Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 26, № 4. С. 672–693
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1962
EDN: DIOYZF

УДК 517.956

Начально-граничная задача для гиперболического уравнения второго рода с тремя линиями вырождения

А. К. Уринов[1,2]***, Д. А. Усмонов***[1]

[1] Ферганский государственный университет,
Узбекистан, 150100, Фергана, ул. Мураббийлар, 19.
[2] Институт математики имени В. И. Романовского АН Республики Узбекистан,
Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университетская, 46.

Аннотация

В прямоугольной области рассмотрено дифференциальное уравнение в частных производных гиперболического типа второго рода, вырождающееся на боковых сторонах и на основании прямоугольника. Для рассматриваемого уравнения сформулирована начально-граничная задача с нелокальными граничными условиями. Исследованы единственность, существование и устойчивость решения поставленной задачи. Единственность решения задачи доказана методом интегралов энергии. Существование решения задачи исследовано с применением метода Фурье, основанного на разделении переменных. При этом сначала исследована спектральная задача для обыкновенного дифференциального уравнения, возникающая из поставленной задачи при разделении переменных. Доказано, что спектральная задача может иметь только положительное собственное значение. Далее построена функция Грина спектральной задачи, с помощью чего она эквивалентно сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с симметричным ядром. Отсюда на основании теории интегральных уравнений заключено, что существует счетное число собственных значений и собственных функций спектральной задачи. Найдены условия, при которых заданная функция разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям спектральной задачи. С использованием свойств функции Грина спектральной задачи доказана лемма о равномерной сходимости некоторых билинейных рядов, которые используются при

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Научная статья

Образец для цитирования
Уринов А. К., Усмонов Д. А. Начально-граничная задача для гиперболического уравнения второго рода с тремя линиями вырождения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 4. С. 672–693. EDN: DIOYZF. DOI: 10.14498/vsgtu1962.

Сведения об авторах

Ахмаджон Кушакович Уринов https://orcid.org/0000-0002-9586-1799
доктор физико-математических наук, профессор; профессор каф. математического анализа и дифференциальных уравнений[1]; ведущий научный сотрудник[2]; e-mail: urinovak@mail.ru

Дониёр Абдумутолиб угли Усмонов https://orcid.org/0000-0002-3574-075X
исследователь; каф. математического анализа и дифференциальных уравнений[1]; e-mail: usmonov-doniyor@inbox.ru

доказательстве существования решения поставленной задачи. Доказаны также леммы о порядке коэффициентов Фурье заданной функции. Решение изучаемой задачи выписано в виде суммы ряда Фурье по системе собственных функций спектральной задачи. Равномерная сходимость этого ряда и рядов, полученных из него почленным дифференцированием, доказана с помощью лемм, перечисленных выше. В конце статьи получены две оценки для решения поставленной задачи, одна из которых — в пространстве квадратично суммируемых функций с весом, а другая — в пространстве непрерывных функций. Из этих неравенств следует устойчивость решения в соответствующих пространствах.

Ключевые слова: уравнение гиперболического типа, вырождающееся уравнение второго рода, начально-граничная задача, спектральная задача, функция Грина, интегральное уравнение, ряд Фурье, метод разделения переменных, метод интегралов энергии, единственность, существование и устойчивость решения.

Получение: 12 октября 2022 г. / Исправление: 8 ноября 2022 г. /
Принятие: 29 ноября 2022 г. / Публикация онлайн: 15 декабря 2022 г.

1. Постановка задачи. В области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1; 0 < t < T\}$ рассмотрим следующее вырождающееся гиперболическое уравнение второго рода:

$$t^{m-a}(t^a u_t)_t + bu = x^{\gamma-\alpha}(1-x)^{\delta-\beta}[x^\alpha(1-x)^\beta u_x]_x \tag{1}$$

с тремя линиями вырождения, где a, b, m, α, β, γ, δ — заданные действительные числа, причем $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $0 < a < 1$.

Уравнение (1) с $\alpha = 1$, $m = a = b = \beta = \gamma = \delta = 0$ возникает, например, при изучении свободных колебаний под действием силы тяжести однородной подвешенной тяжелой нити, а также при изучении радиальных колебаний газа в неподвижной неограниченной цилиндрической трубке с $\alpha = 2$, $m = a = b = \beta = \gamma = \delta = 0$ — при исследовании малых колебаний газа около его положения равновесия внутри непроницаемой оболочки сферической формы, а с $m = a = b = 0$, $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ — при изучении свободных колебаний вращающейся струны [1].

Известно, что начальные задачи для вырождающихся гиперболических уравнений второго рода, в том числе для уравнения (1) при $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, изучены в работах [2–12]. Изучению начально-граничных задач для уравнений второго порядка, вырождающихся на одной боковой стороне прямоугольника, посвящены, например, работы [13–16], а для уравнений, вырождающихся на обеих боковых сторонах прямоугольника — работы [17, 18]. В этих работах в зависимости от порядка вырождения уравнения на боковых сторонах прямоугольника заданы различные локальные краевые условия относительно искомой функции. Начально-граничные задачи для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка второго рода в многомерных цилиндрических областях рассмотрены в работах [19–25]. В задачах, изученных в этих работах, на боковой поверхности цилиндра заданы обычные локальные условия, т.е. значения искомой функции. В настоящей работе исследуем следующую начально-граничную задачу для уравнения (1) в области Ω с нелокальными граничными условиями.

Задача A_{pq}. *Найти функцию $u(x,t)$, обладающую следующими свойствами*:

1) $u(x,t)$, $x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_x$, $t^a u_t \in C(\overline{\Omega})$; $x^{\gamma-\alpha}(1-x)^{\delta-\beta}[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_x]_x$, $t^{m-a}(t^a u_t)_t \in C(\Omega)$;
2) *в области Ω удовлетворяет уравнению* (1);
3) *на границе области Ω выполняются следующие начальные и граничные условия*:

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \; x \in [0,1]; \quad \lim_{t\to+0} t^a u_t(x,t) = \varphi_2(x), \; x \in (0,1), \tag{2}$$

$$pu(0,t) = qu(1,t), \; q\lim_{x\to 0} x^{\alpha}u_x(x,t) = p\lim_{x\to 1}(1-x)^{\beta}u_x(x,t), \; t\in[0,T], \tag{3}$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — заданные непрерывные функции, а p и q — заданные действительные числа, причем $p \neq q$.

Отметим, что из задачи A_{pq} в частном случае при $p=0$ и $q=0$ следуют локальные задачи, которые представляют самостоятельный интерес.

Исследуем единственность, существование и устойчивость решения задачи A_{pq}. При этом воспользуемся методом интегралов энергии и методом Фурье, основанным на разделении переменных. Отметим, что в работах [26–30] метод Фурье успешно применен к исследованию краевых задач для вырождающихся уравнений второго порядка смешанного типа второго рода в прямоугольной области.

2. Единственность решения задачи A_{pq}.

Теорема 1.*Если $a > m/2$, $b \geqslant 0$, $\gamma < \alpha+1$, $\delta < \beta+1$, то задача A_{pq} не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Предположим, что существуют два решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ задачи A_{pq}. Введем обозначение $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. Тогда функция $u(x,t)$ является решением уравнения (1), удовлетворяющего однородным условиям (3) и $u(x,0)=0$, $\lim_{t\to+0} t^a u_t(x,t) = 0$. Возьмем произвольное число η из $(0,T]$ и введем функцию

$$V(x,t) = \begin{cases} 0, & \eta \leqslant t \leqslant T, \\ \displaystyle\int_{\eta}^{t} \xi^{-a}u(x,\xi)d\xi, & 0 \leqslant t \leqslant \eta. \end{cases} \tag{4}$$

В силу $a \in (0,1)$ и свойств функции $u(x,t)$ функция $V(x,t)$ обладает следующими свойствами:

1) $V(x,t)$, $x^{\alpha}(1-x)^{\beta}V_x(x,t)$ непрерывны в $\overline{\Omega}$ и $pV(0,t) = qV(1,t)$, $q\lim_{x\to 0} x^{\alpha}V_x(x,t) = p\lim_{x\to 1}(1-x)^{\beta}V_x(x,t)$;
2) $t^a V_t$, $t^a(t^a V_t)_t$ непрерывны в $\overline{\Omega}$ и $V(x,t)=0$ при $t \in [\eta, T]$.

Умножим уравнение (1) на функцию $t^{a-m}x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}V(x,t)$ и проинтегрируем по области Ω:

$$\int_0^1\int_0^T t^{a-m}x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}[t^m u_{tt} + at^{m-1}u_t + bu]V\,dtdx =$$

$$= \int_0^1\int_0^T t^{a-m}x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}[x^{\gamma}(1-x)^{\delta}u_{xx} +$$

$$+\alpha x^{\gamma-1}(1-x)^{\delta}u_x-\beta x^{\gamma}(1-x)^{\delta-1}u_x]V\,dtdx.$$

Это равенство можно переписать в виде

$$\int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}dx\int_0^{\eta}[(t^a u_t)_t+bt^{a-m}u]V\,dt=$$
$$=\int_0^{\eta}t^{a-m}dt\int_0^1[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_x]_xV\,dx.$$

Применяя правило интегрирования по частям к внутренним интегралам и учитывая равенства $V(x,\eta)=0$, $\lim\limits_{t\to 0}t^a u_t=0$, $pV(0,t)=qV(1,t)$, $q\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha}u_x(x,t)=p\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\beta}u_x(x,t)$, имеем

$$\int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}dx\int_0^{\eta}[t^a u_tV_t-bt^{a-m}uV]dt=$$
$$=\int_0^{\eta}t^{a-m}dt\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_xV_xdx. \quad (5)$$

Из (4) следует, что $V_t=t^{-a}u$, $u_x=t^aV_{xt}$, $0<t<\eta$. Учитывая это, из (5) получим равенство

$$\int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}dx\int_0^{\eta}[uu_t-bt^{2a-m}VV_t]dt=$$
$$=\int_0^{\eta}t^{2a-m}dt\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}V_{xt}V_xdx,$$

которое можно записать в виде

$$\int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}dx\int_0^{\eta}\Big[\frac{\partial}{\partial t}u^2-bt^{2a-m}\frac{\partial}{\partial t}V^2\Big]dt=$$
$$=\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}dx\int_0^{\eta}t^{2a-m}\frac{\partial}{\partial t}V_x^2dt.$$

Применяя правило интегрирования по частям, имеем

$$\int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}\Big\{\big[u^2-bt^{2a-m}V^2\big]\Big|_{t=0}^{t=\eta}+b(2a-m)\int_0^{\eta}t^{2a-m-1}V^2dt\Big\}dx=$$
$$=\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\Big[t^{2a-m}V_x^2\Big|_{t=0}^{t=\eta}-(2a-m)\int_0^{\eta}t^{2a-m-1}V_x^2dt\Big]dx.$$

Отсюда, учитывая $u(x,0)=0$, $V(x,\eta)=0$, $V_x(x,\eta)=0$ и $2a-m>0$, имеем

$$\int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}u^2(x,\eta)dx=$$

$$= -b(2a-m)\int_0^\eta t^{2a-m-1}dt\int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}V^2dx -$$

$$- (2a-m)\int_0^\eta t^{2a-m-1}dt\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}V_x^2dx,$$

откуда в силу $2a-m>0$, $b\geqslant 0$ и $\alpha-\gamma>-1$, $\beta-\delta>-1$ следует равенство

$$\int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}u^2(x,\eta)dx = 0.$$

Следовательно, $x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}u(x,\eta)\equiv 0$ при $0<x<1$, т.е. $u(x,\eta)\equiv 0$ при $0\leqslant x\leqslant 1$ для каждого η. Так как $\eta\in(0,T]$ — произвольное число, $u(x,t)\equiv 0$ в области $\overline{\Omega}$. Тогда $u_1(x,t)=u_2(x,t)$, $(x,t)\in\bar{\Omega}$. Теорема 1 доказана. □

3. Исследование спектральной задачи. Формальное применение метода Фурье к поставленной задаче A_{pq} приводит к следующей спектральной задаче: *найти значения параметра* λ, *при которых существуют нетривиальные решения уравнения*

$$Mv \equiv -\big[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v'(x)\big]' = \lambda x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}v(x), \quad 0<x<1, \tag{6}$$

удовлетворяющие следующим условиям:

$$\left.\begin{array}{c} v(x),\ x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v'(x)\in C[0,1];\ \ [x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v'(x)]'\in L_2(0,1); \\ pv(0)=qv(1), \quad q\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha}v'(x)=p\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\beta}v'(x). \end{array}\right\} \tag{7}$$

Определим знак параметра λ, при котором существуют нетривиальные решения задачи (6), (7). Умножим обе части уравнения (6) на функцию $v(x)$ и проинтегрируем по x на сегменте $[0,1]$. Затем, применяя правило интегрирования по частям к интегралу, стоящему в левой части, и учитывая условия (7), получим

$$\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}[v'(x)]^2dx = \lambda\int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}v^2(x)dx.$$

Отсюда при $v(x)\not\equiv 0$ следует $\lambda\geqslant 0$. Если $\lambda=0$, то из последнего равенства следует $v'(x)=0$, $0<x<1$. Тогда $v(x)=\mathrm{const}$, $x\in(0,1)$, откуда в силу условия $pv(0)=qv(1)$ при $p\neq q$ получим $v(x)\equiv 0$, $0\leqslant x\leqslant 1$. Следовательно, если $p\neq q$, то задача (6), (7) может иметь нетривиальные решения только при $\lambda>0$.

Предполагая $p\neq q$, спектральную задачу (6), (7) исследуем методом функций Грина. Функция Грина $G(x,s)$ задачи должна обладать следующими свойствами:

1°) функция $G(x,s)$ непрерывна для всех x, $s\in[0,1]$;
2°) в каждом из интервалов $(0,s)$ и $(s,1)$ существует непрерывная производная $(\partial/\partial x)G(x,s)$, а при $x=s$ имеет скачок $[-s^{-\alpha}(1-s)^{-\beta}]$, т.е.

$$\frac{\partial G(x,s)}{\partial x}\Big|_{x=s+0} - \frac{\partial G(x,s)}{\partial x}\Big|_{x=s-0} = -s^{-\alpha}(1-s)^{-\beta}; \tag{8}$$

3°) в интервалах $(0, s)$ и $(s, 1)$ функция $G(x, s)$, рассматриваемая как функция от x, удовлетворяет однородному уравнению $MG(x, s) = 0$;

4°) при $\forall s \in (0, 1)$ выполняются граничные условия

$$pG(0, s) = qG(1, s), \quad q \lim_{x\to 0} x^{\alpha} G_x(x, s) = p \lim_{x\to 1} (1 - x)^{\beta} G_x(x, s). \tag{9}$$

Функция $G(x, s)$, обладающая перечисленными выше свойствами, существует, единственна и имеет вид

$$G(x, s) = \begin{cases} \dfrac{p}{p-q} \displaystyle\int_0^x \dfrac{dz}{z^{\alpha}(1-z)^{\beta}} + \dfrac{q}{p-q} \displaystyle\int_0^s \dfrac{dz}{z^{\alpha}(1-z)^{\beta}} + \dfrac{q^2\sigma}{(p-q)^2}, \ x < s; \\ \dfrac{p}{p-q} \displaystyle\int_0^s \dfrac{dz}{z^{\alpha}(1-z)^{\beta}} + \dfrac{q}{p-q} \displaystyle\int_0^x \dfrac{dz}{z^{\alpha}(1-z)^{\beta}} + \dfrac{q^2\sigma}{(p-q)^2}, \ s < x, \end{cases} \tag{10}$$

где $\sigma = \Gamma(2 - \alpha - \beta)/[\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(1 - \beta)]$, $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера [31].

Докажем, что функция (10) действительно удовлетворяет условиям 1°–4°.

В силу условия α, $\beta \in [0, 1)$ каждый из интегралов в (10) является непрерывной функцией своего верхнего предела. Поэтому функция $G(x, s)$ непрерывна в $\Omega_1 = \{(x, s) : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant s \leqslant 1\}$ при $x \neq s$. Кроме этого, для каждого фиксированного $s \in (0, 1)$ $\lim\limits_{x\to s+0} G(x, s) = \lim\limits_{x\to s-0} G(x, s) = G(s, s)$, а функция

$$G(s, s) = \frac{p+q}{p-q} \int_0^s \frac{dz}{z^{\alpha}(1-z)^{\beta}} + \frac{q^2\sigma}{(p-q)^2}$$

непрерывна при $s \in [0, 1]$. Следовательно, $G(x, s) \in C(\overline{\Omega}_1)$.

Далее из (10) непосредственным дифференцированием находим

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x, s) = \begin{cases} p(p-q)^{-1} x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}, & x < s; \\ q(p-q)^{-1} x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}, & s < x. \end{cases} \tag{11}$$

Отсюда легко следует справедливость равенства (8).

В силу равенства (11)

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[x^{\alpha}(1-x)^{\beta} \frac{\partial}{\partial x} G(x, s)\Big] = 0$$

при $x \in (0, s) \cup (s, 1)$, т.е. функция $G(x, s)$ по x удовлетворяет однородному уравнению $MG \equiv 0$.

Из формул (10) и (11) с учетом

$$\int_0^1 z^{-\alpha}(1-z)^{-\beta} dz = \sigma$$

находим

$$G(0, s) = \frac{q}{p-q} \int_0^s \frac{dz}{z^{\alpha}(1-z)^{\beta}} + \frac{q^2\sigma}{(p-q)^2},$$

$$G(1, s) = \frac{p}{p-q} \int_0^s \frac{dz}{z^{\alpha}(1-z)^{\beta}} + \frac{q\sigma}{p-q} + \frac{q^2\sigma}{(p-q)^2},$$

$$\lim_{x\to 0} x^{\alpha} G_x(x,s) = \frac{p}{p-q}, \quad \lim_{x\to 1} (1-x)^{\beta} G_x(x,s) = \frac{q}{p-q}.$$

Из этих равенств легко следует справедливость условий (9).

Теперь, пользуясь свойствами функции $G(x,s)$ и методом, примененным в [32], легко убедиться, что задача (6), (7) эквивалентна следующему интегральному уравнению:

$$v(x) = \lambda \int_0^1 G(x,s) s^{\alpha-\gamma} (1-s)^{\beta-\delta} v(s) ds. \tag{12}$$

Умножая уравнение (12) на функцию $x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}$ и вводя обозначение $w(x) = x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2} v(x)$, получим интегральное уравнение с симметричным ядром $K(x,s) = (xs)^{(\alpha-\gamma)/2}[(1-x)(1-s)]^{(\beta-\delta)/2} G(x,s)$:

$$w(x) = \lambda \int_0^1 K(x,s) w(s) ds. \tag{13}$$

Нетрудно убедиться, что при $\gamma < 1+\alpha$, $\delta < \beta+1$, справедливо неравенство

$$\int_0^1 K^2(x,s) ds = A(x) \leqslant C_0 = \mathrm{const} < +\infty. \tag{14}$$

Тогда согласно теории интегральных уравнений уравнение (13) имеет счетное число собственных значений:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_k, \ldots, \tag{15}$$

$\lambda_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$, а соответствующие им собственные функции

$$w_1(x),\ w_2(x),\ w_3(x),\ \ldots,\ w_k(x),\ \ldots,$$

то есть функции

$$x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2} v_1(x),\ \ldots,\ x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2} v_k(x),\ \ldots \tag{16}$$

образуют ортонормированную систему в пространстве $L_2(0,1)$ и любая функция $g(x)$, представимая через ядро $K(x,s)$, т.е. функция вида

$$g(x) = \int_0^1 K(x,\xi) h(\xi) d\xi,$$

где $h(x) \in L_2(0,1)$, разлагается в ряд Фурье

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k(x),$$

где

$$c_k = \int_0^1 x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2} g(x) v_k(x) dx,$$

который на интервале $[0,1]$ сходится в среднем [33].

В силу эквивалентности задачи (6), (7) и интегрального уравнения (12) из доказанного выше следует, что числа (15) являются собственными значениями, а функции

$$v_1(x),\ v_2(x),\ \ldots,\ v_k(x), \ldots$$

— собственными функциями задачи (6), (7).

Лемма 1. *Пусть $\alpha \leqslant \gamma < 1+\alpha$, $\beta \leqslant \delta < 1+\beta$ и функция $g(x)$ удовлетворяет условиям*

$$x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}g(x), \quad x^{\alpha}(1-x)^{\beta}g'(x) \in C[0,1],$$

$$x^{(\gamma-\alpha)/2}(1-x)^{(\delta-\beta)/2}Mg(x) \in L_2(0,1);$$

$$pg(0) = qg(1), \quad q\lim_{x\to 0} x^{\alpha}g'(x) = p\lim_{x\to 1}(1-x)^{\beta}g'(x).$$

Тогда ее можно разложить на отрезке $[0,1]$ в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по системе собственных функций $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что в силу условий $\gamma < 1+\alpha$, $\delta < 1+\beta$ справедливо неравенство (14). Далее, учитывая вид функций $K(x,s)$, $Mg(x)$ и свойства функций $G(x,s)$ и $g(x)$, имеем

$$\int_0^1 K(x,s)s^{(\gamma-\alpha)/2}(1-s)^{(\delta-\beta)/2}Mg(s)ds =$$
$$= \int_0^1 (xs)^{(\alpha-\gamma)/2}\big[(1-x)(1-s)\big]^{(\beta-\delta)/2}G(x,s)\,\times$$
$$\times\,\big\{s^{(\gamma-\alpha)/2}(1-s)^{(\delta-\beta)/2}\big[-s^{\alpha}(1-s)^{\beta}g'(s)\big]'\big\}ds =$$
$$= x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}\int_0^1 G(x,s)\big[-s^{\alpha}(1-s)^{\beta}g'(s)\big]'ds =$$
$$= x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}\Big[-s^{\alpha}(1-s)^{\beta}g'(s)G(x,s)\Big|_{s=0}^{s=1} +$$
$$+\,s^{\alpha}(1-s)^{\beta}g(s)G_s(x,s)\Big|_{s=0}^{s=x-0} + s^{\alpha}(1-s)^{\beta}g(s)G_s(x,s)\Big|_{s=x+0}^{s=1}\Big] -$$
$$-\left(\int_0^x + \int_x^1\right)g(s)\big[s^{\alpha}(1-s)^{\beta}G_s(x,s)\big]_s ds =$$
$$= x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}g(x).$$

Справедливо равенство

$$x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}g(x) = \int_0^1 K(x,s)s^{(\gamma-\alpha)/2}(1-s)^{(\delta-\beta)/2}Mg(s)ds. \qquad (17)$$

Так как $x^{(\gamma-\alpha)/2}(1-x)^{(\delta-\beta)/2}Mg(x) \in L_2(0,1)$, из (17) следует, что

$$x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}g(x)$$

— функция, представимая через ядро $K(x,s)$. Тогда в силу неравенства (14) и теоремы Гильберта—Шмидта [33] эта функция на отрезке $[0,1]$ разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье по системе функций $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}g(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}g_k w_k(x),$$

т.е

$$x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}g(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}g_k v_k(x).$$

Учитывая $\alpha-\gamma<0$ и $\beta-\delta<0$ и разделяя это равенство при $x(1-x)>0$ на $x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}$, имеем нужное разложение. Лемма 1 доказана. $\square$

4. Вспомогательные леммы. В этом пункте предположим, что $\alpha<\gamma<$ $<1+\alpha$, $\beta<\delta<1+\beta$, $p\neq q$, сформулируем и докажем некоторые леммы, которые используются при доказательстве существования решения задачи A_{pq}. Здесь под λ_k и $v_(x)$, $k\in\mathbb{N}$, понимаются собственные значения и собственные функции задачи (6), (7), а под g_k — коэффициенты Фурье заданной функции $g(x)$ по системе (16):

$$g_k=\int_0^1 x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}g(x)v_k(x)dx,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Лемма 2. *Следующие ряды сходятся равномерно на сегменте* $[0,1]$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{v_k^2(x)}{\lambda_k},\qquad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{[x^\alpha(1-x)^\beta v_k'(x)]^2}{\lambda_k^2}. \tag{18}$$

Доказательство. В силу (6) и (12) справедливы равенства

$$v_k(x)=\lambda_k\int_0^1 G(x,s)s^{\alpha-\gamma}(1-s)^{\beta-\delta}v_k(s)ds=$$
$$=-\int_0^1 G(x,s)\big[s^\alpha(1-s)^\beta v_k'(s)\big]'ds.$$

Отсюда, применяя правило интегрирования по частям, а затем принимая во внимание условия $q\lim\limits_{s\to0}s^\alpha v_k'(s)=p\lim\limits_{s\to1}(1-s)^\beta v_k'(s)$, $pG(x,0)=qG(x,1)$ и (7), получим

$$v_k(x)=\int_0^1 s^\alpha(1-s)^\beta G_s(x,s)v_k'(s)ds.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}=\int_0^1\big\{s^{\alpha/2}(1-s)^{\beta/2}G_s(x,s)\big\}\Big\{\frac{s^{\alpha/2}(1-s)^{\beta/2}v_k'(s)}{\sqrt{\lambda_k}}\Big\}ds. \tag{19}$$

Далее с помощью правила интегрирования по частям и равенств (6), (7) находим

$$\int_0^1 \frac{s^\alpha(1-s)^\beta v_k'(s)v_l'(s)}{\sqrt{\lambda_k\lambda_l}}ds = s^\alpha(1-s)^\beta v_k'(s)v_l(s)\Big|_{s=0}^{s=1} -$$
$$-\int_0^1 \frac{\left[s^\alpha(1-s)^\beta v_k'(s)\right]' v_l(s)}{\sqrt{\lambda_k\lambda_l}}ds = \sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_l}}\int_0^1 s^{\alpha-\gamma}(1-s)^{\beta-\delta}v_k(s)v_l(s)ds =$$
$$= \sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_l}}\int_0^1 w_k(s)w_l(s)ds = \begin{cases} 1, & k=l, \\ 0, & k\neq l. \end{cases} \quad (20)$$

Следовательно, $\left\{s^{\alpha/2}(1-s)^{\beta/2}v_k'(s)/\sqrt{\lambda_k}\right\}_{k=1}^{+\infty}$ — ортонормальная система.

Из (19) и (20) следует, что $v_k(x)/\sqrt{\lambda_k}$ — коэффициенты Фурье функции $s^{\alpha/2}(1-s)^{\beta/2}G_s(x,s)$ по системе $\left\{s^{\alpha/2}(1-s)^{\beta/2}v_k'(s)/\sqrt{\lambda_k}\right\}_{k=1}^{+\infty}$. Поэтому, согласно неравенству Бесселя [33], имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \leqslant \int_0^1 s^\alpha(1-s)^\beta[G_s(x,s)]^2ds. \quad (21)$$

Принимая во внимание равенство (8), имеем

$$\int_0^1 s^\alpha(1-s)^\beta[G_s(x,s)]^2ds = \frac{p^2}{(p-q)^2}\int_0^x s^{-\alpha}(1-s)^{-\beta}ds +$$
$$+\frac{q^2}{(p-q)^2}\int_x^1 s^{-\alpha}(1-s)^{-\beta}ds \leqslant \frac{C_1}{(p-q)^2}\int_0^1 s^{-\alpha}(1-s)^{-\beta}ds =$$
$$= \frac{C_1\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{(p-q)^2\Gamma(2-\alpha-\beta)}, \quad C_1 = \max\{p^2,q^2\}. \quad (22)$$

Отсюда и из (21) следует, что первый ряд в (18) сходится равномерно.

Теперь, согласно уравнению (12), имеет место равенство

$$\frac{x^\alpha(1-x)^\beta v_k'(x)}{\lambda_k} = \int_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta G_x(x,s)s^{\alpha-\gamma}(1-s)^{\beta-\delta}v_k(s)ds.$$

Так как $\left\{s^{(\alpha-\gamma)/2}(1-s)^{(\beta-\delta)/2}v_k(s)\right\}_{k=1}^{+\infty}$ — ортонормальная система, функции $x^\alpha(1-x)^\beta v_k'(x)/\lambda_k$ можно считать коэффициентами Фурье по аргументу s для функции $x^\alpha(1-x)^\beta s^{(\alpha-\gamma)/2}(1-s)^{(\beta-\delta)/2}G_x(x,s)$. Тогда, согласно неравенству Бесселя, имеем

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{[x^\alpha(1-x)^\beta v_k'(x)]^2}{\lambda_k^2} \leqslant \int_0^1 x^{2\alpha}(1-x)^{2\beta}s^{\alpha-\gamma}(1-s)^{\beta-\delta}[G_x(x,s)]^2ds. \quad (23)$$

На основании формулы (8), имеем

$$\int_0^1 x^{2\alpha}(1-x)^{2\beta}s^{\alpha-\delta}(1-s)^{\beta-\gamma}[G'_x(x,s)]^2ds \leqslant \leqslant \frac{C_1\Gamma(\alpha-\delta+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)}{(p-q)^2\Gamma(\alpha+\beta-\delta-\gamma+2)}. \quad (24)$$

Если учесть (24), то из (23) следует, что второй ряд в (18) сходится равномерно. Лемма 2 доказана. □

Лемма 3. *Если выполнены условия*

$$x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}g(x) \in C[0,1],$$

$$x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}g'(x) \in L_2(0,1); \quad pg(0) = qg(1),$$

то справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k g_k^2 \leqslant \int_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta[g'(x)]^2dx, \quad (25)$$

в частности, ряд в левой части сходится.

Доказательство. В силу уравнения (6) справедливо равенство

$$\lambda_k^{1/2}g_k = \lambda_k^{1/2}\int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}g(x)v_k(x)dx = = -\lambda_k^{-1/2}\int_0^1 g(x)\big[x^\alpha(1-x)^\beta v'_k(x)\big]'dx.$$

Из этого равенства, применяя правило интегрирования по частям и учитывая свойства функций $g(x)$ и $v_k(x)$, получим

$$\lambda_k^{1/2}g_k = \int_0^1 \big\{x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}g'(x)\big\}\big\{\lambda_k^{-1/2}x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}v'_k(x)\big\}dx.$$

Отсюда следует, что числа $\lambda_k^{1/2}g_k$ — коэффициенты Фурье функции

$$x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}g'(x)$$

по ортонормированной системе функций $\big\{x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}v'(x)/\sqrt{\lambda_k}\big\}_{k=1}^{+\infty}$. Тогда, согласно неравенству Бесселя, справедливо неравенство (25). Лемма 3 доказана. □

Аналогично лемме 3 доказываются следующие леммы.

Лемма 4. *Если выполнены условия*

$$x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}g(x),\ x^\alpha(1-x)^\beta g'(x) \in C[0,1],$$

$$x^{(\gamma-\alpha)/2}(1-x)^{(\delta-\beta)/2}Mg(x) \in L_2(0,1);$$

$$pg(0) = qg(1), \quad q \lim_{x\to 0} x^\alpha g'(x) = p \lim_{x\to 1} (1-x)^\beta g'(x),$$

то справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 g_k^2 \leqslant \int_0^1 x^{\gamma-\alpha}(1-x)^{\delta-\beta}[Mg(x)]^2 dx,$$

в частности, ряд в левой части сходится.

Лемма 5. *Если выполнены условия*

$$x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2} g(x),\ x^\alpha(1-x)^\beta g'(x) \in C[0,1],$$

$$x^{\gamma-\alpha}(1-x)^{\delta-\beta} Mg(x) \in C[0,1],$$

$$x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}\{x^{\gamma-\alpha}(1-x)^{\delta-\beta}Mg(x)\}' \in L_2(0,1);$$

$$pg(0) = qg(1), \quad q \lim_{x\to 0} x^\alpha g'(x) = p \lim_{x\to 1} (1-x)^\beta g'(x),$$

$$p \lim_{x\to 0} x^{\gamma-\alpha} Mg(x) = q \lim_{x\to 1} (1-x)^{\delta-\beta} Mg(x),$$

то справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^3 g_k^2 \leqslant \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta \{[x^{\gamma-\alpha}(1-x)^{\delta-\beta}Mg(x)]'\}^2 dx,$$

в частности, ряд в левой части сходится.

5. Существование и устойчивость решения A_{pq}. Введем следующие обозначения:

$$\overline{J}_\omega(x) = \Gamma(\omega+1)(x/2)^{-\omega} J_\omega(x), \quad p = \frac{1-a}{2-m},$$

$$r_k(t) = \frac{2}{2-m}\sqrt{b+\lambda_k}\, t^{(2-m)/2},$$

$$\varphi_{jk} = \int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}\varphi_j(x) v_k(x) dx, \quad j = 1, 2,$$

где $J_\omega(x)$ — функция Бесселя первого рода [34], а $v_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$ — собственные функции задачи (6), (7).

Теорема 2. *Пусть $0 < m < 2$, $m/2 < a < 1$, $\alpha \leqslant \gamma < 1+\alpha$, $\beta \leqslant \delta < 1+\beta$, $p \neq q$ и функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ удовлетворяют условиям леммы 3. Тогда сумма ряда*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \{\varphi_{1k}\overline{J}_{-p}[r_k(t)] + \varphi_{2k}(1-a)^{-1}t^{1-a}\overline{J}_p[r_k(t)]\} v_k(x) \tag{26}$$

определяет решение задачи A_{pq}.

Доказательство. Решение задачи A_{pq} формально ищем в виде

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(t)v_k(x), \tag{27}$$

где $u_k(t)$ — неизвестные функции, $k\in\mathbb{N}$.

Подставив (27) в уравнение (1) и условие (2), после некоторых преобразований относительно неизвестных функций $u_k(t)$ получим следующую задачу:

$$t^m u_k''(t)+at^{m-1}u_k'(t)+(b+\lambda_k)u_k(t)=0,\quad 0<t<T, \tag{28}$$

$$u_k(0)=\varphi_{1k},\quad \lim_{t\to+0}t^a u_k'(t)=\varphi_{2k}. \tag{29}$$

В силу $0<m<2$, $m/2<a<1$ решение задачи (28), (29) существует, единственно и имеет вид

$$u_k(t)=\varphi_{1k}\overline{J}_{-p}[r_k(t)]+\varphi_{2k}(1-a)^{-1}t^{1-a}\overline{J}_p[r_k(t)], \tag{30}$$

причем здесь $0<p<1/2$. Подставляя (30) в (27), получим формальное решение задачи A_{pq} в виде (26).

Теперь для доказательства теоремы достаточно доказать, что ряд (26) и ряды, соответствующие функциям $x^\alpha(1-x)^\beta u_x(x,t)$, $t^a u_t(x,t)$, сходятся равномерно в $\overline{\Omega}$, а ряды, соответствующие функциям $t^{m-a}[t^a u_t(x,t)]_t$, $x^{\alpha-\delta}(1-x)^{\beta-\gamma}[x^\alpha(1-x)^\beta u_x(x,t)]_x$, сходятся равномерно на любом компакте $D\subset\Omega$.

Сначала рассмотрим ряд (26). Так как $|\bar{J}_\nu(x)|\leqslant 1$ при любых $\nu>-1/2$, справедливы неравенства

$$\begin{aligned}|u(x,t)|&=\left|\sum_{k=1}^{+\infty}\bigl\{\varphi_{1k}\overline{J}_{-p}[r_k(t)]+\varphi_{2k}(1-a)^{-1}t^{1-a}\overline{J}_p[r_k(t)]\bigr\}v_k(x)\right|\leqslant\\ &\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\varphi_{1k}\overline{J}_{-p}[r_k(t)]+\varphi_{2k}(1-a)^{-1}t^{1-a}\overline{J}_p[r_k(t)]\right||v_k(x)|\leqslant\\ &\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty}\bigl(|\varphi_{1k}|+C_2|\varphi_{2k}|\bigr)|v_k(x)|,\quad C_2=\frac{t^{1-a}}{1-a}.\end{aligned} \tag{31}$$

Отсюда на основании неравенства Коши—Буняковского имеем

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|\varphi_{jk}|\,|v_k(x)|=\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\sqrt{\lambda_k}\varphi_{jk}\right|\left|\frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right|\leqslant\left[\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k\varphi_{jk}^2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2},\quad j=1,2.$$

Ряды, стоящие в правой части, в силу лемм 2 и 3 сходятся равномерно по x на $[0,1]$. Следовательно, ряд, стоящий в левой части, сходится равномерно по x на $[0,1]$. Тогда из (31) следует, что ряд (26) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$.

Далее,

$$|x^\alpha(1-x)^\beta u_x(x,t)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\left|\varphi_{1k}\overline{J}_{-p}[r_k(t)] + \varphi_{2k}(1-a)^{-1}t^{1-a}\overline{J}_p[r_k(t)]\right| \left|x^\alpha(1-x)^\beta v_k'(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\big(|\varphi_{1k}| + C_2|\varphi_{2k}|\big)\left|x^\alpha(1-x)^\beta v_k'(x)\right|. \quad (32)$$

Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\varphi_{jk}x^\alpha(1-x)^\beta v_k'(x)\right| = \sum_{k=1}^{+\infty}\left|\lambda_k\varphi_{jk}\right|\left|\frac{x^\alpha(1-x)^\beta v_k'(x)}{\lambda_k}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^2\varphi_{jk}^2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{[x^\alpha(1-x)^\beta v_k'(x)]^2}{\lambda_k^2}\right]^{1/2}, \quad j=1,2.$$

Здесь ряды, стоящие в правой части, в силу лемм 2 и 4 сходятся равномерно по x на $[0,1]$. Тогда и ряд, стоящий в левой части, сходится равномерно по x на $[0,1]$. Следовательно, ряд (32) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$.

Теперь рассмотрим ряд

$$\left|x^{\delta-\alpha}(1-x)^{\gamma-\beta}[x^\alpha(1-x)^\beta u_x(x,t)]_x\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\big(|\varphi_{1k}| + C_2|\varphi_{2k}|\big)\left|x^{\delta-\alpha}(1-x)^{\gamma-\beta}[x^\alpha(1-x)^\beta v_k'(x)]'\right|.$$

В силу уравнения (6) при $0<x<1$ справедливо неравенство

$$\left|x^{\delta-\alpha}(1-x)^{\gamma-\beta}[x^\alpha(1-x)^\beta u_x(x,t)]_x\right| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\big(|\varphi_{1k}| + C_1|\varphi_{2k}|\big)|\lambda_k v_k(x)|. \quad (33)$$

Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|\lambda_k\varphi_{jk}v_k(x)| = \sum_{k=1}^{+\infty}\left|\lambda_k^{3/2}\varphi_{jk}\right|\left|\frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right| \leqslant \left[\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^3\varphi_{jk}^2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2}, \quad j=1,2.$$

Здесь ряды, стоящие в правой части, в силу лемм 2 и 5 сходятся равномерно по x на $[0,1]$. Тогда равномерно по x на $[0,1]$ сходится и ряд, стоящий в левой части. Следовательно, ряд (33) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте $D\subset\Omega$.

Аналогично доказывается сходимость рядов $t^a u_t(x,t)$, $t^{m-a}[t^a u_t(x,t)]_t$. Теорема 2 доказана. □

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для решения задачи A_{pq} справедливы следующие оценки:*

$$\|u(x,t)\|_{L_{2,\rho}(0,1)} \leqslant C_3\big[\|\varphi_1(x)\|_{L_{2,\rho}(0,1)} + \|\varphi_2(x)\|_{L_{2,\rho}(0,1)}\big], \quad (34)$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant C_4\big[\|\varphi_1'(x)\|_{L_{2,r}(0,1)} + \|\varphi_2'(x)\|_{L_{2,r}(0,1)}\big], \quad (35)$$

где

$$\|f(x)\|_{L_{2,\rho}(0,1)} = \left[\int_0^1 \rho(x) f^2(x)dx\right]^{1/2}, \quad \rho(x) = x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta},$$

$$\|f'(x)\|_{L_{2,r}(0,1)} = \left[\int_0^1 r(x)[f'(x)]^2 dx\right]^{1/2}, \quad r(x) = x^{\alpha}(1-x)^{\beta},$$

$\|u(x,t)\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup\limits_{\overline{\Omega}} |u(x,t)|$; C_3, C_4 — *некоторые положительные числа.*

Доказательство. Так как $\left\{x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2} v_k(x)\right\}_{k=1}^{+\infty}$ — ортонормальная система, из (26), учитывая $|\bar{J}_\nu(x)| \leqslant 1$ при любом $\nu > -1/2$, получим следующее неравенство:

$$\|u(x,t)\|^2_{L_{2,\rho}(0,1)} = \int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta} u^2(x,t)dx =$$
$$= \int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) v_k(x) \sum_{l=1}^{+\infty} u_l(t) v_l(x) dx =$$
$$= \sum_{k,l=1}^{+\infty} u_k(t) u_l(t) \int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta} v_k(x) v_l(x) dx =$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2(t) \int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta} v_k^2(x) dx = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2(t) \leqslant$$
$$\leqslant C_3 \sum_{k=1}^{+\infty}\big(|\varphi_{1k}|^2 + |\varphi_{2k}|^2\big) \leqslant C_3\big(\|\varphi_1(x)\|^2_{L_{2,\rho}(0,1)} + \|\varphi_2(x)\|^2_{L_{2,\rho}(0,1)}\big),$$

где $C_3 = \sup\{1, t^{1-a}/(1-a)\}$. Отсюда, используя неравенство $\sqrt{d^2+l^2} \leqslant d+l$, которое верно при $d>0$, $l>0$, получим неравенство (34).

В силу неравенств (32), (22) и (25) справедливы неравенства

$$|u(x,t)| \leqslant C_3 \sum_{k=1}^{+\infty}\big(|\varphi_{1k}| + |\varphi_{2k}|\big)|v_k(x)| =$$
$$= C_3 \sum_{k=1}^{+\infty} \left|\sqrt{\lambda_k}\varphi_{1k}\right| \left|\frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right| + C_3 \sum_{k=1}^{+\infty} \left|\sqrt{\lambda_k}\varphi_{2k}\right| \left|\frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right| \leqslant$$
$$\leqslant C_3 \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \varphi_{1k}^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2} + C_3 \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \varphi_{2k}^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant C_3 \left[\frac{C_1 \Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{(p-q)^2 \Gamma(2-\alpha-\beta)} \int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}[\varphi_1'(x)]^2 dx\right]^{1/2} +$$
$$+ C_3 \left[\frac{C_1 \Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{(p-q)^2 \Gamma(2-\alpha-\beta)} \int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}[\varphi_2'(x)]^2 dx\right]^{1/2} =$$
$$= C_4 \|\varphi_1'(x)\|_{L_{2,r}(0,1)} + C_4 \|\varphi_2'(x)\|_{L_{2,r}(0,1)}.$$

Отсюда следует неравенство (35). Теорема 3 доказана. □

Замечание. Задача A_{pq} корректно поставлена и в том случае, когда $\alpha = \beta = a = m = 0$, но при α, $\beta \geqslant 1$ она некорректна. В последнем случае для уравнения (1) области Ω можно сформулировать и исследовать задачи с другими краевыми условиями.

6. Заключение. В прямоугольной области рассмотрена начально-граничная задача для гиперболического уравнения второго рода с тремя линиями вырождения. Методом разделения переменных найдено решение задачи в виде ряда, который сходится абсолютно и равномерно в замыкании области рассмотрения уравнения. Доказаны единственность решения задачи и непрерывная зависимость его от заданных функций.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. *Уравнения в частных производных математической физики*. М.: Высш. шк., 1970. 712 с.
2. Кароль И. Л. К теории уравнений смешанного типа // *Докл. АН СССР*, 1953. Т. 88, № 3. С. 397–400.
3. Терсенов С. А. О задаче Коши с данными на линии вырождения типа для гиперболического уравнения // *Диффер. уравн.*, 1966. Т. 2, № 1. С. 125–130.
4. Терсенов С. А. К теории гиперболических уравнений с данными на линии вырождения типа // *Сиб. матем. журн.*, 1961. Т. 2, № 6. С. 913–935.
5. Терсенов С. А. *Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе*. Новосибирск: НГУ, 1973. 144 с.
6. Смирнов М. М. *Вырождающиеся гиперболические уравнения*. Минск: Высш. шк., 1977. 157 с.
7. Хайруллин Р. С. *Задача Трикоми для уравнения второго рода с сильным вырождением*. Казань: Казанск. унив., 2015. 336 с. EDN: UWLDMB.
8. Мамадалиев Н. К. О представлении решения видоизмененной задачи Коши // *Сиб. матем. журн.*, 2000. Т. 41, № 5. С. 1087–1097.
9. Уринов А. К., Окбоев А. Б. Видоизмененная задача Коши для одного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода // *Укр. матем. журн.*, 2020. Т. 72, № 1. С. 100–118.
10. Urinov A. K., Okboev A. B. On a Cauchy type problem for a second kind degenerating hyperbolic equation // *Lobachevskii J. Math.*, 2022. vol. 43, no. 3. pp. 793–803. EDN: QPEVQB. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080222060324.
11. Уринов А. К., Усмонов Д. А. О видоизменной задаче Коши для одного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода // *Бюл. Инст. мат.*, 2021. Т. 4, № 1. С. 46–63.
12. Эргашев Т. Г. Обобщенные решения одного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода со спектральным параметром // *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.*, 2017. № 46. С. 41–49. EDN: YPDTPD. DOI: https://doi.org/10.17223/19988621/46/6.
13. Байкузиев К. Б. Смешанная задача для одного гиперболического уравнения, вырождающегося на контуре // *Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук*, 1962. Т. 6, № 2. С. 83–85.

14. Каримов Д. Х. Байкузиев К. Б. Смешанная задача для одного гиперболического уравнения, вырождающегося на границе области // *Научн. тр. Ташкент. гос. унив.*, 1962. Т. 208. С. 90–97.
15. Каримов Д. Х., Байкузиев К. Б. Вторая смешанная задача для одного гиперболического уравнения, вырождающегося на границе области // *Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук*, 1964. Т. 8, № 6. С. 27–30.
16. Байкузиев К. Б. О разрешимости смешанных задач для одного классе нелинейных уравнений гиперболического типа, вырождающихся на границе области // *Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук*, 1967. Т. 11, № 2. С. 3–6.
17. Байкузиев К. Б., Каримов Д. Х. О разрешимости смешанной задачи для гиперболических уравнений, вырождающегося на всей границе области // *Тр. Ташкент. гос. унив.*, 1969. Т. 2, № 350. С. 8–20.
18. Даткабаев Д. Смешанная задача для системы уравнений второго порядка, вырождающихся на всей границе области // *Пробл. физ.-мат. наук. Ташкент*, 1976. Т. 164. С. 32–38.
19. Краснов М. Л. Смешанные краевые задачи для вырождающихся линейных гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка // *Матем. сб.*, 1959. Т. 49(91), № 1. С. 29–84.
20. Олейник О. А. Задача Коши и краевая задача для гиперболических уравнений второго порядка, вырождающихся в области и на ее границе // *Докл. АН СССР*, 1966. Т. 169, № 3. С. 525–528.
21. Брюханов В. А. О смешанной задаче для одного уравнения гиперболического типа вырождающегося на части границы области // *Диффер. уравн.*, 1972. Т. 8, № 1. С. 3–6.
22. Врагов В. Н. Смешанная задача для одного класса гиперболо-параболических уравнений второго порядка // *Диффер. уравн.*, 1976. Т. 12, № 1. С. 24–31.
23. Бубнов Б. А. Смешанная задача для некоторых параболо-гиперболических уравнений // *Диффер. уравн.*, 1976. Т. 12, № 3. С. 494–501.
24. Барановский Ф. Т. Смешанная задача для сильно вырождающегося на начальной плоскости гиперболического уравнения второго порядка // *Сиб. матем. журн.*, 1979. Т. 20, № 3. С. 479–492.
25. Барановский Ф. Т. Смешанная краевая задача для гиперболического уравнения с вырождающейся главной частью // *Матем. сб.*, 1981. Т. 115(157), № 4(8). С. 560–576.
26. Сабитов К. Б., Сулейманова А. Х. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольной области // *Изв. вузов. Матем.*, 2007. № 4. С. 45–53. EDN: JJSQRP.
27. Сабитов К. Б., Сулейманова А. Х. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением в прямоугольной области // *Изв. вузов. Матем.*, 2009. № 11. С. 43–52. EDN: KVQCZZ.
28. Сабитов К. Б., Егорова И. П. О корректности краевых задач с условиями периодичности для уравнения смешанного типа второго рода // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 3. С. 430–451. EDN: KBIAPC. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1718.
29. Хайруллин Р. С. К задаче Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в исключительных случаях // *Диффер. уравн.*, 2018. Т. 54, № 4. С. 565–568. EDN: YUTSLG. DOI: https://doi.org/10.1134/S0374064118040131.
30. Хайруллин Р. С. Задача с условием периодичности для уравнения смешанного типа с сильным вырождением // *Диффер. уравн.*, 2019. Т. 55, № 8. С. 1139–1151. EDN: JMRWTP. DOI: https://doi.org/10.1134/S0374064119080119.
31. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. *Higher transcendental functions*. vol. II / Bateman Manuscript Project. New York, Toronto, London: McGraw-Hill Book Co., 1953. xvii+396 pp.
32. Наймарк М. А. *Линейные дифференциальные операторы*. М.: Физматлит, 2010. 528 с. EDN: RYRSSP.

33. Михлин С. Г. *Лекции по линейным интегральным уравнениям.* М.: Физматлит, 1959. 232 с.
34. Watson G. N. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* / Cambridge Mathematical Library. Cambridge: Cambridge Univ., 1995. vi+804 pp.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 4, pp. 672–693
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1962

MSC: 35G15

An initial-boundary problem for a hyperbolic equation with three lines of degenerating of the second kind

***A. K. Urinov*[1,2], *D. A. Usmonov*[1]**

[1] Fergana State University,
19, Murabbiylar st., Fergana, 150100, Uzbekistan.
[2] Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky
of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
46, Universitetskaya st., Tashkent, 100174, Uzbekistan.

Abstract

In present paper, a hyperbolic partial differential equation of the second kind degenerates on the sides and on the base of the rectangle has been considered. For the considered equation, an initial-boundary problem with non-local boundary conditions has been formulated. The uniqueness, existence, and stability of the solution to the stated problem were investigated. The uniqueness of the solution to the problem was proved by the method of energy integrals. The existence of obtained solution was investigated by the Fourier method based on the separation of variables. To do this first, a spectral problem for an ordinary differential equation was investigated, which arises from the formulated problem in virtue of the separation of variables. It was proved that this spectral problem can have only positive eigenvalues. Then, Green's function of the spectral problem has been constructed, and equivalently reduced to an integral Fredholm equation of the second kind with a symmetric kernel. Hence, on the basis of the theory of integral equations, it has been concluded that there is a countable number of eigenvalues and eigenfunctions of the spectral problem. Using the properties of constructed Green's function of the spectral problem, some lemmas, using to prove the existence of a solution to the problem on the uniform convergence of some bilinear series, were proved. Lemmas on the order of the Fourier coefficients of a given function have also been proved. The solution of the considered problem is derived as the sum of a Fourier series with respect to the system of eigenfunctions of the spectral problem. The uniform

Differential Equations and Mathematical Physics
Research Article

Please cite this article in press as:
Urinov A. K., Usmonov D. A. An initial-boundary problem for a hyperbolic equation with three lines of degenerating of the second kind, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 4, pp. 672–693. EDN: DIOYZF. DOI: 10.14498/vsgtu1962 (In Russian).

Authors' Details:

Akhmadjon K. Urinov https://orcid.org/0000-0002-9586-1799
Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Mathematical Analysis and Differential Equations[1]; Leading Researcher[2]; e-mail: urinovak@mail.ru

Doniyor A. Usmonov https://orcid.org/0000-0002-3574-075X
Researcher; Dept. of Mathematical Analysis and Differential Equations[1];
e-mail: usmonov-doniyor@inbox.ru

convergence of this series and the series obtained from it by term-by-term differentiation is proved using the lemmas mentioned above. At the end of the paper, two estimates are obtained for the solution to the problem, one of which is in the space of square summable functions with weight, and the other is in the space of continuous functions. These inequalities imply the stability of the solution in the corresponding spaces.

Keywords: equation of hyperbolic type, degenerate equation of the second kind, initial-boundary value problem, spectral problem, Green's function, integral equation, Fourier series, method of separation of variables, method of energy integrals, uniqueness, existence and stability of the solution.

Received: 12$^{\text{th}}$ October, 2022 / Revised: 8$^{\text{th}}$ November, 2022 / Accepted: 29$^{\text{th}}$ November, 2022 / First online: 15$^{\text{th}}$ December, 2022

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest with respect to the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the development of the concept of the article and in the writing of the manuscript. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of the manuscript.

Funding. The research has not received funding.

References

1. Koshlyakov N. S., Smirnov M. M., Gliner E. B. *Differential equations of mathematical physics*. Amsterdam, North-Holland Publ., 1964, xvi+701 pp.
2. Karol' I. L. On the theory of equations of mixed type, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1953, vol. 88, no. 3, pp. 397–400 (In Russian).
3. Tersenov S. A. On the Cauchy problem, with data given on a curve of degenerate type, for a hyperbolic equation, *Differ. Uravn.*, 1966, vol. 2, no. 1, pp. 125–130 (In Russian).
4. Tersenov S. A. On the theory of hyperbolic equations with data on a line of degeneration of type, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 1961, vol. 2, no. 6, pp. 913–935 (In Russian).
5. Tersenov S. A. *Vvedenie v teoriiu uravnenii, vyrozhdaiushchikhsia na granitse* [Introduction to the Theory of Equations Degenerating at the Boundary]. Novosibirsk, Novosib. Gos. Univ., 1973, 144 pp. (In Russian)
6. Smirnov M. M. *Vyrozhdaiushchiesia giperbolicheskie uravneniia* [Degenerate Hyperbolic Equations]. Minsk, Vyssh. shk., 1977, 157 pp. (In Russian)
7. Khairullin R. S. *Zadacha Trikomi dlia uravneniia vtorogo roda s sil'nym vyrozhdeniem* [Tricome's Problem for a Equation of the Second Kind with Strong Degeneration]. Kazan, Kazan Univ., 2015, 336 pp. (In Russian). EDN: UWLDMB.
8. Mamadaliev N. K. On representation of a solution to a modified Cauchy problem, *Sib. Math. J.*, 2000, vol. 41, no. 5, pp. 889–899. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02674745.
9. Urinov A. K., Okboev A. B. Modified Cauchy problem for one degenerate hyperbolic equation of the second kind, *Ukr. Math. J.*, 2020, vol. 72, no. 1, pp. 114–135. EDN: XDIOGV. DOI: https://doi.org/10.1007/s11253-020-01766-1.
10. Urinov A. K., Okboev A. B. On a Cauchy type problem for a second kind degenerating hyperbolic equation, *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 3, pp. 793–803. EDN: QPEVQB. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080222060324.
11. Urinov A. K., Usmonov D. A. About modified Cauchy problem for a second kind degenerated hyperbolic equation, *Bull. Inst. Math.*, 2021, vol. 4, no. 1, pp. 46–63 (In Russian).
12. Ehrgashev T. G. Generalized solutions of the degenerate hyperbolic equation of the second kind with a spectral parameter, *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2017, no. 46, pp. 41–49 (In Russian). EDN: YPDTPD. DOI: https://doi.org/10.17223/19988621/46/6.

13. Baikuziev K. B. Mixed problem for one hyperbolic equation degenerating on a contour, *Izv. Akad. Nauk UzSSR, Ser. Fiz.-Mat. Nauk*, 1962, vol. 6, no. 2, pp. 83–85 (In Russian).
14. Karimov D. H., Baikuziev K. B. A mixed problem for a hyperbolic equation degenerating on the boundary of the domain, *Nauchn. Tr. Tashkent. Gos. Univ.*, 1962, vol. 208, pp. 90–97 (In Russian).
15. Karimov D. H., Baikuziev K. B. The second mixed problem for one hyperbolic equation degenerating on the boundary of the domain, *Izv. Akad. Nauk UzSSR, Ser. Fiz.-Mat. Nauk*, 1964, vol. 8, no. 6, pp. 27–30 (In Russian).
16. Baikuziev K. B. On the solvability of mixed problems for a class of non-linear equations of hyperbolic type that degenerate on the boundary of a domain, *Izv. Akad. Nauk UzSSR, Ser. Fiz.-Mat. Nauk*, 1967, vol. 11, no. 2, pp. 3–6 (In Russian).
17. Baikuziev K. B., Karimov D. H. On the solvability of a mixed problem for hyperbolic equations that degenerates on the entire boundary of the domain, *Tr. Tashkent. Gos. Univ.*, 1969, vol. 2, no. 350, pp. 8–20 (In Russian).
18. Datkabayev D. A mixed problem for a system of second-order equations that degenerate on the entire boundary of the domain, *Probl. Fiz.-Mat. Nauk. Tashkent*, 1976, vol. 164, pp. 32–38 (In Russian).
19. Krasnov M. L. Mixed boundary problems for degenerate linear hyperbolic differential equations second order, *Mat. Sb. (N.S.)*, 1959, vol. 49(91), no. 1, pp. 29–84 (In Russian).
20. Oleinik O. A. The Cauchy problem and the boundary value problem for second-order hyperbolic equations degenerating in a domain and on its boundary, *Sov. Math., Dokl.*, 1966, vol. 7, pp. 969–973.
21. Bryukhanov V. A. A mixed problem for a hyperbolic equation degenerate on a part of the bounday of a region, *Differ. Uravn.*, 1972, vol. 8, no. 1, pp. 3–6 (In Russian).
22. Vragov V. N. A mixed problem for a certain class of second order hyperbolic-parabolic equations, *Differ. Uravn.*, 1976, vol. 12, no. 1, pp. 24–31 (In Russian).
23. Bubnov B. A. A mixed problem for certain parabolic-hyperbolic equations, *Differ. Uravn.*, 1976, vol. 12, no. 3, pp. 494–501 (In Russian).
24. Baranovskii F. T. Mixed problem for a second-order hyperbolic equation which is strongly degenerate on the initial plane, *Sib. Math. J.*, 1979, vol. 20, no. 3, pp. 338–346. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00969936.
25. Baranovskii F. T. A mixed boundary value problem for a hyperbolic equation with degenerate principal part, *Sb. Math.*, 1982, vol. 43, no. 4, pp. 499–513. DOI: https://doi.org/10.1070/SM1982v043n04ABEH002577.
26. Sabitov K. B., Suleimanova A. Kh. The Dirichlet problem for a mixed-type equation of the second kind in a rectangular domain, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2007, vol. 51, no. 4, pp. 42–50. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X07040068.
27. Sabitov K. B., Suleimanova A. Kh. The Dirichlet problem for a mixed-type equation with characteristic degeneration in a rectangular domain, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2009, vol. 53, no. 11, pp. 37–45. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X0911005X.
28. Sabitov K. B., Egorova I. P. On the correctness of boundary value problems for the mixed type equation of the second kind, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 3, pp. 430–451 (In Russian). EDN: KBIAPC. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1718.
29. Khairullin R. S. Dirichlet problem for a mixed type equation of the second kind in exceptional cases, *Differ. Equat.*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 562–562. EDN: UXXARG. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266118040134.
30. Khairullin R. S. Problem with a periodicity condition for an equation of the mixed type with strong degeneration, *Differ. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 8, pp. 1105–1117. EDN: CYEAGU. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266119080111.
31. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. *Higher transcendental functions*, vol. II, Bateman Manuscript Project. New York, Toronto, London, McGraw-Hill Book Co., 1953, xvii+396 pp.

32. Naimark M. A. *Lineinye differentsial'nye operatory* [Linear Differential Operators]. Moscow, Fizmatlit, 2010, 528 pp. (In Russian). EDN: RYRSSP.
33. Mikhlin S. G. *Lektsii po lineinym integral'nym uravneniiam* [Lectures on Linear Integral Equations]. Moscow, Fizmatlit, 1959, 232 pp. (In Russian)
34. Watson G. N. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge Mathematical Library. Cambridge, Cambridge Univ., 1995, vi+804 pp.