max}^* \left[ \sin\left(\frac{\pi}{2t_{\max}^*} t_*\right) H(t_{\max}^* - t_*) + H(t_* - t_{\max}^*) \right]$$

при отсутствии приращения температуры на нижней лицевой и цилиндрической поверхности:

$$\omega_2^*(r_*, t_*) = \omega_3^*(t_*) = 0.$$

Здесь  $H(\cdot)$  — функция Хевисайда;  $T_{\max}^*$ ,  $t_{\max}^*$  — максимальное значение внешнего температурного воздействия и соответствующее ему время в размерной форме:

$$T_{\max}^* = 373 \text{ К (100}^\circ\text{C)}, \quad T_0 = 293 \text{ К (20}^\circ\text{C)}, \quad t_{\max}^* = 0.1 \text{ с}.$$

На рис. 2 представлены графики изменения температуры  $\Theta^*(0, z, t)$  по высоте пластины ( $b = 0.014 \text{ м}$ ,  $h^* = 0.001 \text{ м}$ ) в различные моменты времени:  $1 - t = t_{\max}$ ,  $2 - t = 2t_{\max}$ ,  $3 - t = 10t_{\max}$ , где  $t_{\max} = \Lambda t_{\max}^* / (kb^2)$ .

Результаты вычислительного эксперимента подтверждают, что установившийся температурный режим в пьезокерамической пластине формируется достаточно быстро при  $t_* = 1 \text{ с}$  (см. рис. 2) за счет высокого коэффициента теплопроводности, ее небольшой толщины и отсутствия приращения температуры на ее нижней лицевой поверхности ( $\omega_2^*(r_*, t_*) = 0$ ).

Анализ результатов, связанный с определением функции  $\Theta^*(r, z, t)$ , показал, что при исследовании пьезокерамических конструкций можно пренебречь влиянием на температурное поле скоростями изменения объема тела и напряженности вследствие небольших значений коэффициентов  $a_{14}$ ,  $a_{15}$  ( $a_{14} = 9.24 \cdot 10^{-5}$ ,  $a_{15} = 0.89 \cdot 10^{-5}$ ), т.е. в расчетах можно использовать только уравнение теплопроводности.

На рис. 3, 4 представлены графики перемещений  $W^*(z, r, t)$ ,  $U^*(z, r, t)$  и радиальной компоненты нормальных механических напряжений  $\sigma_{rr}(r, z, t)$  по радиальной координате  $r$  в момент времени  $t = t_{\max}$ . Здесь сплошной, штрих-пунктирной и штриховой линиями соответственно обозначены результаты для  $z = 0$ ,  $h/2$ ,  $h$ .

Представленные на рис. 3, 4 зависимости позволяют сделать вывод, что при  $t = t_{\max}$  наблюдается изгиб пластины с увеличением верхнего и уменьшением нижнего радиуса лицевых поверхностей пластины. При этом за счет характера изменения  $\omega_1^*(r_*, t_*)$  по радиальной координате во всех ее точках образуются сжимающие механические напряжения  $\sigma_{rr}(r, z, t)$ , за исключением нижней лицевой поверхности, которая является нейтральной (здесь  $\sigma_{rr}(r, h, t) = 0$ ). Дальнейший прогрев конструкции качественно не влияет на картину напряженно-деформированного состояния конструкции.

На рис. 5 показано изменение потенциала электрического поля  $\phi(r, 0, t)$  по радиальной координате  $r$  в различные моменты времени:  $1 - t = t_{\max}$ ,  $2 -$

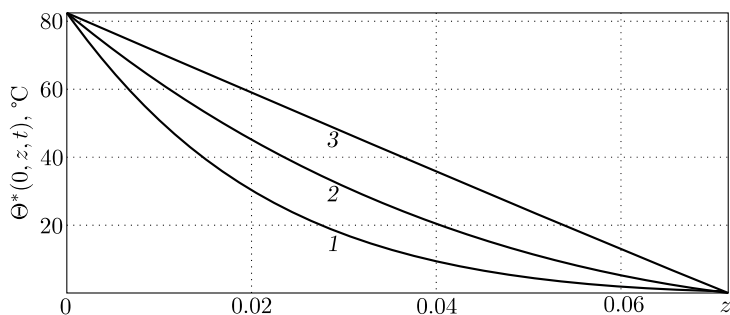


Рис. 2. Изменение функций  $\Theta^*(0, z, t)$  по высоте пластины  $z = z_*/b$ :  
 1 –  $t = t_{\max}$ , 2 –  $t = 2t_{\max}$ , 3 –  $t = 10t_{\max}$ ;  $t_{\max} = \Lambda t_{\max}^*/(kb^2)$

[Figure 2. Change of functions  $\Theta^*(0, z, t)$  along the plate height  $z = z_*/b$ :  
 1 –  $t = t_{\max}$ , 2 –  $t = 2t_{\max}$ , 3 –  $t = 10t_{\max}$ ;  $t_{\max} = \Lambda t_{\max}^*/(kb^2)$ ]

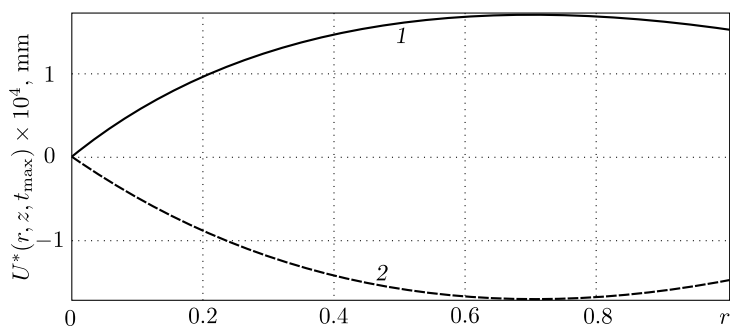
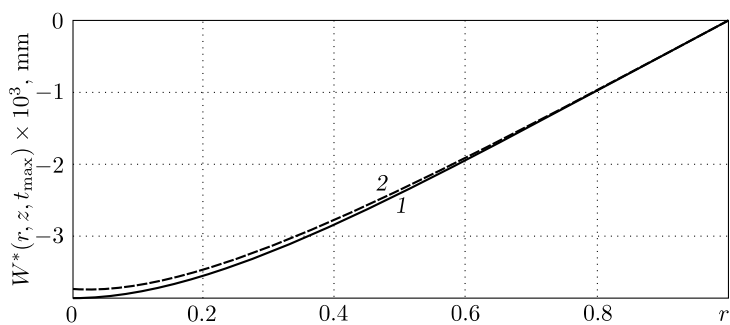


Рис. 3. Изменение перемещений  $W^*(z, r, t_{\max})$ ,  $U^*(z, r, t_{\max})$  по координате  $r$ : 1 –  $z = 0$ , 2 –  $z = h$ ;  $r = r_*/b$ ,  $h = h^*/b$

[Figure 3. Change of displacements  $W^*(z, r, t_{\max})$ ,  $U^*(z, r, t_{\max})$  along the coordinate  $r$ : 1 –  $z = 0$ , 2 –  $z = h$ ;  $r = r_*/b$ ,  $h = h^*/b$ ]

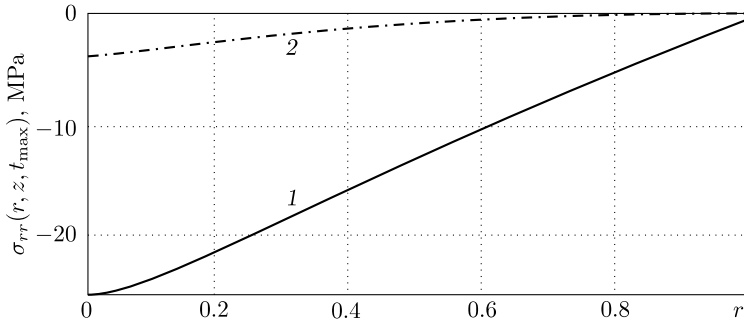


Рис. 4. Изменение напряжений  $\sigma_{rr}(r, z, t_{\max})$  по координате  $r$ : 1 –  $z = 0$ , 2 –  $z = h/2$ ;  $r = r_*/b$ ,  $h = h^*/b$

[Figure 4. Change of stresses  $\sigma_{rr}(r, z, t_{\max})$  along the coordinate  $r$ : 1 –  $z = 0$ , 2 –  $z = h/2$ ;  $r = r_*/b$ ,  $h = h^*/b$ ]

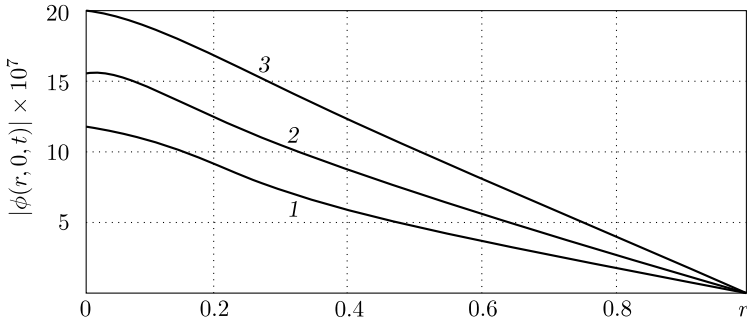


Рис. 5. Изменение потенциала электрического поля  $\phi(r, 0, t)$  по координате  $r$ : 1 –  $t = t_{\max}$ , 2 –  $t = 2t_{\max}$ , 3 –  $t = 10t_{\max}$ ;  $t_{\max} = \Lambda t_{\max}^*/(kb^2)$

[Figure 5. Change of the electric field potential  $\phi(r, 0, t)$  along the coordinate  $r$ : 1 –  $t = t_{\max}$ , 2 –  $t = 2t_{\max}$ , 3 –  $t = 10t_{\max}$ ;  $t_{\max} = \Lambda t_{\max}^*/(kb^2)$ ]

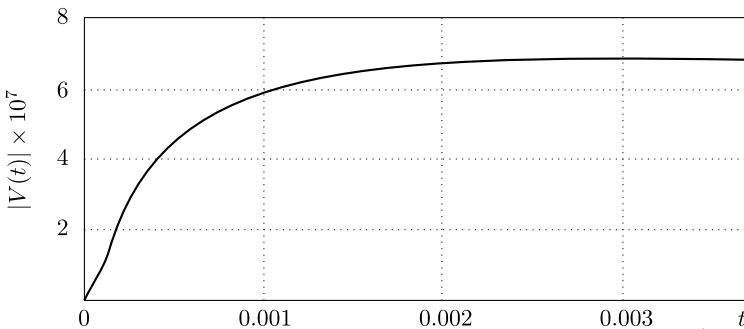


Рис. 6. Разность потенциалов электрического поля  $V(t) = \epsilon_{31}V^*(t)/(C_{11}b)$ , где  $t = \Lambda t/(kb^2)$

[Figure 6. The potential difference of the electric field  $V(t) = \epsilon_{31}V^*(t)/(C_{11}b)$ , where  $t = \Lambda t/(kb^2)$ ]

Таблица 1

$\varphi_H(0, t) = \sum_{i=1}^N (\dots)$	$t = t_{\max}/2, N = 8$	$t = t_{\max}/2, N = 7$	$\Delta, \%$	$t = t_{\max}, N = 8$	$t = t_{\max}, N = 7$	$\Delta, \%$
$n = 1$	$1.049 \cdot 10^{-7}$	$1.045 \cdot 10^{-7}$	0.38	$1.150 \cdot 10^{-7}$	$1.147 \cdot 10^{-7}$	0.26
$n = 2$	$-0.593 \cdot 10^{-7}$	$-0.590 \cdot 10^{-7}$	0.51	$-0.649 \cdot 10^{-7}$	$-0.645 \cdot 10^{-7}$	0.62

Таблица 2

$\phi(0, 0, t) = 2 \sum_{n=1}^M (\dots)$	$t = t_{\max}/2, M = 10$	$t = t_{\max}/2, M = 9$	$\Delta, \%$	$t = t_{\max}, M = 10$	$t = t_{\max}, M = 9$	$\Delta, \%$
	$-6.69 \cdot 10^{-7}$	$-6.59 \cdot 10^{-7}$	0.86	$-11.8 \cdot 10^{-7}$	$-11.69 \cdot 10^{-7}$	0.95

$t = 2t_{\max}$ ,  $3 - t = 10t_{\max}$ , а на рис. 6 представлена зависимость разности потенциалов электрического поля  $V(t) = e_{31}V^*(t)/(C_{11}b)$ , где  $t = \Lambda t/(kb^2)$ .

Здесь следует отметить, что изменение температурного поля пластины (см. рис. 2) приводит к росту по абсолютной величине потенциала  $\phi(r, 0, t)$  (см. рис. 5) на верхней лицевой поверхности и разности потенциалов  $V(t)$  (см. рис. 6).

Для оценки сходимости рядов при определении потенциала электрического поля в табл. 1, 2 приведены численные значения  $\varphi_H(0, t)$ ,  $\phi(0, 0, t)$  при учете различного количества их членов в моменты времени  $t = t_{\max}/2$ ,  $t_{\max}$ .

Результаты расчета показывают, что при определении составляющей потенциала  $\varphi_H(0, t)$  и потенциала  $\phi(0, 0, t)$  учет соответственно 8 и 10 членов рядов  $\varphi_H(0, t) = \sum_{i=1}^{\infty} (\dots)$ ,  $\phi(0, 0, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\dots)$  обеспечивает их сходимость.

**4. Заключение.** Разработанный алгоритм решения позволяет точно, в рамках используемой математической модели, определить термоэлектроупругое поле в круглой пьезокерамической пластине, что существенно повышает теоретический уровень инженерных расчетов и позволяет улучшить технические характеристики разрабатываемых температурных пьезокерамических преобразователей. При этом основное преимущество построенного замкнутого решения связанной осесимметричной задачи термоэлектроупругости перед аналогичными результатами для несвязанной постановки, заключается в том, что полученные расчетные соотношения дают возможность точно определить влияние нестационарного температурного поля на напряженно-деформированное состояние и электрическое поле пьезокерамической круглой пластины.

**Конкурирующие интересы.** Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

**Авторский вклад и ответственность.** Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи; все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

## Библиографический список

1. Ионов Б. П., Ионов А. Б. Спектрально-статистический подход к бесконтактному измерению температуры // *Датчики и системы*, 2009. № 2. С. 9–11. EDN: JWYALN.
2. Паньков А. А. Резонансная диагностика распределения температуры пьезоэлектролюминесцентным оптоволоконным датчиком по решению интегрального уравнения Фредгольма // *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2018. № 2. С. 72–82. EDN: XUGGCD. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.2.07>.
3. Mindlin R. D. Equations of high frequency vibrations of thermopiezoelectric crystal plates // *Int. J. Solids Struct.*, 1974. vol. 10, no. 6. pp. 625–637. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(74\)90047-X](https://doi.org/10.1016/0020-7683(74)90047-X).
4. Green A. E. Thermoelasticity without energy dissipation // *J. Elasticity*, 1993. vol. 31. pp. 189–208. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00044969>.
5. Saadatfar M., Razavi A. S. Piezoelectric hollow cylinder with thermal gradient // *J. Mech. Sci. Technol.*, 2009. vol. 23. pp. 45–53. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12206-008-1002-8>.
6. Podil'chuk Y. N. Exact analytical solutions of static electroelastic and thermoelectroelastic problems for a transversely isotropic body in curvilinear coordinate systems // *Int.*



- Appl. Mech.*, 2003. no. 39. pp. 132–170. EDN: VAWZKP. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1023953313612>.
7. Khorsand M. Dynamic analysis of a functionally graded piezoelectric spherical shell under mechanical and thermal shocks // *J. Mech. Eng. Sci.*, 2014. vol. 228, no. 4. pp. 632–645. DOI: <https://doi.org/10.1177/09544062134894>.
  8. Akbarzadeh A. H., Babaei M. H., Chen Z. T. The thermo-electromagnetoelastic behavior of a rotating functionally graded piezoelectric cylinder // *Smart Mater. Struct.*, 2011. vol. 20, no. 6, 065008. DOI: <https://doi.org/10.1088/0964-1726/20/6/065008>.
  9. Rahimi G. H., Arefi M., Khoshgoftar M. J. Application and analysis of functionally graded piezoelectrical rotating cylinder as mechanical sensor subjected to pressure and thermal loads // *Appl. Math. Mech.*, 2011. vol. 32, no. 8. pp. 997–1008. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10483-011-1475-6>.
  10. Shlyakhin D. A., Kalmova M. A. Uncoupled problem of thermoelectroelasticity for a cylindrical shell / *XXX Russian-Polish-Slovak Seminar Theoretical Foundation of Civil Engineering* / Lecture Notes in Civil Engineering, 189. Cham: Springer, 2022. pp. 263–271. EDN: GHLQKB. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-86001-1\\_31](https://doi.org/10.1007/978-3-030-86001-1_31).
  11. Шляхин Д. А., Савинова Е. В., Юрин В. А. Динамическая задача термоэлектроупругости для круглой жестко закрепленной пластины // *Вестник Инженерной школы Дальневосточного федерального университета*, 2022. №1(50). С. 3–16. EDN: QUVZUZ. DOI: <https://doi.org/10.24866/2227-6858/2022-1/3-16>.
  12. Ватульян А. О. Тепловой удар по термоэлектроупругому слою // *Вестник ДГТУ*, 2001. Т. 1, № 1. С. 82–89. EDN: SONTVO.
  13. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Динамическая задача термоэлектроупругости для функционально-градиентного слоя // *Вычисл. мех. сплош. сред*, 2017. Т. 10, № 2. С. 117–126. EDN: ZBPCWT. DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.2.10>.
  14. Бабешко В. А., Ратнер С. В., Сыромятников П. В. О смешанных задачах для термоэлектроупругих сред с разрывными граничными условиями // *ДАН*, 2007. Т. 412, № 6. С. 753–758. EDN: IAALFF.
  15. Shang F., Kuna M., Kitamura T. Theoretical investigation of an elliptical crack in thermopiezoelectric material. Part I: Analytical development // *J. Theor. Appl. Fract. Mech.*, 2003. vol. 40, no. 3. pp. 237–246. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2003.08.003>.
  16. Kirilyuk V. S. Thermostressed state of a piezoelectric body with a plate crack under symmetric thermal load // *Int. Appl. Mech.*, 3. vol. 44. pp. 320–330. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-008-0048-8>.
  17. Шляхин Д. А., Кальмова М. А. Связанная нестационарная задача термоэлектроупругости для длинного полого цилиндра // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 4. С. 677–691. EDN: MRFBKD. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1781>.
  18. Шляхин Д. А., Кальмова М. А. Нестационарная задача термоэлектроупругости для длинного пьезокерамического цилиндра // *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2021. № 2. С. 181–190. EDN: HLRTJN. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.2.16>.
  19. Abou-Dina M., Dhaba A. R. E, Ghaleb A. F., Rawy E. K. A model of nonlinear thermoelectroelasticity in extended thermodynamics // *Int. J. Eng. Sci.*, 2017. vol. 119. pp. 29–39. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2017.06.010>.
  20. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. *Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел*. М.: Наука, 1988. 470 с.
  21. Сеницкий Ю. Э. Биортогональное многокомпонентное конечное интегральное преобразование и его приложение к краевым задачам механики // *Изв. вузов. Матем.*, 1996. № 8. С. 71–81.
  22. Tung V. T., Tinh N. T., Yen N. H., Tuan D. A. Evaluation of electromechanical coupling factor for piezoelectric materials using finite element modeling // *Int. J. Mat. Chem.*, 2013. vol. 3, no. 3. pp. 59–63. DOI: <https://doi.org/10.5923/j.ijmc.20130303.03>.

MSC: 74F15, 74S20

## A coupled non-stationary axisymmetric problem of thermoelectroelasticity for a circular piezoceramic hinged plate

*D. A. Shlyakhin, E. V. Savinova*

Samara State Technical University,

244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

### Abstract

The new closed solution of the coupled non-stationary axisymmetric problem of thermoelectroelasticity for a round axially polarized hinged piezoceramic plate in a three-dimensional formulation is constructed. Its cylindrical surface is hinged. The case of temperature change on the cylindrical surface and front planes of the plate (boundary conditions of the 1st kind) is considered. The front electroded surfaces of the structure are connected to a measuring device with a large input resistance (electric idle).

A plate is investigated, the geometrical dimensions of which and the rate of change of the temperature load do not significantly affect the inertial characteristics of the electroelastic system, making it possible to use the equations of equilibrium, electrostatics and thermal conductivity in the mathematical formulation of the problem. In this case, the initial calculated relations form a non-self-adjoint system of differential equations in partial derivatives.

The problem is solved by sequentially using the Hankel integral transform with respect to the radial coordinate and the generalized method of the biorthogonal finite integral transform (FIT) with respect to the axial variable. The application of the structural FIT algorithm allows one to construct an adjoint operator, without which it is impossible to solve non-self-adjoint linear problems by expanding in terms of eigenvector functions.


The constructed calculation relations make it possible to determine the stress-strain state, temperature and electric fields induced in a piezoceramic

### Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes

#### Research Article

© Authors, 2023


© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

#### Please cite this article in press as:

Shlyakhin D. A., Savinova E. V. A coupled non-stationary axisymmetric problem of thermoelectroelasticity for a circular piezoceramic hinged plate, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 1, pp. 159–178. EDN: [WXLOUH](https://doi.org/10.14498/vsgtu1959). DOI: [10.14498/vsgtu1959](https://doi.org/10.14498/vsgtu1959) (In Russian).

#### Author's Details:

*Dmitry A. Shlyakhin*  <https://orcid.org/0000-0003-0926-7388>Dr. Techn. Sci., Associate Professor; Head of Dept.; Dept. of Construction Mechanics, Engineering Geology, Grounds and Foundations; e-mail: [d-612-mit2009@yandex.ru](mailto:d-612-mit2009@yandex.ru)*Elena V. Savinova*  <https://orcid.org/0000-0001-7155-2281>Postgraduate Student; Senior Lecturer; Dept. of Construction Mechanics, Engineering Geology, Grounds and Foundations; e-mail: [slenax@yandex.ru](mailto:slenax@yandex.ru)

element under an arbitrary external temperature action, and also to analyze the effect of the rate of change in body volume and tension on the temperature field.

**Keywords:** problem of thermoelectroelasticity, coupled problem, round piezoceramic plate, biorthogonal finite integral transformations.

Received: 5<sup>th</sup> October, 2022 / Revised: 19<sup>th</sup> December, 2022 /

Accepted: 27<sup>th</sup> December, 2022 / First online: 24<sup>th</sup> March, 2023

---

**Competing interests.** We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

**Authors' contributions and responsibilities.** Each author has participated in the article concept development; the authors contributed equally to this article. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

## References

1. Ionov B. P., Ionov A. B. Spectral-statistical approach to non-contact temperature measurement, *Sensors and Systems*, 2009, no. 2, pp. 9–11 (In Russian). EDN: [JWYALN](#).
2. Pankov A. A. Resonant diagnostics of temperature distribution by the piezo-electroluminescent fiber-optical sensor according to the solution of the fredholm integral equation, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no.2, pp. 72–82 (In Russian). EDN: [XUGGCD](#). DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.2.07>.
3. Mindlin R. D. Equations of high frequency vibrations of thermopiezoelectric crystal plates, *Int. J. Solids Struct.*, 1974, vol. 10, no. 6, pp. 625–637. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(74\)90047-X](https://doi.org/10.1016/0020-7683(74)90047-X).
4. Green A. E. Thermoelasticity without energy dissipation, *J. Elasticity*, 1993, vol. 31, pp. 189–208. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00044969>.
5. Saadatfar M., Razavi A. S. Piezoelectric hollow cylinder with thermal gradient, *J. Mech. Sci. Technol.*, 2009, vol. 23, pp. 45–53. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12206-008-1002-8>.
6. Podil'chuk Y. N. Exact analytical solutions of static electroelastic and thermoelectroelastic problems for a transversely isotropic body in curvilinear coordinate systems, *Int. Appl. Mech.*, 2003, no. 39, pp. 132–170. EDN: [VAZWKP](#). DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1023953313612>.
7. Khorsand M. Dynamic analysis of a functionally graded piezoelectric spherical shell under mechanical and thermal shocks, *J. Mech. Eng. Sci.*, 2014, vol. 228, no. 4, pp. 632–645. DOI: <https://doi.org/10.1177/09544062134894>.
8. Akbarzadeh A. H., Babaei M. H., Chen Z. T. The thermo-electromagnetoelastic behavior of a rotating functionally graded piezoelectric cylinder, *Smart Mater. Struct.*, 2011, vol. 20, no. 6, 065008. DOI: <https://doi.org/10.1088/0964-1726/20/6/065008>.
9. Rahimi G. H., Arefi M., Khoshgoftar M. J. Application and analysis of functionally graded piezoelectrical rotating cylinder as mechanical sensor subjected to pressure and thermal loads, *Appl. Math. Mech.*, 2011, vol. 32, no. 8, pp. 997–1008. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10483-011-1475-6>.
10. Shlyakhin D. A., Kalmova M. A. Uncoupled problem of thermoelectroelasticity for a cylindrical shell, In: *XXX Russian-Polish-Slovak Seminar Theoretical Foundation of Civil Engineering*, Lecture Notes in Civil Engineering, 189. Cham, Springer, 2022, pp. 263–271. EDN: [GHLQKB](#). DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-86001-1\\_31](https://doi.org/10.1007/978-3-030-86001-1_31).
11. Shlyakhin D. A., Savinova E. V., Yurin V. A. Dynamic problem of thermoelectricity for round rigidly fixed plate, *FEFU School of Engineering Bulletin*, 2022, no. 1(50), pp. 3–16 (In Russian). EDN: [QUVUZU](#). DOI: <https://doi.org/10.24866/2227-6858/2022-1/3-16>.

12. Vatulyan A. O. Thermal shock on the thermoelectroelastic layer, *Vestnik of Don State Technical University*, 2001, vol. 1, no. 1, pp. 82–89 (In Russian). EDN: **SONTVO**.
13. Vatulyan A. O. Nesterov S. A. Dynamic problem of thermoelectroelasticity for a functional-gradient layer, *Computational Continuum Mechanics*, 2017, vol. 10, no. 2, pp. 117–126 (In Russian). EDN: **ZBPCWT**. DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.2.10>.
14. Babeshko V. A., Ratner S. V., Syromyatnikov P. V. On mixed problems for thermoelectroelastic media with discontinuous boundary conditions, *Dokl. Phys.*, 2007, vol. 52, no. 2, pp. 90–95. EDN: **LKJKEP**. DOI: <https://doi.org/10.1134/S102833580702005X>.
15. Shang F., Kuna M., Kitamura T. Theoretical investigation of an elliptical crack in thermopiezoelectric material. Part I: Analytical development, *J. Theor. Appl. Fract. Mech.*, 2003, vol. 40, no. 3, pp. 237–246. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2003.08.003>.
16. Kirilyuk V. S. Thermostressed state of a piezoelectric body with a plate crack under symmetric thermal load, *Int. Appl. Mech.*, 3, vol. 44, pp. 320–330. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-008-0048-8>.
17. Shlyakhin D. A., Kalmova M. A. The coupled non-stationary thermo-electro-elasticity problem for a long hollow cylinder, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 677–691 (In Russian). EDN: **MRFBKD**. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1781>.
18. Shlyakhin D. A., Kalmova M. A. The nonstationary thermoelectric elasticity problem for a long piezoceramic cylinder, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2021, no. 2, pp. 181–190 (In Russian). EDN: **HLRTJN**. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.2.16>.
19. Abou-Dina M., Dhaba A. R. E., Ghaleb A. F., Rawy E. K. A model of nonlinear thermoelectroelasticity in extended thermodynamics, *Int. J. Eng. Sci.*, 2017, vol. 119, pp. 29–39. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2017.06.010>.
20. Parton V. Z., Kudryavtsev B. A. *Electromagnetoelasticity: Piezoelectrics and Electrically Conductive Solids*. New York, Gordon and Breach Science, 1988, xix+503 pp.
21. Senitskii Yu. E. A biorthogonal multicomponent finite integral transformation and its application to boundary value problems in mechanics, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1996, vol. 40, no. 8, pp. 69–79.
22. Tung V. T., Tinh N. T., Yen N. H., Tuan D. A. Evaluation of electromechanical coupling factor for piezoelectric materials using finite element modeling, *Int. J. Mat. Chem.*, 2013, vol. 3, no. 3, pp. 59–63. DOI: <https://doi.org/10.5923/j.ijmc.20130303.03>.