



УДК 517.958:530.145:512

Представление Лагранжа квантовой эволюции материальных полей

А. Ю. Самарин, А. М. Штеренберг

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Показано, что квантовый интеграл по путям может быть представлен в виде функционала единственного пути, удовлетворяющего принципу наименьшего действия (ввиду несовпадения оригинального английского понятия path и русского понятия «траектория» будет употребляться понятие «путь», которое подразумевает параметрическую зависимость координат точки от времени $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$). На этом основании материальные поля, совокупность которых при данном подходе отождествляется с квантовой частицей, представляются в виде непрерывных множеств индивидуальных частиц, механическое движение которых определяет поля физических величин, атрибутов этих индивидуальных частиц в каждый момент времени. Волновая функция стационарного состояния при таком подходе является полем комплексной плотности индивидуальных точек. Модуль комплексной плотности представляет собой нормированную тем или иным образом плотность материи в данной точке пространства, фазовый множитель определяет результат суперпозиции материальных полей. Это позволило преобразовать интегральное уравнение квантовой эволюции к представлению Лагранжа. На примере описания квантового гармонического осциллятора продемонстрирована состоятельность такого подхода.

Ключевые слова: интегралы по траекториям, материальное поле, нелокальность, квантовая эволюция в физическом пространстве, представления Лагранжа и Эйлера, квантовая динамика замкнутой системы.

Получение: 18 сентября 2022 г. / Исправление: 25 декабря 2022 г. /
Принятие: 24 января 2023 г. / Публикация онлайн: 19 марта 2023 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика Научная статья

© Коллектив авторов, 2023

© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Самарин А. Ю., Штеренберг А. М. Представление Лагранжа квантовой эволюции материальных полей // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 1. С. 50–63. EDN: **JDHCTR**. DOI: [10.14498/vsgtu1953](https://doi.org/10.14498/vsgtu1953).

Сведения об авторах

Алексей Юрьевич Самарин  <https://orcid.org/0000-0001-7640-3875>

кандидат физико-математических наук, доцент; каф. общей физики и физики нефтегазового производства; e-mail: samarinay@yahoo.com

Александр Моисеевич Штеренберг  <https://orcid.org/0000-0001-8909-7598>

доктор физико-математических наук, профессор; каф. общей физики и физики нефтегазового производства; e-mail: ashter53@yandex.ru

Введение. Попытки придать волновой функции смысл физической величины, характеризующей некоторый, в общем случае распределенный в пространстве, материальный носитель [1, 2], неизбежно сталкиваются с проблемой мгновенной локализации этого материального носителя при измерении. Однако кажущееся противоречие со специальной теорией относительности (СТО), возникающее в процессе редукции волновой функции [3], легко преодолевается простым предположением, что материальная сплошная среда, представляющая квантовую частицу, представляет собой «идеальный» физический континуум, всюду плотный в физическом пространстве¹ [4]. Отсутствие «пустого» пространства устраняет необходимость механического перемещения какого-либо посредника для сохранения принципа близкодействия. Корнем всех интерпретационных проблем традиционной квантовой механики является представление о квантовой частице как о материальной точке, перевод этого понятия из ранга математической аппроксимации реального физического объекта в ранг его физической сущности в случае квантовой частицы. Это, разумеется, было бы вполне допустимо (так же как и идеализация механического континуума), если бы не порождало существенных противоречий [2, 3], подтвержденных экспериментально [5–7]. Более того, уравнения квантовой механики вообще не содержат понятия материальной точки, а волновая функция локализованной измерением частицы является дельта-функцией Дирака, которая имеет представление в виде суперпозиции бесконечных в пространстве математических объектов и с учетом конечности размеров области локализации при измерении сама по себе является математической аппроксимацией результата измерения координаты.

Идея связать квантовую эволюцию с механическим движением некоторого носителя волновой функции частично выразилась в ее пространственно-временном представлении с помощью интегралов по путям [8, 9] (континуальных интегралов [10]). Тот факт, что квантовый интеграл по путям может быть формально заменен функционалом на единственном пути,² позволяет придать ему смысл реальной зависимости положения индивидуальной точки континуума от времени, а интегральному волновому уравнению — смысл представления Лагранжа временной зависимости комплексной плотности индивидуальных частиц континуума [11, 12]. Далее следует учесть, что импульсы индивидуальных частиц на некоторых виртуальных путях могут принимать мнимые значения [13–15]. Последнее обстоятельство может быть связано как с мнимым представлением времени в законе эволюции при вещественной координате, так и наоборот (мнимым представлении координаты при вещественном времени). Эти возможности разбираются в данной работе и на этом основании формулируется представление Лагранжа об эволюции комплексной плотности индивидуальной частицы.

И, наконец, в конце статьи на базе этого представления выводятся волновые функции стационарных состояний как полей комплексной плотности для квантового осциллятора в привычном представлении Эйлера.

¹Это принципиально отличает квантовый континуум от классических механических сплошных сред, которые по сути являются лишь математической аппроксимацией дискретных (с классической точки зрения) структур.

²Это утверждение справедливо именно для квантового интеграла по путям и не может быть распространено на функциональные интегралы, описывающие броуновское движение (см. п. 1).

1. Фактический путь индивидуальной точки. Интегрирование в функциональных пространствах при описании физических процессов впервые было применено для определения вероятности перехода броуновской частицы из одной области пространства в другую. В [16] была предложена аналогичная интерпретация квантового интеграла по путям. Однако исходное представление квантовой эволюции в виде интегралов по путям строилось принципиально иным образом: оно основывалось не на стохастическом процессе типа броуновского движения, а детерминированном описании изменения волновой функции во времени [8, 9]. Скрупулезный математический анализ процесса квантовой эволюции, приведенный в [10], показал, что может быть реализован предельный переход к бесконечно малым промежуткам времени в кратном интеграле, ядре интегрального оператора эволюции, и именно такой переход и позволил определить квантовый интеграл по путям.³ Более того, в этой же работе было показано, что для бесконечно малого промежутка времени носитель волновой функции локализован в пространстве. Последнее обстоятельство позволяет связать значение волновой функции с этим носителем и перейти от интеграла по путям к функционалу единственного пути, связанному с этим материальным носителем. Воспроизведем этот переход в несколько ином виде, чем представленный в [11].

Амплитуда перехода в виде интеграла по путям имеет вид [10]

$$K_{t,t_0}(x, x_0) = \int \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[x(\tau)]\right) [dx(\tau)]. \quad (1)$$

Преобразуем этот интеграл к вещественному виду, заменив время $\tau \rightarrow -i\tau$, и запишем амплитуду перехода в виде кратного интеграла [10]:

$$K_{t,t_0}(x, x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon}\right)^{n/2} \int \cdots \int \exp\left(-\frac{1}{\hbar} S^E(x_0 \dots x_n, \varepsilon)\right) \prod_{k=1}^{n-1} dx_k, \quad (2)$$

где S^E — эвклидово действие. Рассмотрим первый из цепочки интегралов (2) ($k = 0 \rightarrow k = 1$) амплитуды перехода (1). Начальная координата фиксирована и равна x_0 . Среднее значение амплитуды перехода во все точки пространства x_1 в момент времени $t_0 + \varepsilon$ определяется интегралом

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} S(x_0, x_1, \varepsilon)\right) dx_1 = \\ & = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \left(m \frac{(x_1 - x_0)^2}{2\varepsilon} + \frac{V(x_0) + V(x_1)}{2} \varepsilon\right)\right) dx_1 = \\ & = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \left(m \frac{(x_1 - x_0)^2}{2\varepsilon} + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x}(x_1 - x_0) \varepsilon + V(x_0) \varepsilon\right)\right) dx_1 = \\ & \exp\left(\frac{\varepsilon^3}{8\hbar m} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) - V_0 \frac{\varepsilon}{\hbar}\right). \end{aligned}$$

³Очевидно, что такой переход невозможен в случае броуновского движения вследствие принципиального отсутствия определенного (пусть даже вероятностным образом) пути для броуновской частицы на расстояниях, меньших порядка длины свободного пробега.

Показатель экспоненты в последнем выражении совпадает с отношением действия к приведенной постоянной Планка на пути, соответствующем максимуму гауссовой подынтегральной функции:

$$x_1^{\max} - x_0 = -\frac{1}{2m} \frac{\partial V}{\partial x} \varepsilon^2.$$

Таким образом, рассматриваемый интеграл может быть представлен в виде

$$\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} S(x_0, x_1, \varepsilon)\right) dx_1 = \exp\left(-\frac{1}{\hbar} S^E(x_1^{\max})\right). \quad (3)$$

Выделим область интегрирования в бесконечно малой окрестности максимума гауссовой функции. При $\varepsilon \rightarrow 0$ интеграл по значениям x_1 вне этой области обратится в нуль. Это значит, что изменение координаты носителя волновой функции за бесконечно малый интервал времени детерминировано условиями движения, или, другими словами, в любой момент времени задана его скорость. Это обстоятельство, в свою очередь, предполагает существование единственного пути его движения (для всех других путей амплитуда перехода равна нулю). Тогда мы можем последовательно представить всю цепочку кратных интегралов (2) в виде (3) и записать амплитуду (2) как

$$K_{t,t_0}(x, x_0) = \delta((x - x_0 - x^{\min}(t - t_0))) \exp\left(-\frac{1}{\hbar} S_{\min}^E(x_0, x)\right),$$

где $S_{\min}^E(x_0, x)$ — эвклидово действие на пути, детерминированном условием $\delta S[x(t, t_0, x_0)] = 0$. Возвращаясь к вещественному времени для амплитуды перехода (1), окончательно получим

$$K_{t,t_0}(x, x_0) = \delta((x - x_0 - x^{\min}(t - t_0))) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{\min}(x_0, x)\right). \quad (4)$$

В последнем выражении $S_{\min}(x_0, x)$ — обычное классическое действие на том же пути.

2. Мнимое действие. Пространственные волновые функции, являющиеся решениями стационарного уравнения Шредингера, могут быть как комплексными, так и вещественными функциями координат. Поскольку последний случай может реализовываться не только в условиях суперпозиции волновых функций различных материальных полей, но и для одного отдельного материального поля, с учетом вида амплитуды перехода (4) следует предположить, что в общем случае действие должно быть комплексным. В частности, на необходимость существования мнимых значений импульса при туннельном эффекте указывается в работах [13–15]. Этот факт, а также наличие экспоненциальной зависимости от координаты модуля волновых функций в условиях неоднородных потенциальных полей подтверждают сделанное предположение. Анализ классического выражения для действия на заданном пути в виде

$$S(\tau_0, x_0, \tau, x) = \int_{t_0}^t \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - V \right) dt$$

показывает, что оно адекватно ситуации механического движения материального поля, но не является достаточно общим для описания всех возможных квантовых состояний материальных полей. Сохраняя неизменным выражение (4), предположим, что выражение для действия в нем имеет вид

$$S(\tau_0, x_0, \tau, x) = S_{\Re}(\tau_0, x_0, \tau, x) + iS_{\Im}(\tau_0, x_0, \tau, x),$$

где мнимое действие определяется как⁴

$$S_{\Im}(\tau_0, x_0, \tau, x) = \int_{x_0}^x P(x)_{\Im} dx - \int_{t_0}^t E_{\Im} d\tau.$$

При этом предположим, что координата x и время τ — вещественные, а функция координат $P(x)$ — мнимая. Вид решений волнового уравнения в областях пространства с переменной потенциальной энергией и при $E < V$ показывает, что мнимое действие не содержит временной переменной. Это означает равенство нулю энергии $E_{\Im} = 0$. Само понятие механического движения в данном случае неприменимо (как и понятие индивидуальной точки) уже в силу отсутствия времени в выражении для мнимого действия. Пространственная переменная в этом случае не может преобразовываться во временную (отсутствует понятие скорости), и соответствующая зависимость мнимого импульса полностью определяется значениями потенциальной энергии через закон сохранения энергии, который принимает вид

$$E_{\Im} = \frac{p_{\Im}^2}{2m} + V(x) = 0.$$

Понятие пути $x(\tau)$ отсутствует и мнимое действие является исключительно функцией координат, определяемой выражением

$$S_{\Im}(x_0, x) = \int_{x_0}^x p_{\Im} dx = \sqrt{2mi} \int_{x_0}^x \sqrt{V} dx.$$

С учетом сделанных предположений амплитуда перехода (4) примет вид

$$K_{t,t_0}(x, x_0) = \delta((x - x_0 - x_{\min}^{\Re}(t - t_0))) \times \\ \times \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{\min}^{\Re}(x, x_0)\right) \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_{x_0}^x \sqrt{2mV} dx\right). \quad (5)$$

Это выражение для амплитуды перехода является более общим, чем формулы (1) и (4), и описывает все состояния, соответствующие дифференциальному волновому уравнению Шредингера.⁵

⁴Именно такой вид выражения для действия следует считать наиболее общим, поскольку он не содержит понятия скорости, которое, согласно [13–15], неприменимо, например, к состоянию частицы под барьером.

⁵Выражение (5) применимо для описания более широкого класса квантовых явлений, чем уравнение Шредингера, таких как, например, редукция волновой функции [4]. Это обстоятельство обусловлено зависимостью ряда квантовых явлений от предыстории возникновения состояний квантовой системы.

3. Интегральное волновое уравнение. Представление Лагранжа изменения во времени комплексной плотности индивидуальной частицы. Интегральное волновое уравнение с амплитудой (5) имеет вид

$$\Psi_{\tau}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta((x - x_0 - x_{\min}^{\Re}(\tau - \tau_0))) \times \\ \times \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{\min}^{\Re}(x, x_0)\right) \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_{x_0}^x \sqrt{2mV} dx\right) \Psi_{\tau_0}(x_0) dx_0. \quad (6)$$

Представим волновую функцию как

$$\Psi_{\tau}(x) = \Phi_{\tau}(x) \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_0^x \sqrt{2mV} dx\right).$$

Тогда волновое уравнение (6) примет вид

$$\Psi_{\tau}(x) = \Phi_{\tau}(x) \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_0^x \sqrt{2mV} dx\right) = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta((x - x_0 - x_{\min}^{\Re}(\tau - \tau_0))) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{\min}^{\Re}(x, x_0)\right) \times \\ \times \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_{x_0}^x \sqrt{2mV} dx\right) \Phi_{\tau_0}(x_0) \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_0^{x_0} \sqrt{2mV} dx\right) dx_0.$$

Исключая из последнего выражения множитель, не связанный с механическим движением, для волновой функции $\Phi_{\tau}(x)$, описывающей механическое движение материального поля, имеем

$$\Phi_{\tau}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta((x - x_0 - x_{\min}^{\Re}(\tau - \tau_0))) \times \\ \times \exp\left(\frac{i}{\hbar} \left(\int_{x_0}^x p dx - \int_{\tau_0}^{\tau} E d\tau\right)\right) \Phi_{\tau_0}(x_0) dx_0. \quad (7)$$

При описании движения сплошной среды методом Лагранжа последняя рассматривается как непрерывная совокупность бесконечно малых индивидуальных объемов — индивидуальных частиц. Индивидуальная частица движется в пространстве по пути, соответствующему принципу наименьшего действия.⁶ Уравнение (7) задает измерение фазы в индивидуальном объеме равным приращению действия в единицах $\hbar$. Зададим относительный фазовый объем $\Delta\varphi$

⁶На вещественность действия указывать в данном случае смысла нет, поскольку мнимое действие не содержит времени и, следовательно, само понятие пути к нему неприменимо. По сути, само название «действие» с точки зрения его первоначального смысла как функционала на пути не совсем корректно и употребляется здесь лишь в качестве наименования функции единственной независимой переменной координаты в показателе вещественной экспоненты амплитуды перехода (5). То есть под действием в общем случае подразумевается комплексная функция координат в (5), вещественная часть которой зависит от времени.

индивидуального объема Ξ^7 как $\Delta\varphi = 2\pi\Xi/\lambda$, где $\lambda(\xi) = 2\pi\hbar/p$ — расстояние в пространстве между ближайшими положениями индивидуальной частицы, имеющей импульс p (для $x = 0$), в которых она имеет одинаковый фазовый множитель.⁸ Комплексную плотность индивидуальной частицы⁹ определим следующим образом:

$$\Phi(\xi, \tau) = \lim_{\Xi \rightarrow 0} \frac{M(\Xi)}{\Xi} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{S(\Xi)}{\Delta\varphi(\Xi)}\right), \quad (8)$$

где $M(\Xi)$ — мера индивидуального объема Ξ [10]; $S(\Xi)$ — приращение действия на нем в произвольный момент времени. Что касается меры индивидуального объема, в соответствии с (7) она сохраняется и плотность индивидуальной частицы может быть выражена через ее начальную плотность и скорости в соответствующие моменты времени следующим образом:

$$\rho(\xi, \tau) = \frac{v(\xi, 0)}{v(\xi, \tau)} \rho(\xi, 0).$$

Вследствие аддитивности действия каждой из точек индивидуального объема фазовый множитель в (8) не зависит от времени. В результате комплексная плотность индивидуальной частицы в произвольный момент времени имеет вид

$$\Phi(\xi, \tau) = \frac{v(\xi, 0)}{v(\xi, \tau)} \rho(\xi, 0) \exp \phi(\xi), \quad (9)$$

где $\phi(\xi)$ — фазовая плотность индивидуальной частицы. Выражение (9) представляет собой уравнение временного изменения комплексной плотности индивидуальной частицы материального поля, то есть это уравнение эволюции квантового состояния материального поля в представлении Лагранжа.

4. Переход к представлению Эйлера. При переходе к представлению Эйлера (а именно оно в конечном счете необходимо для описания квантовых явлений) учтем стационарность поля скоростей. Тогда поле плотности меры также стационарно и в соответствии с (9) имеет вид

$$\rho(x) = \rho(0) \frac{v(0)}{v(x)},$$

где $v(0)$ — скорость индивидуальных частиц в точке пространства, произвольно выбранной в качестве начала координат. Для определения поля пространственной части фазового множителя воспользуемся условием постоянства

⁷Здесь, как и ранее, рассматриваем одномерное движение и, соответственно, одномерный индивидуальный объем.

⁸Если изменением скорости на этом расстоянии можно пренебречь, то в представлении Эйлера это длина волны.

⁹Комплексная плотность обозначается той же буквой, что и волновая функция, поскольку это одна и та же величина, записанная в представлениях Лагранжа и Эйлера соответственно.

фазового множителя в представлении Лагранжа и, следовательно, равенства нулю субстанциональной производной фазового множителя по времени:

$$\frac{d}{d\tau} \exp(i\phi(x, \tau)) = \frac{\partial}{\partial \tau} \exp(i\phi(x, \tau)) + v(x) \frac{\partial}{\partial x} \exp(i\phi(x, \tau)) = 0.$$

Разделим действие индивидуального объема и его фазовый объем на пространственные и временные части. Тогда фаза волновой функции примет вид

$$\phi(x, \tau) = \alpha(x) - \frac{1}{\hbar} E\tau + \frac{2\pi}{T} \int_0^x \frac{dx}{v(x)},$$

где λ — расстояние между ближайшими точками, в которых пространственные части фазовых множителей волновой функции имеют одинаковые значения (для стационарных полей скоростей это время не зависит от координаты пространства); T — время прохождения индивидуальной частицы, обладающей заданным значением импульса, расстояния λ . Фаза $\alpha(x)$ может быть определена из выражения для субстанциональной производной фазового множителя волновой функции, которая в соответствии с (9) равна нулю:

$$v(x) \frac{\partial}{\partial x} \exp(i\phi(x, \tau)) + \frac{\partial}{\partial \tau} \exp(i\phi(x, \tau)) = \frac{d}{d\tau} \exp(i\phi(x, \tau)) = 0.$$

В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha + \frac{2\pi}{T} \int_0^x \frac{dx}{v(x)} \right) = \frac{E}{\hbar} \frac{1}{v(x)},$$

и для пространственной части фазы волновой функции имеем

$$\phi(x) = \frac{E}{\hbar} \int_0^x \frac{1}{v(x)} dx + \frac{2\pi}{T} \int_0^x \frac{dx}{v(x)}.$$

Таким образом, волновая функция $\Phi(x, t)$ в представлении Эйлера имеет следующий вид:

$$\Phi_\tau(x) = \frac{v_0}{v(x)} \rho_0 \exp \left(i \left(\phi_0 + \frac{E}{\hbar} \int_0^x \frac{dx}{v(x)} + \frac{2\pi}{T} \int_0^x \frac{dx}{v(x)} \right) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} E\tau \right) \right), \quad (10)$$

где ρ_0 , ϕ_0 — значения модуля и пространственной фазы волновой функции в произвольно выбранном начале отсчета координаты $x = 0$. Последнее выражение представляет собой обобщение понятия бегущей волны на области пространства с неоднородным полем скоростей (при однородном поле потенциальной энергии и, следовательно, однородным полем скоростей последнее выражение совпадает с формулой для бегущей волны).

5. Квантование. Поскольку квантование энергии возникает при финитном движении микрообъекта, классический путь содержит две точки поворота. В квантовом случае, когда возможны мнимые значения скорости и координаты, особенность этих точек не в том, что в них меняется направление

скорости этой точки (она становится мнимой), а в равенстве нулю ее модуля. Вследствие этого модуль пространственной волновой функции отдельного материального поля обращается, согласно (10), в бесконечность. Однако в областях неоднородного поля потенциальной энергии присутствуют два материальных поля с одинаковой энергией, движущиеся в противоположных направлениях, и их суперпозиция должна быть конечна, что возможно при равенстве нулю суммы фазовых множителей индивидуальных точек этих встречных полей в точках поворота. Для суперпозиции полей при их одномерном финитном движении с одинаковой энергией в соответствии с (10) имеем

$$\Phi_\tau(x) = \frac{v_0}{v(x)} \rho_0 \left[\exp \left(\phi^+(a) + i \frac{E}{\hbar} \left(\int_a^x \frac{1}{v(x)} dx + \frac{2\pi}{T} \int_a^x \frac{dx}{v(x)} \right) \right) + \right. \\ \left. + \exp \left(\phi^-(b) + i \frac{E}{\hbar} \left(\int_b^x \frac{1}{v(x)} dx \right) + \frac{2\pi}{T} \int_b^x \frac{dx}{v(x)} \right) \right] \exp \left(-\frac{i}{\hbar} E \tau \right), \quad (11)$$

где a и b — координаты классических точек поворота, их значения зависят от полной энергии квантовой частицы и поля потенциальной энергии; индексы “+” и “−” указывают направления движения полей; $\phi^+(a)$ и $\phi^-(b)$ — постоянные фазы пространственных волновых функций материальных полей, движущихся во встречном направлении. Тогда при постоянном поле потенциальной энергии условие равенства нулю пространственной части фазового множителя в выражении (11) в точках поворота задает спектр возможных значений полной энергии квантовой частицы. Таким образом, правило квантования энергии определяется системой двух уравнений

$$\begin{cases} \exp \left(i \left(\phi^+(a) + \frac{E}{\hbar} \int_a^b \frac{1}{v(x)} dx + \omega \int_{x_{\lambda+}}^b \frac{dx}{v(x)} \right) \right) + \exp(i\phi^-(b)) = 0, \\ \exp(i\phi^+(a)) + \exp \left(i \left(\phi^-(b) + \frac{E}{\hbar} \int_b^a \frac{dx}{v(x)} + \omega \int_{x_{\lambda-}}^a \frac{dx}{v(x)} \right) \right) = 0, \end{cases}$$

где $\omega = 2\pi/T$; $\Delta\phi = \phi^+(a) - \phi^-(b)$ — разность фаз волн в начале координат; верхний индекс “+” указывает направление движения поля вдоль оси x ; “−” — противоположное направление. Учитывая симметрию фаз волновых функций встречных полей, условие квантования можно переписать в виде

$$\exp \left(i \left(\frac{E}{\hbar} + \frac{2\pi}{T} \right) \int_a^b \frac{dx}{v(x)} \right) = -\exp(-i\Delta\phi),$$

или, принимая во внимание, что $\phi^+(b) = \phi^+(a) + \pi n$ и $\phi^+(b) = -\phi^-(b)$, получим

$$\exp \left(i \left(\frac{E}{\hbar} + \frac{2\pi}{T} \right) \int_a^b \frac{dx}{v(x)} \right) = \pi k. \quad (12)$$

Это условие квантования энергии при финитном движении в любом постоянном потенциальном поле определяется конечностью волновой функции квантовой частицы в точках поворота, что обеспечивается противоположным направлением комплексных векторов фазовых множителей в точках поворота.

6. Квантовый осциллятор. Верифицируем предложенный подход к описанию микроскопических процессов на модели гармонического осциллятора, для чего получим значения энергии его стационарных состояний и соответствующие им волновые функции. Выберем точку пространства, соответствующую минимуму потенциальной энергии, за начало координат. Тогда потенциальная энергия запишется в виде

$$V(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}.$$

Соответственно, для поля скоростей осциллятора в области пространства $|x| < a$, где a — амплитуда колебаний, имеем

$$v(x) = v_0 \sqrt{1 - (x/a)^2},$$

где v_0 — скорость осциллятора в начале координат. В области $|x| > a$ аналогичное выражение для модуля мнимой скорости примет вид

$$v(x) = v_0 \sqrt{1 + (x/a)^2}.$$

Условие квантования (12) запишется в виде

$$\frac{E}{\hbar} \int_{-a}^a \frac{dx}{v_0 \sqrt{1 - (x/a)^2}} = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

Обозначим $\eta = x/a$ и перепишем последнее выражение в виде

$$\frac{E}{\hbar\omega_0} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - \eta^2}} d\eta = \frac{\pi}{2} + \pi n,$$

где $\omega_0 = a/v_0$ — собственная частота колебаний осциллятора. В результате для энергии имеем

$$E = \hbar\omega_0 \left(\frac{1}{2} + n \right).$$

Тогда волновую функцию (11) для осциллятора можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Phi_\tau(x) &= \\ &= \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \eta^2}} \left[\exp \left(i \left(\phi^+(-1) + (n+1) \int_{-1}^0 \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} + (n+1) \int_0^\eta \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} \right) \right) + \right. \\ &+ \exp \left(i \left(\phi^-(1) + (n+1) \int_1^0 \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} - (n+1) \int_0^\eta \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} \right) \right) \left. \right] \exp \left(-\frac{i}{\hbar} E\tau \right) = \\ &= \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \eta^2}} \exp \left(i \frac{\pi}{2} n \right) \left[\exp(i(n+1) \arcsin \eta) + \right. \\ &\quad \left. + \exp(i\pi n) \exp(-i(n+1) \arcsin \eta) \right] \exp \left(-\frac{i}{\hbar} E\tau \right) = \\ &= \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \eta^2}} i^n \left[(\sqrt{1 - \eta^2} + i\eta)^{n+1} + (-1)^n (\sqrt{1 - \eta^2} - i\eta)^{n+1} \right] \exp \left(-\frac{i}{\hbar} E\tau \right). \end{aligned}$$

Переход к переменной x с учетом зависимости амплитуды a от энергии позволяет выразить функцию $\Phi_\tau(x)$ через полиномы Эрмита и волновая функция осциллятора примет вид

$$\begin{aligned}\Psi_\tau(x) &= \Phi_t(x) \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_0^x \sqrt{2mV} dx\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E\tau\right) = \\ &= C(n) \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right) H_n\left(x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E\tau\right),\end{aligned}$$

где $C(n)$ — нормировочная постоянная.

Заключение. В основе предложенного подхода лежит представление о субатомной частице как о совокупности материальных полей, плотно (без пустот) заполняющих все пространство. Последнее свойство позволяет предположить возможность изменения состояния сплошной среды одновременно во всем пространстве вследствие локального воздействия на нее, не входя при этом в противоречие с СТО. При этом волновая функция субатомной частицы определяется как поле комплексной плотности материи. Как было показано в п. 1, квантовый интеграл по путям определяет не только изменение комплексной плотности на пути, но и сам путь, что позволяет ввести понятие индивидуальной частицы применительно к квантовому материальному полю.¹⁰ Результатом такого подхода является возможность представления квантовой эволюции не в виде непрерывного изменения волновой функции как целого, а методом Лагранжа — изменением комплексной плотности индивидуальных частиц совокупности материальных полей. Это позволяет отказаться от описания квантовой эволюции в виде изменения вектора состояния в гильбертовом пространстве и перейти к пространственно-временному описанию.

Аналогичный по сути подход неявно реализуется при описании квантовой эволюции интегральным волновым уравнением с ядром в виде интеграла по путям. Однако в силу наличия множества виртуальных путей оно не позволяет непосредственно представить квантовую эволюцию методом Лагранжа. Это представление основано на преобразовании интеграла по путям к амплитуде перехода (4) и выражается в предельно простой форме (10), которую следует рассматривать в качестве постулата.

Применение предложенного подхода позволяет избежать при определении состояния не только необходимости вычисления интегралов по путям, но и решения интегрального волнового уравнения вообще, что в частности продемонстрировано на примере состояний квантового осциллятора в п. 6. В свою очередь, это дает возможность вычислять амплитуды перехода для произвольного потенциала без использования теории возмущений и избежать связанных с ней ограничений.

¹⁰Напомним, что отдельному материальному полю соответствует стационарное состояние квантовой частицы, а сама она представляется сплошной средой — совокупностью материальных полей.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи; все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Библиографический список

1. Schrödinger E. Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik // *Naturwissenschaften*, 1926. vol. 14. pp. 664–666. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01507634>.
2. Bell J. Against 'measurement' // *Physics World*, 1990. vol. 3, no. 8. pp. 33–40. DOI: <https://doi.org/10.1088/2058-7058/3/8/26>.
3. Einstein A., Podolsky B., Rosen N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? // *Phys. Rev.*, 1935. vol. 47, no. 10. pp. 777–780 DOI: [10.1103/PhysRev.47.777](https://doi.org/10.1103/PhysRev.47.777).
4. Samarin A. Yu. Nonlinear dynamics of open quantum systems // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018. vol. 22, no. 2. pp. 214–224. EDN: [WXSKT](https://doi.org/10.14498/vsgtu1582). DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1582>.
5. Clauser J. F., Horne M. A., Shimony A., Holt R. A. Proposed experiment to test local hidden-variable theories // *Phys. Rev. Lett.*, 1969. vol. 23, no. 15. pp. 880–883. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.23.880>.
6. Freedman S. J., Clauser J. F. Experimental test of local hidden-variable theories // *Phys. Rev. Lett.*, 1972. vol. 28, no. 14. pp. 938–941. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.28.938>.
7. Aspect A., Grangier P., Roger G. Experimental realization of Einstein–Podolsky–Rosen–Bohm Gedankenexperiment: A new violation of Bell's inequalities // *Phys. Rev. Lett.*, 1982. vol. 49, no. 2. pp. 91–94 DOI: [10.1103/PhysRevLett.49.91](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.49.91).
8. Feynman R. P. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics // *Rev. Mod. Phys.*, 1948 DOI: [10.1103/RevModPhys.20.367](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.20.367). vol. 20, no. 2. pp. 367–387.
9. Feynman R. P., Hibbs A. R. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. Mineola, NY: Dover Publ., 2010. xii+371 pp.
10. Zinn-Justin J. *Path Integrals in Quantum Mechanics*. Oxford: Oxford Univ. Press, 2005. xiii+318 pp.
11. Samarin A. Yu. Quantum evolution in terms of mechanical motion // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021. vol. 25, no. 2. pp. 393–401. EDN: [LIZMMB](https://doi.org/10.14498/vsgtu1851). DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1851>.
12. Samarin A. Yu. Quantum evolution as a usual mechanical motion of peculiar continua // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020. vol. 24, no. 1. pp. 7–21. EDN: [LIZMMB](https://doi.org/10.14498/vsgtu1724). DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1724>.
13. MacColl L. A. Note on the transmission and reflection of wave packets by potential barriers // *Phys. Rev.*, 1932. vol. 40, no. 4. pp. 621–626. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.40.621>.
14. Hartman T. E. Tunneling of a wave packet // *J. Appl. Phys.*, 1962. vol. 33, no. 12. pp. 3427–3433. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1702424>.
15. Steinberg A. M. How much time does a tunneling particle spend in the barrier region? // *Phys. Rev. Lett.*, 1995. vol. 74, no. 13. pp. 2405–2409. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.2405>.
16. Kac M. *Probability and Related Topics in Physical Sciences*. New York: Interscience Publ., 1959. xiii+266 pp.

MSC: 81S40, 58D30

Lagrange's representation of the quantum evolution of matter fields

A. Yu. Samarin, A. M. Shterenberg

Samara State Technical University,

244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

It is shown that a quantum path integral can be represented as a functional of the unique path that satisfies the principle of least action. The concept of path will be used, which implies the parametric dependence of the coordinates of a point on time $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. On this basis, the material fields, which are identified with a quantum particle, are represented as a continuous set of individual particles, the mechanical motion of which determines the spatial fields of the corresponding physical quantities. The wave function of a stationary state is the complex density of matter field individual particles. The modulus of complex density sets the density of matter normalized in one way or another at a given point in space, and the phase factor determines the result of the superposition of material fields in it. This made it possible to transform the integral equation of quantum evolution to the Lagrange's representation. By using the description of a quantum harmonic oscillator as an example, this approach is verified. EPR-type experiment is described in detail, and the possibility of the faster-than light communication is proved, as well as the possible rules of thumb of this communication are proposed.

Keywords: path integrals, matter field, nonlocality, quantum evolution in physical space, Lagrange's and Euler's representations, quantum dynamics of a closed system.

Received: 18th September, 2022 / Revised: 25th December, 2022 /Accepted: 24th January, 2023 / First online: 19th March, 2023

Differential Equations and Mathematical Physics

Research Article

© Authors, 2023

© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Samarin A. Yu., Shterenberg A. M. Lagrange's representation of the quantum evolution of matter fields, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 1, pp. 50–63. EDN: **JDHCTR**. DOI: [10.14498/vsgtu1953](https://doi.org/10.14498/vsgtu1953) (In Russian).

Authors' Details:

Alexey Yu. Samarin  <https://orcid.org/0000-0001-7640-3875>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of General Physics and Physics of Oil and Gas Production; e-mail: samarinay@yahoo.com

Alexandr M. Shterenberg  <https://orcid.org/0000-0001-8909-7598>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of General Physics and Physics of Oil and Gas Production; e-mail: ashter53@yandex.ru

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development; the authors contributed equally to this article. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

References

1. Schrödinger E. Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik, *Naturwissenschaften*, 1926, vol. 14, pp. 664–666. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01507634>.
2. Bell J. Against 'measurement', *Physics World*, 1990, vol. 3, no. 8, pp. 33–40. DOI: <https://doi.org/10.1088/2058-7058/3/8/26>.
3. Einstein A., Podolsky B., Rosen N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?, *Phys. Rev.*, 1935, vol. 47, no. 10, pp. 777–780. DOI: [10.1103/PhysRev.47.777](https://doi.org/10.1103/PhysRev.47.777).
4. Samarin A. Yu. Nonlinear dynamics of open quantum systems, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 2, pp. 214–224. EDN: [XWXS KT](https://doi.org/10.14498/vsgtu1582). DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1582>.
5. Clauser J. F., Horne M. A., Shimony A., Holt R. A. Proposed experiment to test local hidden-variable theories, *Phys. Rev. Lett.*, 1969, vol. 23, no. 15, pp. 880–883. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.23.880>.
6. Freedman S. J., Clauser J. F. Experimental test of local hidden-variable theories, *Phys. Rev. Lett.*, 1972, vol. 28, no. 14, pp. 938–941. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.28.938>.
7. Aspect A., Grangier P., Roger G. Experimental realization of Einstein–Podolsky–Rosen–Bohm Gedankenexperiment: A new violation of Bell's inequalities, *Phys. Rev. Lett.*, 1982, vol. 49, no. 2, pp. 91–94. DOI: [10.1103/PhysRevLett.49.91](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.49.91).
8. Feynman R. P. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics, *Rev. Mod. Phys.*, 1948. DOI: [10.1103/RevModPhys.20.367](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.20.367), vol. 20, no. 2, pp. 367–387.
9. Feynman R. P., Hibbs A. R. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. Mineola, NY, Dover Publ., 2010, xii+371 pp.
10. Zinn-Justin J. *Path Integrals in Quantum Mechanics*. Oxford, Oxford Univ. Press, 2005, xiii+318 pp.
11. Samarin A. Yu. Quantum evolution in terms of mechanical motion, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 393–401. EDN: [LIZMMB](https://doi.org/10.14498/vsgtu1851). DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1851>.
12. Samarin A. Yu. Quantum evolution as a usual mechanical motion of peculiar continua, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 7–21. EDN: [LIZMMB](https://doi.org/10.14498/vsgtu1724). DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1724>.
13. MacColl L. A. Note on the transmission and reflection of wave packets by potential barriers, *Phys. Rev.*, 1932, vol. 40, no. 4, pp. 621–626. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.40.621>.
14. Hartman T. E. Tunneling of a wave packet, *J. Appl. Phys.*, 1962, vol. 33, no. 12, pp. 3427–3433. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1702424>.
15. Steinberg A. M. How much time does a tunneling particle spend in the barrier region?, *Phys. Rev. Lett.*, 1995, vol. 74, no. 13, pp. 2405–2409. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.2405>.
16. Kac M. *Probability and Related Topics in Physical Sciences*. New York, Interscience Publ., 1959, xiii+266 pp.