



УДК 533.6.011:51

Об одном парадоксальном свойстве решения задачи стационарного обтекания тела дозвуковым стратифицированным потоком идеального газа

Г. Б. Сизых

Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Россия, 141700, Долгопрудный, Институтский пер., 9.

Аннотация

Рассматривается задача обтекания гладкого выпуклого тела, движущегося горизонтально с постоянной дозвуковой скоростью в покоящейся стратифицированной атмосфере, состоящей из идеального газа. По условию задачи (вертикальный) градиент функции Бернулли (с учетом потенциальной энергии однородного поля тяжести) в покоящейся атмосфере на всех высотах отличен от нуля (как это имеет место в стандартной атмосфере Земли на высотах до 51 км), а высота полета не превышает величину, равную квадрату скорости полета тела, деленного на удвоенное ускорение свободного падения. Поверхность земли считается плоской. Используется система координат, связанная с телом. Рассматривается общий пространственный случай (несимметричное тело или симметричное тело под углом атаки). Используется общепринятое предположение о том, что в некоторой окрестности передней линии торможения (линии тока, которая заканчивается на теле в передней точке торможения) нет второй точки торможения, параметры течения в этой окрестности дважды непрерывно дифференцируемы, а точка торможения является точкой растекания (т.е. в некоторой ее окрестности все линии тока на поверхности тела начинаются в этой точке). На основе строгого анализа уравнений Эйлера показывается, что существование стационарного решения задачи противоречит этому общепринятому (но строго не доказанному) представлению о линии торможения. Это свойство решения задачи названо парадоксальным и вызывает сомнение в существовании решения.

Ключевые слова: стратифицированная атмосфера, существование стационарного решения, уравнения Эйлера, линия торможения, передняя точка торможения.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

© Коллектив авторов, 2023

© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)

  Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Сизых Г. Б. Об одном парадоксальном свойстве решения задачи стационарного обтекания тела дозвуковым стратифицированным потоком идеального газа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 1. С. 142–158. EDN: XZCBCO. DOI: [10.14498/vsgtu1963](https://doi.org/10.14498/vsgtu1963).

Сведения об авторе

Григорий Борисович Сизых  <https://orcid.org/0000-0001-5821-8596>

кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. высшей математики;
e-mail: 01o2o3@yandex.ru

Получение: 18 октября 2022 г. / Исправление: 5 декабря 2022 г. /
Принятие: 7 декабря 2022 г. / Публикация онлайн: 23 декабря 2022 г.

Введение. Предположения о существовании решений заданного вида некоторых стационарных задач гидродинамики (например, [1, 2]) в одних случаях приводят к противоречиям, из которых следует отсутствие таких решений, в других случаях — к парадоксальным выводам (противоречащим общепризнанному, но не доказанному мнению), вызывающим сомнение в существовании этих решений. Иногда прийти к противоречию или парадоксу не удается, и вопрос о существовании решения заданного вида остается открытым, однако при этом обнаруживаются неизвестные ранее свойства, которым должно удовлетворять это решение, если оно существует (например, в [3]). В данной статье ставится под сомнение существование стационарного решения задачи дозвукового обтекания гладкого выпуклого тела стратифицированным потоком идеального газа (полная формулировка задачи приведена ниже в первом разделе). Это сомнение объясняется следующим парадоксом.

Общепринято (хотя строгое доказательство отсутствует) представление о том, что при обтекании тела с гладкой выпуклой носовой частью по крайней мере в некоторой окрестности линии торможения (линии тока, которая начинается в невозмущенном набегающем потоке и заканчивается на теле в передней точке торможения) нет второй точки торможения, плотность и давление отграничены от нуля некоторыми положительными константами, а точка торможения является точкой растекания (т.е. все линии тока в некоторой ее окрестности на поверхности тела начинаются в этой точке). При дозвуковом обтекании (невозмущенный набегающий поток имеет дозвуковую скорость) на поверхности тела могут формироваться скачки и иные разрывы, но также общепринято, что при дозвуковом обтекании тела с гладкой выпуклой носовой частью в некоторой окрестности линии торможения скачки и разрывы отсутствуют. Для краткости линию торможения со свойствами, перечисленными в данном абзаце, в дальнейшем будем называть «правильной». Для различных типов жидкости наличие «правильной» линии торможения подтверждают эксперименты (например, в [4]), численные расчеты (например, в [5–8]) и известные точные решения (например, безвихревое обтекание сферы несжимаемой жидкостью [9]), а в учебниках и в теоретических исследованиях [9–16] факт наличия «правильной» линии торможения даже не обсуждается и при описании картины обтекания используется как нечто само собой разумеющееся (при дозвуковом стационарном обтекании тела с гладкой выпуклой носовой частью). По мнению автора настоящей статьи, наибольшие сомнения может вызывать предположение о непрерывности вторых производных компонент скорости в точке торможения, где поле единичного вектора, касательного к линиям тока, имеет разрыв, а кривизна линий тока не ограничена в окрестности этой точки. Однако допустимость этого предположения оправдывается известными точными решениями для идеальной несжимаемой жидкости (например, обтекание сферы или решение, приведенное в монографии [17, § 2.7]), в которых вторые производные компонент скорости непрерывны в (непроколотой) окрестности точки торможения, и отсутствием известных решений с разрывами вторых производных параметров

течения в этой окрестности. Однако во всех перечисленных точных решениях (в которых вторые производные компонент скорости непрерывны в окрестности точки торможения) завихренность в точке торможения равна нулю. А именно этот факт ниже будет установлен как свойство решения рассматриваемой задачи и станет ключевым моментом доказательства. Поэтому мог возникнуть следующий вопрос, вызывающий сомнение в верности результата данной работы: «Может быть, нулевое значение завихренности есть следствие предположения о непрерывности вторых производных компонент скорости в точке торможения?» Отрицательный ответ на этот вопрос получен в [18], где приведен пример такого точного решения с непрерывными вторыми производными компонент скорости, в котором завихренность в точке торможения отлична от нуля.

Как будет показано ниже, из предположения о существовании решения рассматриваемой в настоящей статье задачи обтекания следует отсутствие в решении «правильной» линии торможения. Такое свойство решения в настоящей статье названо парадоксальным и ставит под сомнение существование решения задачи.

При знакомстве с текстом статьи необходимо учитывать следующее. Доказательство проводится методом «от противного». Оно начинается в конце первого раздела (после формулировки задачи обтекания) с предположения о том, что решение задачи существует и что в этом решении есть «правильная» линия торможения. Заканчивается доказательство в конце пятого раздела противоречием. В процессе доказательства возникают различные гипотетические утверждения (т.е. утверждения, вытекающие из предположений, сделанных в начале доказательства). По мере приближения к концу доказательства (по мере приближения к противоречию) эти гипотетические утверждения становятся все более сомнительными и могут вызвать у читателя желание их опровергнуть. Но не стоит этого делать, поскольку это будет сделано автором. Эти утверждения «порождены» неверным предположением, и их нельзя рассматривать как «обнаруженные в статье свойства решения». Поэтому хочется обратить внимание читателя на то, что в разделах начиная со второго и заканчивая пятым включительно доказывается только одно негипотетическое утверждение (которое и представляет собой результат статьи): *из предположения о существовании решения задачи обтекания следует отсутствие в решении «правильной» линии торможения.*

1. Задача стационарного обтекания стратифицированным потоком и начало доказательства парадоксального свойства ее решения. Задачу о горизонтальном движении тела с постоянной скоростью в покоящейся атмосфере будем рассматривать в системе координат, связанной с телом, то есть рассмотрим задачу стационарного обтекания этого тела невозмущенным стратифицированным набегающим потоком (поле скорости однородно и имеет нулевую вертикальную составляющую, а плотность и давление в невозмущенном потоке могут меняться с высотой). Сформулируем общий вид задачи стационарного обтекания тела невозмущенным стратифицированным потоком с ненулевым (вертикальным) градиентом функции Бернулли на высотах полета, не превышающих величину, равную квадрату скорости полета тела, деленного на удвоенное ускорение свободного падения. Все эти условия существенны для доказательства, которое будет проведено в следующих раз-

делах. Используем систему уравнений [19], соответствующую модели идеального (отсутствуют вязкость и теплопроводность) совершенного (выполняется уравнение Менделеева—Клапейрона) газа с постоянными теплоемкостями c_p и c_v . В задаче рассматривается область течения, ограниченная поверхностью тела и поверхностью земли, которая считается плоской. Тело и поверхность земли не имеют общих точек. Начало системы координат расположено в самой верхней точке поверхности тела, а ось z направлена вертикально вверх (рис. 1). Для краткости и однозначности ссылок именно эту формулировку назовем задачей 1.

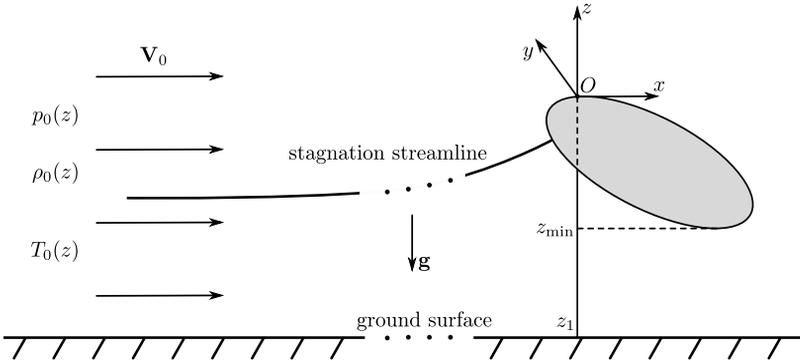


Рис. 1. Обтекание тела стратифицированным потоком
[Figure 1. Flow around a body by a stratified flow]

ЗАДАЧА 1. В прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ рассматривается замкнутая область \bar{G} (замыкание области G), расположенная между поверхностью ограниченного гладкого выпуклого тела и плоскостью (поверхностью земли). При этом начало координат лежит на поверхности тела, максимальная z -координата точек на поверхности тела равна нулю, минимальная z -координата точек на поверхности тела равна $z_{\min} < 0$, а плоскость (поверхность земли) задается уравнением $z = z_1$, где $z_1 < z_{\min}$. Требуется найти решение, т.е. поля параметров (стационарного) пространственного течения: плотности ρ , давления p , температуры T и скорости \mathbf{V} , в котором допускается существование скачков и тангенциальных разрывов на некоторых неподвижных поверхностях, расположенных в \bar{G} , а в остальных точках \bar{G} параметры течения дважды непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют системе четырех уравнений:¹

$$\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} = -\rho^{-1} \nabla p - \nabla(\mathbf{V}^2/2 + gz), \quad \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (1)$$

$$(\mathbf{V} \cdot \mathbf{\Omega})(p\rho^{-k}) = 0, \quad p = \rho R\mu^{-1}T \quad (2)$$

и следующим граничным условиям.² Невозмущенная скорость \mathbf{V}_0 по величине равна $V_0 = \text{const} > \sqrt{2g|z_1|}$ и направлена в сторону роста координаты x

¹Здесь $\mathbf{\Omega} = \operatorname{rot} \mathbf{V}$ — завихренность, $k = c_p/c_v > 1$ — показатель адиабаты Пуассона, $g = 9.8 \text{ м/с}^{-2}$, $R\mu^{-1}$ — отношение универсальной газовой постоянной к молярной массе.

²При постановке граничных условий предельные значения параметров течения и само течение при $z \geq z_1$ и при $x \rightarrow -\infty$ будем называть «невозмущенными», а нижним индексом «0» будем обозначать параметры невозмущенного набегающего потока; см. рис. 1.

(y и z компоненты \mathbf{V}_0 равны нулю, т.е. поле невозмущенной скорости \mathbf{V}_0 однородно), а ее пространственные производные и предел пространственных производных \mathbf{V} при $x \rightarrow -\infty$ равны нулю. В невозмущенном течении плотность ρ_0 и температура T_0 являются заданными дважды непрерывно дифференцируемыми функциями одной только (вертикальной) координаты z (стратифицированная атмосфера). При этом функция $T_0(z)$ задана так, что производная невозмущенной функции Бернулли

$$i_0(z) = k(k-1)^{-1} R\mu^{-1} T_0(z) + V_0^2/2 + gz$$

при всех $z \geq z_1$ отлична от нуля:

$$di_0/dz \neq 0. \quad (3)$$

На поверхностях земли ($z = z_1$) и тела нормальная к поверхности составляющая скорости \mathbf{V} должна быть равна нулю (условие непротекания). Отрицательная константа z_1 считается заданной, а величина $z_{\min} < 0$ определяется формой тела.

Для каждой точки E , лежащей на поверхности тела, существует такая двумерная окрестность H_2 этой точки, лежащая на поверхности тела, что она в прямоугольной декартовой системе координат $E x' y' z'$, ориентированной так, что ось z' нормальна к поверхности тела и направлена внутрь тела, может быть представлена в виде

$$H_2 = \{x', y', z' : z' = \phi(x', y'), (x', y') \in S\},$$

где $\phi(x', y')$ — функция, дважды непрерывно дифференцируемая на замыкании \bar{S} некоторой ограниченной области S переменных (x', y') . При этом существует такое число $\Delta z > 0$, что область (слой)

$$H_3 = \{x, y, z : \phi(x, y) < z < \phi(x, y) + \Delta z, (x, y) \in S\}$$

лежит внутри тела.³

На поверхностях скачков и разрывов (существование которых допускается) должны выполняться законы сохранения массы, энергии и импульса.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При постановке задачи 1 не приведена развернутая формулировка условий на поверхностях скачков и разрывов (ее можно найти в [19]). Это связано с тем, что в настоящем исследовании будет рассматриваться не вся замкнутая область течения \bar{G} , а только окрестность (правильной) линии торможения, в которой нет скачков и разрывов.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Несложно проверить, что условие (3) выполнено в стандартной атмосфере Земли (ГОСТ 4401-81) на высотах до 51 км.

На первый взгляд может показаться, что если скорость V_0 значительно ниже скорости звука, а форма тела подобрана некоторым надлежащим образом, то решение задачи 1 должно существовать. Однако, как сказано во введении, факт существования решения задачи 1 приводит к парадоксальному выводу о том, что в таком решении отсутствует «правильная» линия торможения. Чтобы прийти к такому выводу, предположим «противное», т.е. сделаем два предположения.

³Нижние индексы 2 и 3 подчеркивают, что H_2 — поверхность, а H_3 — трехмерная область.

1. Решение задачи 1 существует.
2. В этом решении правильная линия торможения, т.е. передняя линия торможения, имеет в некоторой своей окрестности (на всей своей протяженности) только одну точку торможения (на теле), и эта точка торможения является точкой растекания, т.е. все линии тока в некоторой ее окрестности на поверхности тела начинаются в этой точке. При этом все параметры течения дважды непрерывно дифференцируемы в упомянутой окрестности линии торможения (в том числе и на поверхности тела, в частности в точке торможения), а плотность и давление ограничены от нуля некоторыми положительными константами.

Проведем исследование при этих двух предположениях. Противоречие, к которому приведет такое исследование, будет означать, что если решение существует, то в нем отсутствует «правильная» линия торможения.

2. Преобразование уравнений движения с учетом стратификации невозмущенного течения. Обозначим через $\sigma = p\rho^{-k}$ — энтропийную функцию, а через $i = k(k-1)^{-1}R\mu^{-1}T + V^2/2 + gz$ — функцию Бернулли. Тогда систему (1), (2) можно записать в форме Крокко [20]:

$$\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} = (k-1)^{-1}R\mu^{-1}T\nabla \ln \sigma - \nabla i, \quad \operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) = 0, \quad (4)$$

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)\sigma = 0, \quad p = \rho R\mu^{-1}T. \quad (5)$$

При $x \rightarrow -\infty$ поле скорости \mathbf{V} стремится к однородному полю \mathbf{V}_0 , а производные компонент скорости стремятся к нулю. Поэтому завихренность $\mathbf{\Omega}$ стремится к нулю, и первое уравнение системы (4) принимает вид⁴

$$0 = (k-1)^{-1}R\mu^{-1}T_0 d \ln \sigma_0 / dz - di_0 / dz. \quad (6)$$

По условию задачи 1 производная функции $i_0(z)$ непрерывна и отлична от нуля для всех значений z (неравенство (3)). Это значит, что производная функции $i_0(z)$ сохраняет знак для всех значений z , и поэтому $i_0(z)$ строго монотонно изменяется с ростом z . Следовательно, существует обратная функция Z , выражающая z через i_0 : $z = Z(i_0)$. Поэтому невозмущенную энтропийную функцию $\sigma_0(z)$ и невозмущенную температуру $T_0(z)$ можно представить в виде функций переменной i_0 : $\tilde{\sigma}_0(i_0) = \sigma_0(Z(i_0))$ и $\tilde{T}_0(i_0) = T_0(Z(i_0))$.⁵ В дальнейшем будем считать $\tilde{\sigma}_0$ и \tilde{T}_0 заданными функциями одной переменной.⁶ Для дальнейшего исследования достаточно факта их существования, и конкретный вид этих функций не потребуется.

Из (6) следует, что $d \ln \tilde{\sigma}_0(i_0) / di_0 = [(k-1)^{-1}R\mu^{-1}\tilde{T}_0(i_0)]^{-1}$. Как левая часть этого равенства (производная), так и его правая часть зависят только от i_0 . Функции $\tilde{\sigma}_0(i_0)$, $\tilde{T}_0(i_0)$ и производная $d \ln \tilde{\sigma}_0(i_0) / di_0$ — суть функции одной переменной i_0 . Для исследования связи функций $\tilde{\sigma}_0$ и \tilde{T}_0 с помощью последнего равенства можно абстрагироваться от их физического смысла: равенство потеряет физический смысл, но останется верным при замене i_0 на

⁴По условию задачи 1 все функции с нижним индексом «0» зависят только от z .

⁵Знак волны используется потому, что хотя в каждой точке невозмущенного течения $\tilde{\sigma}_0 = \sigma_0$ и $\tilde{T}_0 = T_0$, функции $\tilde{\sigma}_0$ и σ_0 , а также \tilde{T}_0 и T_0 как функции одной переменной могут по-разному зависеть от своих аргументов.

⁶Несложно убедиться, что они однозначно определяются условиями задачи 1.

любую переменную, изменяющуюся в диапазоне изменений i_0 . Следовательно, если только диапазон изменения переменной ξ совпадает с диапазоном изменения i_0 , то в этом диапазоне верно равенство⁷

$$d \ln \tilde{\sigma}_0(\xi)/d\xi = [(k-1)^{-1} R\mu^{-1} \tilde{T}_0(\xi)]^{-1}.$$

Это равенство дает связь между энтропийной функцией и температурой в невозмущенном набегающем потоке только при $\xi = i_0$. В остальных случаях это не связь параметров течения, а всего лишь связь функций одной переменной $\tilde{\sigma}_0(\xi)$ и $\tilde{T}_0(\xi)$.

Умножая обе части первого уравнения (4) скалярно на \mathbf{V} и учитывая первое уравнение (5), получим, что $(\mathbf{V} \cdot \nabla i) = 0$, т.е. что не только энтропийная функция σ , но и функция Бернулли i сохраняют свои значения на любой линии тока (эти значения могут отличаться на разных линиях тока). Поэтому диапазон изменений функции Бернулли i во всем потоке совпадает с диапазоном изменения i_0 . Следовательно, во всем потоке верно равенство (замена ξ на i)

$$d \ln \tilde{\sigma}_0(i)/di = [(k-1)^{-1} R\mu^{-1} \tilde{T}_0(i)]^{-1}. \quad (7)$$

Физический смысл $\tilde{\sigma}_0(i)$ и $\tilde{T}_0(i)$ в точках возмущенного течения, в которых функция Бернулли равна i , будет установлен ниже. На данном этапе исследования важно, что последнее равенство верно для любого i , лежащего в диапазоне изменений i_0 .

Совокупность линий тока, проходящих в невозмущенном потоке (т.е. при $x \rightarrow -\infty$) через прямую, параллельную (поперечной) оси y , представляет собой поверхность тока. Такие поверхности в невозмущенном потоке имеют плоскую форму (параллельную плоскости Oxy), параллельны друг другу и однозначно определяются своей координатой z (или значением i_0). По мере приближения к обтекаемому телу эти поверхности искривляются и в общем случае разные поверхности искривляются по-разному. На линиях, параллельных оси y , через которые проходят эти поверхности в невозмущенном потоке, функция Бернулли i_0 и энтропийная функция $\tilde{\sigma}_0(i_0)$ сохраняют свои значения (поскольку значения i_0 зависят только от z). Как замечено выше, i и σ сохраняют свои значения на любой линии тока. Следовательно, и в возмущенной части течения на каждой из рассматриваемых поверхностей тока значения i и σ равны своим значениям на той же поверхности в невозмущенном потоке. Таким образом, рассматриваемые поверхности тока являются одновременно изоэнергетическими (функция Бернулли постоянна) и изоэнтропийными поверхностями. Это позволяет выразить связь между i и σ в точках возмущенного течения через связь этих величин в невозмущенном набегающем потоке (т.е. через функцию $\tilde{\sigma}_0$). Найдем эту связь.

Пусть в некоторой точке течения функция Бернулли равна i , а энтропийная функция равна σ . Эта точка лежит на одной из поверхностей тока, которая представляет собой изоэнергетическую и изоэнтропийную поверхность. Поэтому значения функции Бернулли i_0 и энтропийной функции $\tilde{\sigma}_0(i_0)$ на этой поверхности тока в невозмущенном набегающем потоке равны значениям i и σ соответственно, т.е. $i_0 = i$ и $\tilde{\sigma}_0(i_0) = \sigma$. Подставляя $i_0 = i$ в $\tilde{\sigma}_0(i_0) = \sigma$,

⁷Как левая часть (производная), так и правая часть, зависят только от ξ .

получаем $\tilde{\sigma}_0(i) = \sigma$. Последнее равенство означает, что и в невозмущенном, и в возмущенном потоке энтропийную функцию σ можно рассматривать как функцию одной только функции Бернулли i и при этом $\sigma(i) = \tilde{\sigma}_0(i)$.⁸ Поэтому $d \ln \sigma(i)/di = d \ln \tilde{\sigma}_0(i)/di$. Правую часть этого равенства запишем с использованием равенства (7), верного для любого i , лежащего в диапазоне изменений i_0 . В результате получим, что в любой точке течения, функция Бернулли в которой равна i , выполняется равенство

$$d \ln \sigma(i)/di = [(k-1)^{-1} R \mu^{-1} \tilde{T}_0(i)]^{-1}. \quad (8)$$

Физический смысл $\tilde{T}_0(i)$ состоит в следующем. В рассматриваемой точке A температура $\tilde{T}_0(i)$, где i — функция Бернулли в точке A , есть температура тех точек на изоэнергетической поверхности тока, проходящей через точку A , которые расположены на бесконечном удалении вверх по потоку на этой поверхности, т.е. в невозмущенном потоке. В общем случае в произвольной точке A течения (т.е. не только в невозмущенном потоке) величина $\tilde{T}_0(i)$ не совпадает с температурой газа T в точке A .

Из (8) следует, что систему уравнений (4), (5) можно записать в виде

$$\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} = F \nabla i, \quad F = T/\tilde{T}_0(i) - 1, \quad \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (9)$$

$$(\mathbf{V}, \nabla) \sigma = 0, \quad p = \rho R \mu^{-1} T. \quad (10)$$

Здесь T — температура в рассматриваемой точке течения. Система (9), (10) представляет собой полную систему уравнений, описывающих стационарное обтекание стратифицированным потоком идеального газа, и при условии (3) равносильна системе (1), (2), рассматриваемой в задаче 1.⁹

3. Две леммы. В дальнейшем доказательстве будут использованы следующие две леммы.

ЛЕММА 1. *Если решение задачи 1 существует, то на любой вихревой линии, на всем ее участке, на котором $\mathbf{\Omega} \neq 0$ и $F \neq 0$, имеет место альтернатива: либо на всем участке $\mathbf{V} \equiv 0$, либо на всем участке $\mathbf{V} \neq 0$.*

Доказательство. Обозначим $\mathbf{q} = \alpha \mathbf{\Omega}/(\rho F)$, α — произвольный ненулевой постоянный размерный коэффициент, обеспечивающий для \mathbf{q} размерность скорости. Для доказательства леммы 1 размерность \mathbf{q} не имеет значения. Однако вектор \mathbf{q} будет рассматриваться не только здесь при доказательстве леммы 1, но и в пятом разделе в качестве некоторой скорости, что и вызвало необходимость внести в формулу для \mathbf{q} коэффициент α . Применение операции rot к обеим частям первого уравнения (9), представленного в виде

$$\mathbf{q} \times (\rho \mathbf{V}) = \alpha \nabla i, \quad (11)$$

дает

$$(\rho \mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{q} - (\mathbf{q} \cdot \nabla)(\rho \mathbf{V}) + \mathbf{q} \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) - (\rho \mathbf{V}) \operatorname{div} \mathbf{q} = 0$$

⁸Последнее равенство устанавливает физический смысл $\tilde{\sigma}_0(i)$ в возмущенном течении: это энтропийная функция в точке, в которой функция Бернулли равна i .

⁹По крайней мере, в той окрестности линии торможения, о которой говорится во втором предположении, сделанном в конце первого раздела.

или (с учетом уравнения неразрывности $\operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) = 0$)

$$(\mathbf{q} \cdot \nabla)(\rho\mathbf{V}) - (\rho\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{q} + (\rho\mathbf{V}) \operatorname{div} \mathbf{q} = 0. \quad (12)$$

Компоненты вектора $\rho\mathbf{V}$ дифференцируются только в первом слагаемом левой части (12), а в другие слагаемые компоненты $\rho\mathbf{V}$ входят линейно как коэффициенты при различных производных компонент \mathbf{q} . Пусть l — переменная длина дуги вдоль векторной линии \mathbf{q} (т.е. вдоль вихревой линии). Поскольку по условию леммы 1 вектор $\mathbf{q} \neq 0$, равенство (12) можно представить на этой линии в виде линейной системы дифференциальных уравнений для компонент вектора $\rho\mathbf{V}$, компоненты которого зависят от l : $\rho\mathbf{V} = \rho(l)\mathbf{V}(l)$. Эта система имеет вид $d(\rho\mathbf{V})/dl = \frac{1}{|\mathbf{q}|}A(\rho\mathbf{V})$, где A — матрица размером 3×3 с коэффициентами, непрерывно зависящими от переменной l ; $(\rho\mathbf{V})$ — столбец компонент вектора $\rho\mathbf{V} = \rho(l)\mathbf{V}(l)$. Поэтому лемма 1 представляет собой известное свойство систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) [21]. Таким образом, лемма 1 доказана. \square

ЛЕММА 2. *Если решение задачи 1 существует, то на любой линии тока, на всем ее участке, на котором $\mathbf{V} \neq 0$, имеет место альтернатива: либо на всем участке $\nabla i \equiv 0$, либо на всем участке $\nabla i \neq 0$.*

Доказательство. Поскольку, как было показано выше, $(\mathbf{V} \cdot \nabla i) = 0$, градиент этого скалярного произведения также будет равен нулю, то есть $\nabla(\mathbf{V} \cdot \nabla i) = 0$. Используя известное векторное тождество для градиента скалярного произведения и учитывая, что ротор градиента равен нулю, получим $(\mathbf{V} \cdot \nabla)(\nabla i) + ((\nabla i) \cdot \nabla)\mathbf{V} + (\nabla i) \times \operatorname{rot} \mathbf{V} = 0$. Дальнейшее доказательство повторяет часть доказательства леммы 1 после формулы (12), если только вместо вектора $\rho\mathbf{V}$ рассматривать вектор ∇i , а в качестве переменной l рассматривать переменную длину дуги вдоль линии тока. Приводить эту часть доказательства представляется излишним. \square

4. Завихренность в точке торможения. Вернемся к системе (9), (10) и предположим, что в точке торможения (и, следовательно, в некоторой ее окрестности) $F \neq 0$. Точка торможения есть точка растекания, и, следовательно, в некоторой ее окрестности величина функции Бернулли i постоянна на поверхности тела, а вектор ∇i ортогонален этой поверхности (допускается случай $\nabla i = 0$). При этом по условию задачи 1 в некоторой окрестности точки торможения скорость обращается в нуль только в точке торможения. Поэтому из первого уравнения (9) следует, что в некоторой окрестности точки торможения на поверхности тела вектор завихренности Ω лежит в касательной к поверхности плоскости всюду, кроме, может быть, точки торможения. Отсюда в силу непрерывности он лежит в касательной плоскости и в точке торможения. Таким образом, если предположить, что в точке торможения (и, следовательно, в некоторой ее окрестности) $\Omega \neq 0$, то существует участок вихревой линии, проходящий через точку торможения и целиком лежащий на поверхности тела. На этом участке есть точки с ненулевой скоростью и есть точка торможения. Это противоречит лемме 1. К этому противоречию привели два предположения, сделанные в данном разделе о том, что в точке торможения $F \neq 0$ и $\Omega \neq 0$. Поэтому если оставить в силе предположение $F \neq 0$, то в точке торможения должно быть $\Omega = 0$. Этот вывод будет использован в следующем разделе.

5. Завершение доказательства. Продолжим исследование, считая, что в точке торможения $F \neq 0$. Тогда в силу непрерывности это неравенство будет выполнено в некоторой замкнутой окрестности $\bar{G}_1 \subset \bar{G}$ точки торможения (точки внутри тела не рассматриваются). В этой окрестности вместо уравнения (9) можно рассматривать уравнение (11) и его следствие — уравнение (12).

Далее воспользуемся представлением о движении в \bar{G}_1 воображаемых частиц, основанном на критерии Зоравского [23, 24], который обобщает известные теоремы Гельмгольца о вихрях. В области G_1 рассмотрим течение воображаемой жидкости, частицы которой, в дальнейшем называемые q -частицами, движутся со скоростью \mathbf{q} (определение \mathbf{q} дано в доказательстве леммы 1). Эти q -частицы не взаимодействуют с газом и не влияют на течение газа. В стационарном случае из уравнения (12) с учетом $\operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) = 0$, согласно критерию Зоравского, следует, что q -частицы, составляющие сегмент векторной линии $\rho\mathbf{V}$ (т.е. сегмент линии тока газа), лежащий в области G_1 , в некоторый момент времени, двигаясь со скоростью \mathbf{q} , будут составлять сегмент одной из линий тока газа в каждый последующий момент времени (до тех пор, пока эти q -частицы находятся в области G_1). Следует обратить внимание на то, что q -частицы, находящиеся на поверхности тела, находятся на границе области, и на них сформулированное выше следствие критерия Зоравского не распространяется.

Пусть C — точка на линии торможения AB ; (CB) — открытый сегмент линии торможения между точками C и B . Выберем точку C так, чтобы сегмент (CB) целиком лежал в \bar{G}_1 . Введем следующие обозначения: $Q(CB)$ — совокупность q -частиц, которые составляют открытый сегмент (CB) в момент времени t_0 ; $Q(CB]$ — совокупность q -частиц, которые составляют полуоткрытый (включающий точку B) сегмент $(CB]$ в момент времени t_0 ; $Q(B) \in Q(CB]$ — q -частица, которая находится в точке B в момент времени t_0 . Частицы $Q(CB]$ движутся со скоростью \mathbf{q} .

Движение q -частиц описывается автономной системой ОДУ, правая часть которой есть скорость \mathbf{q} . Если в качестве точки E в постановке задачи 1 рассматривать точку торможения, то без ограничения общности можно считать, что $H_2 \subset \bar{G}_1$. Как показано в [22], векторное поле \mathbf{q} можно так доопределить в H_3 , что в области, состоящей из внутренних точек множества $\bar{G}_1 \cup H_3$, будут выполнены все условия теоремы о непрерывной зависимости решения автономной системы ОДУ от начальных условий [21]. Это означает непрерывность линии, составленной из частиц $Q(CB]$ во время их движения.

Как было показано выше, завихренность в точке торможения (при условии, что в точке торможения $F \neq 0$) равна нулю: $\Omega = 0$. Вместе с ней равна нулю и скорость $\mathbf{q} = \alpha\Omega/(\rho F)$ воображаемой частицы, находящейся в точке торможения. Другими словами, q -частица $Q(B) \in Q(CB]$, находящаяся в точке торможения, неподвижна. Остальные q -частицы, т.е. $Q(CB)$, согласно критерию Зоравского, должны составлять линию тока газа, а q -частицы $Q(CB]$, согласно установленному выше, должны составлять непрерывную линию. В силу единственности линии торможения это возможно только, если частицы $Q(CB]$ составляют линию торможения, т.е. если они (во время своего движения) остаются на линии торможения. Поэтому частицы $Q(CB)$ или по-

¹⁰В этот момент q -частицы $Q(CB]$ составляют непрерывную кривую.

коятся, или движутся вдоль линии торможения. В любом случае это означает, что внутри \bar{G}_1 на линии торможения выполняется равенство $\mathbf{q} \times (\rho \mathbf{V}) = 0$ или, согласно (11), равенство $\nabla i = 0$. Из этого в силу единственности точки торможения на линии торможения (см. конец первого раздела) следует, что на линии торможения есть точка P с ненулевой скоростью \mathbf{V} , в которой $\nabla i = 0$. Далее, из единственности точки торможения на линии торможения следует, что на всей линии торможения от точки P до бесконечности ($x \rightarrow -\infty$), согласно лемме 2, градиент функции Бернулли должен быть равен нулю ($\nabla i = 0$). Но это противоречит (3). Противоречие возникло из предположения (сделанного в начале пятого раздела) о том, что в точке торможения $F \neq 0$. Поэтому в точке торможения должно выполняться равенство $F = 0$.

Таким образом, из двух предположений, сделанных в конце первого раздела, вытекает гипотетическое свойство решения задачи 1, состоящее в равенстве $F = 0$, т.е. в равенстве температур на «концах» линии торможения (в точке торможения и на линии торможения в невозмущенном потоке). Это означает, что $T_s = \bar{T}_0(i_s)$, где T_s — температура в точке торможения, i_s — функция Бернулли в точке торможения (и на всей линии торможения). Однако по крайней мере при высотах полета ниже $V_0^2/(2g)$ (именно такие высоты рассматриваются в задаче 1) это свойство невыполнимо. Действительно, обозначим через z_{s0} вертикальную координату линии торможения в невозмущенном потоке, а через z_s — вертикальную координату точки торможения на теле. Значения функции Бернулли на линии торможения в невозмущенном потоке и в точке торможения совпадают:

$$k(k-1)^{-1}R\mu^{-1}T_0(z_0) + V_0^2/2 + gz_{s0} = k(k-1)^{-1}R\mu^{-1}T_s + 0^2/2 + g \cdot z_s,$$

или, учитывая равенство температур,

$$z_{s0} = z_s - V_0^2/(2g). \quad (13)$$

Это значит, что линия торможения должна начинаться в невозмущенном потоке ниже уровня точки торможения, расположенной на теле. При этом линия торможения должна начинаться выше уровня земли, и, следовательно, должно выполняться неравенство $z_1 < z_{s0} = z_s - V_0^2/(2g)$, которое, с учетом $z_s \leq 0$, противоречит условию $V_0 > \sqrt{2g|z_1|}$ (см. постановку задачи 1).

Итак, получено противоречие, вытекающее из предположений, сделанных в конце первого раздела. Следовательно, *если решение задачи 1 существует, то в нем отсутствует «правильная» линия торможения*. В этом парадоксальном свойстве состоит основной результат настоящей статьи.

Заметим, что в стандартной атмосфере Земли, например, при скоростях 150 м/с и 250 м/с, согласно (13), противоречие возникает при высотах полета ниже 1148 м и 3188 м соответственно.

6. Обсуждение некоторых условий, на которые опирается доказательство. Остановимся на двух ключевых моментах. Первым таким моментом является условие (3). Без него не возникло бы противоречия из предположения, что в точке торможения $F \neq 0$. Таким образом, например, для решения задачи обтекания не стратифицированным, а однородным потоком, предложенное в предыдущих главах доказательство не позволяет получить противоречие и прийти к парадоксу.

Второй момент – это предположение об отсутствии в некоторой окрестности линии торможения второй точки торможения. Это предположение исключает из рассмотрения плоскопараллельные течения, которые исключены при постановке задачи 1 требованием пространственной ограниченности обтекаемого тела. Дело в том, что плоскопараллельное течение состоит из «расположенных рядом друг с другом» плоскостей, в каждой из которых есть линия торможения и точка торможения. Поэтому нарушается предположение о том, что в некоторой окрестности линии торможения нет второй точки торможения. Это предположение было ключевым при доказательстве равенства нулю завихренности в точке торможения. Поэтому для плоскопараллельных течений предложенное в пятом разделе доказательство неприменимо и никаких парадоксальных выводов о свойстве решения «плоского» варианта задачи 1 сделать нельзя.

7. Случай отсутствия силы тяжести. Рассмотрим решение задачи, которая отличается от задачи 1 отсутствием силы тяжести. Если параметры стратификации таковы, что градиент невозмущенной температуры всюду отличается от нуля (т.е. или $dT_0/dz > 0$, или $dT_0/dz < 0$), то в отсутствие силы тяжести условие (3) будет выполнено. Поэтому приведенное выше доказательство можно повторить, и из двух предположений в конце первого раздела снова последует гипотетический вывод о равенстве температур $T_s = \tilde{T}_0(i_s)$. Как и выше, этот вывод приводит к противоречию. Действительно, равенство значений функции Бернулли на линии торможения в невозмущенном потоке и в точке торможения будет иметь вид

$$k(k-1)^{-1}R\mu^{-1}T_0(z_0) + V_0^2/2 = k(k-1)^{-1}R\mu^{-1}T_s + 0^2/2.$$

Отсюда и из предположения $T_s = T_0(i_s)$ получается, что $V_0^2 = 0$. Но это невозможно при $V_0 > 0$. Следовательно, в отсутствие силы тяжести при $dT_0/dz \neq 0$, если решение существует, то в нем отсутствует «правильная» линия торможения при всех высотах полета.

Заключение. Общепринято, что при гладком стационарном обтекании гладкой выпуклой носовой части формируется линия торможения, в некоторой окрестности которой есть только одна точка торможения (на теле), а сама точка торможения является точкой растекания (т.е. все линии тока в некоторой ее окрестности на поверхности тела начинаются в этой точке). В статье такая линия торможения названа «правильной». Приведены примеры задач пространственного обтекания гладкого выпуклого тела идеальным газом, которые на первый взгляд должны иметь решения, но оказалось, что решения этих задач (если эти решения существуют) должны обладать одним парадоксальным свойством: у них должна отсутствовать «правильная» линия торможения. Если бы необходимость наличия «правильной» линии торможения в решении была строго обоснована, то можно было бы сделать вывод об отсутствии решений рассмотренных задач. Но поскольку обязательное наличие «правильной» линии торможения — всего лишь общепринятое предположение (для гладких выпуклых носовых частей), полученное выше свойство решения названо парадоксальным.

По мнению автора, этот парадокс означает, что решение задачи 1 существует только в рамках нестационарных уравнений Эйлера, т.е. когда вместо

системы (4), (5), используется система

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{V} / \partial t - \mathbf{V} \times \operatorname{rot} \mathbf{V} &= -\rho^{-1} \nabla p - \nabla(\mathbf{V}^2/2) - \mathbf{g}, \quad \partial \rho / \partial t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \\ \partial(\rho \rho^{-k}) / \partial t + (\mathbf{V}, \nabla)(\rho \rho^{-k}) &= 0 \end{aligned}$$

и параметры течения могут меняться со временем, оставаясь стационарными в набегающем потоке при $x \rightarrow -\infty$.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Автор несет полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарность. Автор благодарен рецензенту за тщательное прочтение статьи и ценные предложения и комментарии.

Библиографический список

1. Сизых Г. Б. Винтовые вихревые линии в осесимметричных течениях вязкой несжимаемой жидкости // *ПММ*, 2019. Т. 83, № 3. С. 370–376. EDN: MNOFDE. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0032823519030135>.
2. Миронюк И. Ю., Усов Л. А. Инвариант линии торможения при стационарном обтекании тела завихренным потоком идеальной несжимаемой жидкости // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 4. С. 780–789. EDN: HMRRXC. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1815>.
3. Марков В. В., Сизых Г. Б. Критерий существования решения уравнений движения идеального газа для заданной винтовой скорости // *Известия вузов. ПНД*, 2020. Т. 28, № 6. С. 643–652. EDN: BEONTY. DOI: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-6-643-652>.
4. Van Dyke M. *An Album of Fluid Motion*. Stanford, California: Parabolic Press, 1982. 176 pp.
5. Матяш Е. С., Савельев А. А., Трошин А. И., Устинов М. В. Учет влияния сжимаемости газа в γ -модели ламинарно-турбулентного перехода // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2019. Т. 59, № 10. С. 1779–1791. EDN: FBKJJA. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0044466919100119>.
6. Королев Г. Л. Стационарное вязкое обтекание эллиптического цилиндра до чисел Рейнольдса 900 // *Уч. зап. ЦАГИ*, 2012. Т. 43, № 5. С. 46–59. EDN: PDHYTV.
7. Egorov I. V., Fedorov A. V., Palchekovskaya N., Obraz A. O. Effects of injection on heat transfer and the boundary-layer instability for a hypersonic blunt body configuration // *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2020. vol. 149, 119197. EDN: RNXRVP. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.119197>.
8. Чувахов П. В., Егоров И. В. Численное моделирование эволюции возмущений в сверхзвуковом пограничном слое над углом разряжения // *Изв. РАН. МЖГ*, 2021. № 5. С. 49–60. EDN: TFRXIL. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0568528121050029>.
9. Лойцянский Л. Г. *Механика жидкости и газа*. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
10. Овсянников Л. В. *Лекции по основам газовой динамики*. М., Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с. EDN: QJPLMV.
11. Ладыженский М. Д. *Пространственные гиперзвуковые течения газа*. М.: Машиностроение, 1968. 120 с.
12. Никольский А. А. *Теоретические исследования по механике жидкости и газа* / Тр. ЦАГИ. Т. 2122. М.: ЦАГИ, 1981. 286 с.
13. Миронюк И. Ю., Усов Л. А. Точки торможения на вихревых линиях в течениях идеального газа // *Труды МФТИ*, 2020. Т. 12, № 4. С. 171–176. EDN: GICTHX. DOI: https://doi.org/10.53815/20726759_2020_12_4_171.

14. Сизых Г. Б. Интегральный инвариант течений идеального газа за отошедшим скачком уплотнения // *ПММ*, 2021. Т. 85, № 6. С. 742–747. EDN: SRMQIO. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0032823521060102>.
15. Анкудинов А. Л. Кинетический ударный слой в плоскости растекания аппарата типа несущий корпус // *ПММ*, 2021. Т. 85, № 5. С. 615–625. EDN: UZKDNE. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0032823521050027>.
16. Сизых Г. Б. Второе интегральное обобщение инварианта Крокко для 3D течений за отошедшим головным скачком // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 3. С. 588–595. EDN: LRHSER. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1861>.
17. Batchelor G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge: University Press, 1970. xviii+615 pp.
18. Сизых Г. Б. О линии торможения за отошедшим скачком уплотнения в плоских течениях // *Труды МФТИ*, 2022. Т. 14, № 4. С. 84–94.
19. Седов Л. И. *Механика сплошной среды*. Т. 1. М.: Наука, 1973. 536 с.
20. Mises R. *Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow* / Applied Mathematics and Mechanics. vol. 3. New York, London: Academic Press, 1958. xiii+514 pp.
21. Понтрягин Л. С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М.: Наука, 1982. 332 с.
22. Сизых Г. Б. Решение задачи Дородницына // *Труды МФТИ*, 2022. Т. 14, № 4. С. 95–107. EDN: TNNYSF.
23. Prim R., Truesdell C. A derivation of Zorawski's criterion for permanent vector-lines // *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1950. vol. 1, no. 1. pp. 32–34. DOI: <https://doi.org/10.2307/2032429>.
24. Truesdell C. *The Kinematics of Vorticity* / Indiana University Publications Science Seres. vol. 14. Bloomington: Indiana University Press, 1954. xvii+232 pp.

MSC: 76N15, 76G25

On a paradoxical property of solving the problem of stationary flow around a body by a subsonic stratified flow of an ideal gas

G. B. Sizykh

Moscow Institute of Physics and Technology

(National Research University),

9, Institutskiy per., Dolgoprudny, 141700, Russian Federation.

Abstract

The problem of flow around a smooth convex body moving horizontally at a constant subsonic velocity in a stratified atmosphere at rest consisting of an ideal gas is considered. By the condition of the problem, the (vertical) gradient of the Bernoulli function (taking into account the potential energy of a uniform gravity field) in the atmosphere at rest at all altitudes is nonzero (as is the case in the Earth's standard atmosphere at altitudes up to 51 km), and the flight altitude does not exceed a value equal to the square of the body's flight speed divided by twice the acceleration of gravity. The surface of the earth is considered flat. The coordinate system associated with the body is used. The general spatial case is considered (an asymmetric body or a symmetric body at an angle of attack). We use the generally accepted assumption that in some neighborhood of the stagnation streamline (streamline that ends on the body at the forward stagnation point) there is no second stagnation point, the flow parameters in this neighborhood are twice continuously differentiable, and the stagnation point is spreading point (i.e. in some neighborhood of it, all streamlines on the surface of the body start at this point). Based on a rigorous analysis of the Euler equations, it is shown that the existence of a stationary solution to the problem contradicts this generally accepted (but not strictly proven) idea of the stagnation streamline. This property of the solution of the problem is called paradoxical and casts doubt on the existence of the solution.

Keywords: stratified atmosphere, existence of a stationary solution, Euler equations, stagnation streamline, forward stagnation point.

Received: 18th October, 2022 / Revised: 5th December, 2022 /

Accepted: 7th December, 2022 / First online: 23rd December, 2022

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Research Article

© Authors, 2023

© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Sizykh G. B. On a paradoxical property of solving the problem of stationary flow around a body by a subsonic stratified flow of an ideal gas, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 1, pp. 142–158. EDN: XZCBC0. DOI: [10.14498/vsgtu1963](https://doi.org/10.14498/vsgtu1963) (In Russian).

Author's Details:

Grigory B. Sizykh  <https://orcid.org/0000-0001-5821-8596>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Higher Mathematics;

e-mail: olo2o3@yandex.ru

Competing interests. I have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. The author assumes full responsibility for the submission of the final manuscript in print. I approve the final version of the manuscript.

Funding. The research has not received funding.

Acknowledgments. The author thanks the referee for careful reading of the paper and for valuable suggestions and comments.

References

1. Sizykh G. B. Helical vortex lines in axisymmetric viscous incompressible fluid flows, *Fluid Dyn.*, 2019, vol. 54, no. 8, pp. 1038–1042. EDN: WHGVGS. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462818060083>.
2. Mironyuk I. Yu., Usov L. A. The invariant of stagnation streamline for a stationary vortex flow of an ideal incompressible fluid around a body, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 780–789 (In Russian). EDN: HMRRXC. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1815>.
3. Markov V. V., Sizykh G. B. Existence criterion for the equations solution of ideal gas motion at given helical velocity, *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 6, pp. 643–652 (In Russian). EDN: BEONTY. DOI: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-6-643-652>.
4. Van Dyke M. *An Album of Fluid Motion*. Stanford, California, Parabolic Press, 1982, 176 pp.
5. Matyash E. S., Savelyev A. A., Troshin A. I., Ustinov M. V. Allowance for gas compressibility in the γ -model of the laminar-turbulent transition, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2019, vol. 59, no. 6, pp. 1720–1731. EDN: PHGAXX. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542519100117>.
6. Korolev G. L. Steady viscous flow past an elliptic cylinder up to Reynolds number 900, *TsAGI Science Journal*, 2012, vol. 43, no. 5, pp. 615–635. DOI: <https://doi.org/10.1615/TsAGISciJ.2013007000>.
7. Egorov I. V., Fedorov A. V., Palchekovskaya N., Obraz A. O. Effects of injection on heat transfer and the boundary-layer instability for a hypersonic blunt body configuration, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2020, vol. 149, 119197. EDN: RNXRVP. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.119197>.
8. Chuvakhov P. V., Egorov I. V. Numerical simulation of disturbance evolution in the supersonic boundary layer over an expansion corner, *Fluid Dyn.*, 2021, vol. 56, no. 5, pp. 645–656. EDN: ZYLZDV. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462821050025>.
9. Loitsyansky L. G. *Mechanics of Liquids and Gases*, International Series of Monographs in Aeronautics and Astronautics, vol. 6. Oxford, Pergamon Press, 1966, xii+804 pp.
10. Ovsyannikov L. V. *Lektsii po osnovam gazovoi dinamiki* [Lectures on Basic Gas Dynamics]. Moscow, Izhevsk, Institute of Computer Studies, 2003, 336 pp. (In Russian). EDN: QJPLMV
11. Ladyzhenskii M. D. *Prostranstvennye giperzvukovye techeniia gaza* [Spatial Hypersonic Gas Flows]. Moscow, Mashinostroenie, 1968, 120 pp. (In Russian)
12. Nikol'skii A. A. *Teoreticheskie issledovaniia po mekhanike zhidkosti i gaza* [Theoretical Studies in Fluid and Gas Mechanics], Tr. TsAGI, vol. 2122. Moscow, TsAGI, 1981, 286 pp. (In Russian)
13. Mironyuk I. Yu., Usov L. A. Stagnation points on vortex lines in flows of an ideal gas, *Proc. of MIPT*, 2020, vol. 12, no. 4, pp. 171–176 (In Russian). EDN: GICTHX. DOI: https://doi.org/10.53815/20726759_2020_12_4_171.
14. Sizykh G. B. Integral invariant of ideal gas flows behind a detached bow shock, *Fluid Dyn.*, 2021, vol. 56, no. 8, pp. 1027–1030. EDN: FWLWLT. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462821080097>.

15. Ankudinov A. L. A kinetic shock layer in the spreading plane of a lifting-body apparatus, *Fluid Dyn.*, 2021, vol. 56, no. 7, pp. 967–974. EDN: XDTFTI. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462821070028>.
16. Sizykh G. B. Second integral generalization of the Crocco invariant for 3D flows behind detached bow shock wave, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 588–595 (In Russian). EDN: LRHSER. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1861>.
17. Batchelor G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge, University Press, 1970, xviii+615 pp.
18. Sizykh G. B. The stagnation line behind a detached bow shock wave in plane flows, *Proc. of MIPT*, 2022, vol. 14, no. 4, pp. 84–94 (In Russian).
19. Sedov L. I. *A Course in Continuum Mechanics*, vol. 1, Basic Equations and Analytical Techniques. Groningen, The Netherlands, Wolters-Noordhoff Publ., 1971, xix+242 pp.
20. Mises R. *Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow*, Applied Mathematics and Mechanics, vol. 3. New York, London, Academic Press, 1958, xiii+514 pp.
21. Pontryagin L. S. *Ordinary Differential Equations*, Adiwes International Series in Mathematics. London, Paris, Pergamon Press, 1962, vi+298 pp.
22. Sizykh G. B. Solution of the Dorodnitsin problem, *Proc. of MIPT*, 2022, vol. 14, no. 4, pp. 95–107 (In Russian).
23. Prim R., Truesdell C. A derivation of Zorawski's criterion for permanent vector-lines, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1950, vol. 1, no. 1, pp. 32–34. DOI: <https://doi.org/10.2307/2032429>.
24. Truesdell C. *The Kinematics of Vorticity*, Indiana University Publications Science Series, vol. 14. Bloomington, Indiana University Press, 1954, xvii+232 pp.