Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 27, № 1. С. 23–49
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1961
EDN: TXBBDP

УДК 517.984.5

Сеть пространств Соболева и краевые задачи для операторов вихрь и градиент дивергенции

Р. С. Сакс

Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН,
Россия, 450077, Уфа, ул. Чернышевского, 112.

Аннотация

В работе рассматривается шкала пространств Соболева $\mathbf{H}^m(G)$ векторных полей в ограниченной области G из $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей Γ. Операторы градиент дивергенции и ротор ротора ($\nabla \operatorname{div}$ и rot^2) и их степени являются аналогами скалярного оператора Δ^m в $\mathbb{R}^3$ и порождают пространства $\mathbf{A}^{2k}(G)$ и $\mathbf{W}^m(G)$ потенциальных и вихревых полей, где числа k, $m > 0$ — целые.

Доказано, что $\mathbf{A}^{2k}(G)$ и $\mathbf{W}^m(G)$ являются проекциями пространств Соболева $\mathbf{H}^{2k}(G)$ и $\mathbf{H}^m(G)$ на подпространства $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в $\mathbf{L}_2(G)$. Их прямые суммы $\mathbf{A}^{2k}(G) \oplus \mathbf{W}^m(G)$ образуют сеть пространств, элементами которой являются классы $\mathbf{C}(2k, m) \equiv \mathbf{A}^{2k} \oplus \mathbf{W}^m$.

Рассмотрены пространства $\mathbf{A}^{-m}$ и $\mathbf{W}^{-m}$, которые соответствуют пространствам $\mathbf{A}^m$ и $\mathbf{W}^m$. Также рассмотрены прямые суммы $\mathbf{A}^k(G) \oplus \mathbf{W}^m(G)$ для любых целых чисел k и m.

В пространстве $\mathbf{L}_2(G)$ строится ортонормированный базис, состоящий из базисов ортогональных подпространств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Его элементы — собственные поля операторов rot и $\nabla \operatorname{div}$. Доказательство их гладкости — важный этап разработанной теории.

В сети $\{\mathbf{C}(k, m)\}_{k,m}$ исследованы модельные краевые задачи для операторов $\operatorname{rot} + \lambda I$, $\nabla \operatorname{div} + \lambda I$, их суммы, а также для оператора Стокса. Получены условия разрешимости для рассматриваемых модельных задач.

Ключевые слова: пространство Лебега, пространства Соболева векторных полей, градиент, дивергенция, ротор, потенциальные поля, вихревые поля, поля Бельтрами, эллиптические краевые задачи, спектральные задачи.

Получение: 11 октября 2022 г. / Исправление: 9 февраля 2023 г. / Принятие: 13 марта 2023 г. / Публикация онлайн: 24 марта 2023 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Научная статья

Образец для цитирования
Сакс Р. С. Сеть пространств Соболева и краевые задачи для операторов вихрь и градиент дивергенции // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 1. С. 23–49. EDN: TXBBDP. DOI: 10.14498/vsgtu1961.

Сведения об авторе
Ромэн Семенович Сакс доктор физико-математических наук; профессор;
e-mail: romen-saks@yandex.ru

1. Основные подпространства $\mathbf{L}_2(G)$

Рассмотрим линейные пространства над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Через $\mathbf{L}_2(G)$ обозначим пространство Лебега вектор-функций (полей), квадратично интегрируемых в G с внутренним произведением

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_G \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\, d\mathbf{x}$$

и нормой $\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2}$.

1.1. Шкала пространств Соболева. Пространство Соболева, состоящее из полей, принадлежащих $\mathbf{L}_2(G)$ вместе с обобщенными производными до порядка $m > 0$, обозначается через $\mathbf{H}^m(G)$, $\|\mathbf{f}\|_m$ — норма его элемента $\mathbf{f}$; $\mathbf{H}^0(G) \equiv \mathbf{L}_2(G)$.

$\mathbf{H}^m(G)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g})_m = (\mathbf{f}, \mathbf{g}) + \int_G \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \partial^\alpha \mathbf{f} \cdot \partial^\alpha \mathbf{g} d\mathbf{x}, \quad \|\mathbf{f}\|_m^2 = (\mathbf{f}, \mathbf{f})_m.$$

Замыкание в норме $\mathbf{H}^m(G)$ множества $[\mathcal{C}_0^\infty(G)]^3$ обозначается через $\mathbf{H}_0^m(G)$.

Двойственное пространство Соболева отрицательного порядка $\mathbf{H}^{-m}(G)$ сопряжено с $\mathbf{H}_0^m(G)$.

С. Л. Соболев предложил всю цепь вложенных пространств:

$$\subset \mathbf{H}^m \subset \cdots \subset \mathbf{H}^1 \subset \mathbf{L}_2 \subset \mathbf{H}^{-1} \subset \cdots \subset \mathbf{H}^{-m} \subset .$$

В [1, § 9 гл. 12] он обозначал их $W_2^{(m)}(G)$. Мы будем обозначать их $\mathbf{H}^m(G)$, следуя книгам В. П. Михайлова [2] и В. А. Солонникова с Н. Н. Уральцевой [3].

В области G с гладкой границей Γ в каждой точке $y \in \Gamma$ определена нормаль $\mathbf{n}(y)$ к Γ. Поле $\mathbf{u}$ из $\mathbf{H}^{m+1}(G)$ имеет на Γ след $\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})$ его нормальной компоненты, который принадлежит пространству Соболева—Слободецкого $\mathbf{H}^{m+1/2}(G)$, $|\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})|_{m+1/2}$ — его норма.

1.2. Потенциальные и соленоидальные поля в $\mathbf{L}_2(G)$. Подобно тому как течения жидкости разделяют на ламинарные и турбулентные, векторные поля в $\mathbf{L}_2(G)$ разделяются на потенциальные (безвихревые) и соленоидальные.

Потенциальные (irrotational) поля $\mathbf{f}$ и соленоидальные поля $\mathbf{g}$ в $\mathbf{L}_2(G)$ впервые выделил Герман Вейль в статье [4] условиями ортогональности:

$$(\mathbf{f}, \operatorname{rot} \mathbf{v}) = 0 \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{C}_0^1(G), \quad (\mathbf{g}, \nabla\psi) = 0 \quad \forall\, \psi \in C_0^1(G).$$

С. Л. Соболев в статье [5] (1954 г.) приводит другой способ разложения $\mathbf{L}_2(\Omega)$, предположив, что область Ω гомеоморфна шару.

Мы используем разложение Z. Yoshida и Y. Giga [6]: по определению $\mathcal{A}(G) = \{\nabla h, h \in H^1(G)\}$, а $\mathcal{B}$ — ортогональное дополнение $\mathcal{A}$ в $\mathbf{L}_2(G)$.

Пространство $\mathcal{B}(G)$ также обозначается следующим образом:

$$\mathcal{B}(G) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(G) : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } G, \gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) = 0\},$$

так как из соотношений ортогональности $(\mathbf{u}, \nabla h) = 0$ для любой $h \in H^1(G)$ при $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(G)$ вытекает, что $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ в G, $\gamma(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}) = 0$.[1] Значит,

$$\mathbf{L}_2(G) = \mathcal{A}(G) \oplus \mathcal{B}(G). \tag{1.1}$$

Если граница Γ имеет род $\rho > 0$, то $\mathcal{A}$ содержит подпространство потенциальных полей:

$$\mathcal{A}_H = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}_2(G) : \nabla\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \operatorname{rot}\mathbf{v} = 0 \text{ в } G, \gamma(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}) = 0\}, \tag{1.2}$$

а $\mathcal{B}$ — подпространство безвихревых соленоидальных полей:

$$\mathcal{B}_H = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(G) : \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \operatorname{rot}\mathbf{u} = 0 \text{ в } G, \gamma(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}) = 0\}. \tag{1.3}$$

Размерность $\mathcal{B}_H$ равна ρ [7], а его базисные поля $\mathbf{h}_j \in \mathbf{C}^\infty(\bar{G})$, $j = 1, \ldots, \rho$, $\mathcal{B}_H \subset \mathcal{A}_H$. Размерность $\mathcal{A}_H$ не меньше ρ, а базисные поля $\mathbf{g}_l \in \mathbf{C}^\infty(\bar{G})$, $l = 1, \ldots, \rho_1 \geqslant \rho$ (см. п. 1.7).

Отметим, что род $\rho = 0$ у сферы и $\rho = 1$ у тора.

Ортогональное дополнение в $\mathcal{A}$ к $\mathcal{A}_H$ обозначается $\mathbf{A}^0(G)$.

Ортогональное дополнение в $\mathcal{B}$ к $\mathcal{B}_H$ обозначается $\mathbf{V}^0(G)$ и называется классом *вихревых* полей [8]. Так что

$$\mathcal{A}(G) = \mathcal{A}_H(G) \oplus \mathbf{A}^0(G), \quad \mathcal{B}(G) = \mathcal{B}_H(G) \oplus \mathbf{V}^0(G). \tag{1.4}$$

В шаре B множества $\mathcal{A}_H$ и $\mathcal{B}_H$ пусты и $\mathbf{A}^0 = \mathcal{A}$, а $\mathbf{V}^0 = \mathcal{B}$.

Замечание. О. А. Ладыженская [9], К. Фридрихс [10], Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе [11], а также Э. Б. Быховский и Н. В. Смирнов [12] приводят разложения $\mathbf{L}_2(G)$. В разложении Z. Yoshida и Y. Giga [6] мы заменили символ $L^2_\sigma(G)$ на $\mathcal{B}(G)$ и записали (1.1) как $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$. Авторы [6] указывают, что разложение (1.4) для $\mathcal{B}(G)$ содержится в книге C. B. Morrey [13].

1.3. Операторы $\nabla\operatorname{div}$ и rot в пространствах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Операторы градиент, ротор (вихрь) и дивергенция определяются в трехмерном векторном анализе.[2] Им соответствует оператор d внешнего дифференцирования на формах ω^k степени $k = 0, 1$ и 2.

Соотношения $d^2\omega^k = 0$ при $k = 0, 1$ имеют вид $\operatorname{rot}\nabla h = 0$ и $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{u} = 0$ для гладких функций h и $\mathbf{u}$. Следовательно, операторы $\nabla\operatorname{div}$ и rot аннулируют друг друга:

$$\nabla\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{u} = 0, \quad \operatorname{rot}\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} = 0.$$

Оператор Лапласа выражается через них и скалярный оператор Δ_c:

$$\Delta\mathbf{v} \equiv \nabla\operatorname{div}\mathbf{v} - (\operatorname{rot})^2\mathbf{v} = \Delta_c I_3\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3), \quad \Delta_c v_j \equiv \operatorname{div}\nabla v_j. \tag{1.5}$$

Оператор Лапласа эллиптичен [14–17], а операторы rot и $\nabla\operatorname{div}$ не являются эллиптическими. Они вырождены, причем $\operatorname{rot}\mathbf{u} = 0$ при $\mathbf{u} \in \mathcal{A}$, а $\nabla\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ при $\mathbf{v} \in \mathcal{B}$ в смысле $\mathbf{L}_2(G)$ [4]. Поэтому

$$\Delta\mathbf{v} \equiv \nabla\operatorname{div}\mathbf{v} \text{ при } \mathbf{v} \in \mathcal{A}, \quad \Delta\mathbf{u} \equiv -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u} \text{ при } \mathbf{u} \in \mathcal{B}. \tag{1.6}$$

[1] Если $\mathbf{u}$ и $\operatorname{div}\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(G)$, то след $\gamma(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u})$ существует [18].

[2] См. например, книгу Л. Шварца [14] или курс В. А. Зорича [19].

1.4. Краевые задачи для операторов $\mathbf{rot}+\boldsymbol{\lambda I}$ и $\boldsymbol{\nabla}\,\mathbf{div}+\boldsymbol{\lambda I}$ в пространствах Соболева. В классе равномерно неэллиптических псевдодифференциальных операторов Б. Вайнберга и В. Грушина [20] автор выделил в [21] подкласс [REES p] обобщенно эллиптических дифференциальных операторов и доказал, что *операторы* $\operatorname{rot}+\lambda I$ *и* $\nabla\operatorname{div}+\lambda I$ *первого и второго порядков при* $\lambda\neq 0$ *принадлежат классу* [REES 1]. В пространствах Соболева $\mathbf{H}^s(G)$ изучены краевые задачи. Им соответствуют операторы $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$, которые расширятся до эллиптических по В. Солонникову переопределенных операторов $\mathbb{A}_R$ и $\mathbb{B}_R$, ограниченных в пространствах $\mathbf{H}^s(G)$ при целом $s\geqslant 0$:

$$\mathbb{A}_R\mathbf{u}\equiv\begin{pmatrix}\operatorname{rot}+\lambda I\\ \lambda\operatorname{div}\\ \gamma\mathbf{n}\cdot\end{pmatrix}\mathbf{u}\ :\ \mathbf{H}^{s+1}(G)\to\begin{pmatrix}\mathbf{H}^s(G)\\ H^s(G)\\ H^{s+1/2}(\Gamma)\end{pmatrix},$$
$$\mathbb{B}_R\mathbf{u}\equiv\begin{pmatrix}\nabla\operatorname{div}+\lambda I\\ \lambda\operatorname{rot}\\ \gamma\mathbf{n}\cdot\end{pmatrix}\mathbf{u}\ :\ \mathbf{H}^{s+2}(G)\to\begin{pmatrix}\mathbf{H}^s(G)\\ \mathbf{H}^{s+1}(G)\\ H^{s+3/2}(\Gamma)\end{pmatrix}.$$

Из Теоремы 1.1 В. Солонникова [16] в работе [21] доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Оператор* $\mathbb{A}_R$ *имеет левый регуляризатор. Его ядро конечномерно и для любых* $\mathbf{u}\in\mathbf{H}^{s+1}(G)$ *и* $\lambda\neq 0$ (*с постоянной* $C_s=C_s(\lambda)>0$, *зависящей только от* s, λ) *выполняется оценка*

$$C_s\|\mathbf{u}\|_{s+1}\leqslant\|\operatorname{rot}\mathbf{u}\|_s+|\lambda|\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_s+|\gamma(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u})|_{s+1/2}+\|\mathbf{u}\|_s. \tag{1.7}$$

Теорема 2. *Оператор* $\mathbb{B}_R$ *имеет левый регуляризатор. Его ядро конечномерно и для любых* $\mathbf{v}\in\mathbf{H}^{s+2}(G)$ *и* $\lambda\neq 0$ (*с постоянной* $C_s=C_s(\lambda)>0$, *зависящей только от* s, λ) *выполняется оценка*

$$C_s\|\mathbf{v}\|_{s+2}\leqslant|\lambda|\|\operatorname{rot}\mathbf{v}\|_{s+1}+\|\nabla\operatorname{div}\mathbf{v}\|_s+|\gamma(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})|_{s+3/2}+\|\mathbf{v}\|_s. \tag{1.8}$$

В теоремах нет топологических ограничений на область, лишь предполагается ее связность, ограниченность и гладкость границы.

Оценка (1.7) известна [6]. Мы показываем, что для операторов класса [REES p] такие оценки легко получать из [16, Теорема 1.1].

Формулы $\mathbf{u}\cdot\nabla h+h\operatorname{div}\mathbf{u}=\operatorname{div}(h\mathbf{u})$, $\mathbf{u}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v}-\operatorname{rot}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\operatorname{div}[\mathbf{v},\mathbf{u}]$, где $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ и $[\mathbf{v},\mathbf{u}]$ — скалярное и векторное произведения в $\mathbb{R}^3$, и интегрирование по G используются при определении операторов $\nabla\operatorname{div}$ и rot в $\mathbf{L}_2(G)$. Интегрируя и применяя формулу Гаусса—Остроградского, имеем

$$\int_G\big[\operatorname{rot}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}-\mathbf{u}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v}\big]d\mathbf{x}=\int_\Gamma\mathbf{n}\cdot[\mathbf{v},\mathbf{u}]d\mathbf{S}, \tag{1.9}$$

$$\int_G\big[\nabla\operatorname{div}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}-\mathbf{u}\cdot\nabla\operatorname{div}\mathbf{v}\big]d\mathbf{x}=\int_\Gamma\big[(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\operatorname{div}\mathbf{u}+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u})\operatorname{div}\mathbf{v}\big]d\mathbf{S}. \tag{1.10}$$

1.5. Самосопряженные расширения rot и $\boldsymbol{\nabla}\,\mathbf{div}$ в $\mathbf{L_2}(\boldsymbol{G})$. Пусть

$$\mathcal{A}_\gamma(G)=\{\nabla h,h\in H^2(G):\gamma(\mathbf{n}\cdot\nabla)h=0\},\quad \mathbf{A}^0_\gamma=\mathbf{A}^0\cap\mathcal{A}_\gamma,$$

положим

$$\mathbf{W}^1 = \{\mathbf{f} \in \mathbf{V}^0, \operatorname{rot}\mathbf{f} \in \mathbf{V}^0\}, \quad \mathbf{A}^2 = \{\mathbf{f} \in \mathbf{A}^0_\gamma, \nabla \operatorname{div}\mathbf{f} \in \mathbf{A}^0_\gamma\}.$$

На этих пространствах определяются операторы S и $\mathcal{N}_d$ следующими условиями: $S\mathbf{u} = \operatorname{rot}\mathbf{u}$ при $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^1$ и $\mathcal{N}_d\mathbf{v} = \nabla \operatorname{div}\mathbf{v} = \nabla \operatorname{div}\nabla h$ при $\mathbf{v} = \nabla h \in \mathbf{A}^2$.

Пространства $\mathbf{W}^1 \subset \mathbf{H}^1$, $\mathbf{A}^2 \subset \mathbf{H}^2$ согласно оценкам (1.7), (1.8) при $s = 0$. Пространство $\mathbf{W}^1$ плотно в $\mathbf{V}^0$, так как $\mathbf{C}^\infty_0(G) \cap \mathbf{V}^0 \subset \mathbf{W}^1$ плотно в $\mathbf{V}^0$.

Аналогично, $\mathbf{A}^2$ плотно в $\mathbf{A}^0$, так как $\mathbf{C}^\infty_0(G) \cap \mathbf{A}^0_\gamma \subset \mathbf{A}^2$ плотно в $\mathbf{A}^0_\gamma$.

Если поля $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ в равенстве (1.9) принадлежат $\mathcal{D}(S)$, то

$$\gamma(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}) = \gamma(\mathbf{n}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{u}) = 0, \quad \gamma(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}) = \gamma(\mathbf{n}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v}) = 0,$$

интеграл по Γ зануляется [6] и это равенство принимает вид $(S\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, S\mathbf{v})$.

Аналогично, если поля $\mathbf{u} = \nabla g$ и $\mathbf{v} = \nabla h$ в равенстве (1.10) принадлежат $\mathcal{D}(\mathcal{N}_d)$, то $\gamma(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}) \equiv \gamma(\mathbf{n}\cdot\nabla)g = 0$, $\gamma(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}) \equiv \gamma(\mathbf{n}\cdot\nabla)h = 0$, интеграл по Γ равен нулю и это равенство принимает вид $(\mathcal{N}_d\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathcal{N}_d\mathbf{v})$.

Более того, доказано, что операторы S и $\mathcal{N}_d$ суть самосопряженные расширения rot и $\nabla \operatorname{div}$ в $\mathbf{L}_2(G)$ (см. [6, 22]).

1.6. Гладкость собственных полей операторов rot и ∇ div. Спектральные задачи для операторов rot и $\nabla \operatorname{div}$ состоят в нахождении ненулевых полей $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ и чисел λ и μ таких, что

$$\operatorname{rot}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}(\mathbf{x}), \ \ \mathbf{x} \in G, \quad \gamma\mathbf{n}\cdot\mathbf{u} = 0, \ \ \mathbf{u} \in \mathbf{C}^1(G) \cap \mathbf{C}(\overline{G}), \tag{1.11}$$

$$\nabla \operatorname{div}\mathbf{v} = \mu\mathbf{v}(\mathbf{x}), \ \ \mathbf{x} \in G, \quad \gamma\mathbf{n}\cdot\mathbf{v} = 0, \ \ \mathbf{v} \in \mathbf{C}^2(G) \cap \mathbf{C}(\overline{G}).$$

Из теорем 1, 2 вытекают важные свойства решений спектральных задач операторов *ротор и градиент дивергенции*:

a) каждое *ненулевое собственное значение* имеет *конечную кратность*;
b) их *собственые поля*, принадлежащие $\mathbf{L}_2(G)$, являются *гладкими вплоть до границы*, если область G имеет гладкую границу.

Доказательство. Пусть $\lambda \neq 0$, а $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ — решение задачи (1.11).

При $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^1(G) \cap \mathbf{C}(\overline{G})$ это поле есть решение однородной эллиптической задачи:

$$\operatorname{rot}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad \lambda \operatorname{div}\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in G, \quad \gamma\mathbf{n}\cdot\mathbf{u} = 0. \tag{1.12}$$

Согласно теореме 1, эта задача имеет конечное число линейно независимых решений $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}), \ldots, \mathbf{u}_l(\mathbf{x})$, где l зависит от λ и не зависит от $\mathbf{u}$. Утверждение a) доказано.

Любое решение $\mathbf{u}_j(\mathbf{x})$ задачи (1.12) принадлежит $\mathbf{L}_2(G)$, так как

$$\|\mathbf{u}\|^2 \equiv \int_G (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})d\mathbf{x} \leqslant V \max_{\overline{G}} |\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}| = V\|\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\|_{C(\overline{G})}, \quad V = \int_G 1 d\mathbf{x}$$

и $\operatorname{rot}\mathbf{u}_j = \lambda\mathbf{u}_j$, $\operatorname{div}\mathbf{u}_j = 0$ в G, $\gamma\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_j = 0$. Поэтому $\|\operatorname{rot}\mathbf{u}_j\| = |\lambda|\|\mathbf{u}_j\|$ и оценка (1.7) при $s = 0$ принимает вид $C_0\|\mathbf{u}\|_1 \leqslant (|\lambda| + 1)\|\mathbf{u}\|_0$, где постоянная $C_0 > 0$.

Следовательно, $\mathbf{u}_j(\mathbf{x})$ принадлежит $\mathbf{H}^1(G)$ и

$$\|\mathbf{u}_j\|_1 \leqslant C_0^{-1}(|\lambda| + 1)\|\mathbf{u}_j\|_0, \quad \|\mathbf{u}_j\|_0 \leqslant \sqrt{V}\|\mathbf{u}_j\cdot\mathbf{u}_j\|^{1/2}_{C(\overline{G})}. \tag{1.13}$$

Далее, пусть $s > 0$ целое. Так как $\|\operatorname{rot}\mathbf{u}_j\|_s = |\lambda|\|\mathbf{u}_j(\mathbf{x})\|_s$, из оценки (1.7) по индукции получаем

$$\|\mathbf{u}_j\|_{s+1} \leqslant C_s^{-1}(|\lambda|+1)\|\mathbf{u}_j\|_s \leqslant \dots \leqslant C_s^{-1}\dots C_0^{-1}(|\lambda|+1)^s\|\mathbf{u}_j\|_0.$$

Значит, поле $\mathbf{u}_j(\mathbf{x})$ принадлежит $\mathbf{H}^{s+1}(G)$ для любого целого $s \geqslant 0$.

Замечание. Пространства $H^{l+2}(\Omega)$ вложены в $C^l(\bar\Omega)$ при $l \geqslant 0$ в трехмерной области Ω и $\|g\|_{C^l(\bar\Omega)} \leqslant c_l\|g\|_{H^{l+2}(\Omega)}$ для любой функции $g \in H^{l+2}(\Omega)$, где постоянная $c_l > 0$ не зависит от g (см. [2, Теорема 3, § 6.2]).

Итак, поля $\mathbf{u}_j(\mathbf{x})$ принадлежат $\mathbf{C}^l(\bar G)$ для любого целого $l \geqslant 0$. Утверждение b) для ротора доказано.

Аналогично, при $\mu \neq 0$ собственное поле $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \in \mathbf{C}^2(G) \cap \mathbf{C}(\overline{G})$ оператора $\nabla\operatorname{div}$ есть решение однородной эллиптической задачи:

$$\nabla\operatorname{div}\mathbf{v} = \mu\mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \operatorname{rot}\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{x} \in G, \quad \gamma\mathbf{n}\cdot\mathbf{v} = 0. \tag{1.14}$$

Согласно теореме 2, эта задача имеет конечное число линейно независимых решений $\mathbf{v}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{v}_k(\mathbf{x})$, где k зависит от μ и не зависит от $\mathbf{v}$. Утверждение a) доказано.

Любое решение $\mathbf{v}_j(\mathbf{x})$ задачи (1.14) принадлежит $\mathbf{L}_2(G)$, так как

$$\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{L}_2(G)} \leqslant V\|\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\|_{C(\overline{G})}, \quad V = \int_G 1d\mathbf{x}.$$

Ввиду того, что $\|\nabla\operatorname{div}\mathbf{v}\| = |\mu|\|\mathbf{v}\|$ в $\mathbf{L}_2(G)$, оценка (1.8) при $s = 0$ принимает вид $C_0\|\mathbf{v}\|_2 \leqslant (|\mu|+1)\|\mathbf{v}\|_0$, причем постоянная $C_0 > 0$.

Значит, $\mathbf{v}_j(\mathbf{x})$ принадлежит $\mathbf{H}^2(G)$, и

$$\|\mathbf{v}_j\|_2 \leqslant C_0^{-1}(|\mu|+1)\|\mathbf{v}_j\|_0, \quad \|\mathbf{v}_j\|_0 \leqslant \sqrt{V}\|\mathbf{v}_j\cdot\mathbf{v}_j\|^{1/2}_{C(\overline{G})}.$$

Далее, пусть $s > 0$ целое. Так как $\|\nabla\operatorname{div}\mathbf{v}_j\|_s = |\mu|\|\mathbf{v}_j(\mathbf{x})\|_s$, из оценки (1.8) по индукции получаем

$$\|\mathbf{v}\|_{2s+2} \leqslant C_{2s}^{-1}(|\mu|+1)\|\mathbf{u}\|_{2s} \leqslant \ldots \leqslant C_{2s}^{-1}\dots C_0^{-1}(|\mu|+1)^s\|\mathbf{u}\|_0. \tag{1.15}$$

Значит, $\mathbf{v}_j(\mathbf{x})$ принадлежит $\mathbf{H}^{2s+2}(G) \subset \mathbf{C}^{2s}(\bar G)$ для любого целого $s \geqslant 0$. Утверждение b) доказано. □

1.7. Гладкость базисных полей пространств $\mathcal{A}_H$ и $\mathcal{B}_H$. Пространства $\mathcal{A}_H$ и $\mathcal{B}_H$ определяются решениями эллиптических систем (1.2) и (1.3) в $\mathbf{L}_2(G)$. Из формул (1.5) видно, что компоненты этих решений являются гармоническими функциями, а значит, они имеют непрерывные производные любого порядка. Это впервые заметил Герман Вейль для решений системы (1.3) (см. [4, Теорема 1]).

Краевые задачи (1.2) и (1.3) удовлетворяют условиям В. Солонникова в теореме 1.1 работы [16]. Откуда получаем, что пространства $\mathcal{A}_H$ и $\mathcal{B}_H$ конечномерны и их базисные поля $\mathbf{g}_i(\mathbf{x})$ и $\mathbf{h}_j(\mathbf{x}) \in \mathbf{C}^\infty(\bar G)$, $i = 1, \dots, \rho_1 < \infty$, $j = 1, \dots, \rho < \infty$. Для $\mathbf{g}_i(\mathbf{x})$ и $\mathbf{h}_j(\mathbf{x})$ имеются оценки вида (1.13) с $\lambda = 0$. W. Borchers, H. Sohr доказали [7], что число ρ есть род границы Γ области G. В частности, если область Ω гомеоморфна шару, то $\rho = 0$.

Если область Ω гомеоморфна шару, а $\mathbf{u}$ — решение задачи (1.3), определяющей $\mathcal{B}_H$, то $\mathbf{u} = \nabla h$, а функция h — решение задачи Неймана для оператора Лапласа:

$$\Delta h = 0 \text{ в } \Omega, \quad \gamma(\mathbf{n}\cdot\nabla)h = 0.$$

Решение этой задачи N есть произвольная постоянная $h = C$. Значит, $\mathbf{u} \equiv 0$ и пространство $\mathcal{B}_H$ пусто.

Рассмотрим пространство $\mathcal{A}_H$. Решение задачи (1.15) в шаре B, $|\mathbf{x}| < R$, сводится к задаче с условием Неймана:

$$\Delta h = C \text{ в } B, \quad \gamma(\mathbf{n}\cdot\nabla)h = 0,$$

где C — произвольная постоянная. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{x}$ — радиус-вектор, тогда $\mathbf{n} = \mathbf{x}/R$ — нормаль на границе шара. Частное решение уравнения Пуассона $\Delta h = C$ имеет вид $h = C|\mathbf{x}|^2/6 = Cr^2/6$. Дифференцируя по r, получаем $\gamma(\mathbf{r}\cdot\nabla)h = CR/3$. Граничное условие Неймана принимает вид $CR/3 = 0$. Значит, $C = 0$ и пространство $\mathcal{A}_H(B)$ в шаре B пусто.

1.8. Ортогональные базисы в $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ и в $\mathbf{L_2}(\boldsymbol{G})$. Пространство $\mathbf{A}^2$ плотно в $\mathbf{A}^0$ и $\mathbf{A}^2 \subset \mathbf{H}^2$. Собственные поля $\mathbf{q}_j(\mathbf{x})$ оператора $\nabla \operatorname{div}$ с ненулевыми собственными значениями μ_j принадлежат $\mathbf{A}^2$.

Множество собственных значений $\mu = -\nu^2$ этого оператора счетно, отрицательно и каждое из них имеет конечную кратность.

Перенумеруем их в порядке возрастания их модуля: $0 < -\mu_1 \leqslant -\mu_2 \leqslant \ldots$, повторяя μ_k столько раз, какова его кратность. Соответствующие вектор-функции обозначим через $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots$ так, чтобы каждому значению $\mu_k = -\nu_k^2$ соответствовала только одна функция $\mathbf{v}_k$: $\nabla \operatorname{div} \mathbf{v}_k = -\nu_k^2\mathbf{v}_k$, $\gamma\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Собственные функции, соответствующие одному и тому же собственному значению, выберем ортонормальными, используя процесс ортогонализации Шмидта (см. [23]). Поля, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны. Их нормируем. Нормированные собственные поля градиента дивергенции обозначим через $\mathbf{q}_l$, $l = 1, 2, \ldots$, норма $\|\mathbf{q}_l\| = 1$. Они составляют полный ортонормированный базис в классе $\mathbf{A}^0$. Зафиксируем его.

Аналогично строится базис в классе $\mathbf{V}^0$ [21].

Замечание. Согласно (1.6), оператор $\Delta\mathbf{u} \equiv -\operatorname{rot}^2\mathbf{u}$ при $\mathbf{u} \in \mathcal{B}$. Собственные векторы ротора всегда встречаются парами: каждому собственному полю $\mathbf{u}_j^+$ с $\lambda_j > 0$ соответствует собственное поле $\mathbf{u}_j^-$ с $-\lambda_j$. Это свойство операторов в [6] не отмечено.

Зафиксируем в $\mathbf{V}^0$ ортонормированный базис $\{\mathbf{q}_j^+, \mathbf{q}_j^-\}$, $\mathbf{q}_j^\pm \in \mathbf{C}^\infty(\bar{G})$:

$$\operatorname{rot}\mathbf{q}_j^\pm = \pm\lambda_j\mathbf{q}_j^\pm, \quad \gamma\mathbf{n}\cdot\mathbf{q}_j^\pm = 0, \quad \|\mathbf{q}_j^\pm\| = 1, \quad j \geqslant 1. \tag{1.16}$$

Учитывая базисы пространств $\mathcal{A}_H$, $\mathcal{B}_H$, видим, что объединение $\{g_l\}$, $\{\mathbf{q}_l\}$, $\{h_j\}$ и $\{\mathbf{q}_j^+, \mathbf{q}_j^-\}$ есть базис объемлющего пространства $\mathbf{L}_2(G)$.

Итак, *в пространстве* $\mathbf{L}_2(G)$ *построен ортонормированный базис, состоящий из базисов двух ортогональных подпространств* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$, *элементами которого являются гладкие собственные поля операторов* rot *и* ∇ div.

1.9. Явный вид собственных полей ротора в шаре B. Спектральные задачи для операторов ротор и градиент дивергенции в шаре решены автором полностью в [24]. Имеется несколько способов решения спектральной задачи ротора [8, 25, 26].

Учитывая приложения [27] и конкурирующие интересы [26], кратко изложим наш путь решения этой задачи [24].

Собственные числа $\lambda_{n,m}$ ротора в шаре радиуса R равны $\pm\rho_{n,m}/R$, где числа $\pm\rho_{n,m}$ — нули функций

$$\psi_n(z) = (-z)^n\Big(\frac{d}{zdz}\Big)^n\Big(\frac{\sin z}{z}\Big), \quad m, n \in \mathbb{N}. \tag{1.17}$$

Функции $\psi_n(z)$ — цилиндрические функции $J_{n+1/2}(z)$, где $n \geqslant 0$ — целое. Их элементарный вид (1.17) заметил еще Леорнард Эйлер (см. [23, § 23]).

Кратность собственного значения $\lambda^{\pm}_{n,m}$ равна $2n+1$.

Пусть $\mathbf{i}_r$, $\mathbf{i}_\theta$, $\mathbf{i}_\varphi$ — репер поля $\mathbf{u} = u_r\mathbf{i}_r + u_\theta\mathbf{i}_\theta + u_\varphi\mathbf{i}_\varphi$.

Формулы решений задачи (1.16). *Ненормированные собственные поля $\mathbf{u}^{\pm}_{\kappa}$ задачи (1.16) в сферических координатах вычисляются по формулам*

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{\pm}_{\kappa} = c^{\pm}_{\kappa}(\pm\lambda_{n,m}r)^{-1}\psi_n(\pm\lambda_{n,m}r)Y^k_n(\theta,\varphi)\mathbf{i}_r +{}&\\ + c^{\pm}_{\kappa}(\pm\lambda^{\pm}_{n,m}r)^{-1}\operatorname{Re}[\Phi_n(\pm\lambda_{n,m}r)](\operatorname{Re}\mathrm{H}Y^k_n\mathbf{i}_\varphi + \operatorname{Im}\mathrm{H}Y^k_n\mathbf{i}_\theta) +{}&\\ + c^{\pm}_{\kappa}(\pm\lambda_{n,m}r)^{-1}\operatorname{Im}[\Phi_n(\pm\lambda_{n,m}r)](-\operatorname{Im}\mathrm{H}Y^k_n\mathbf{i}_\varphi + \operatorname{Re}\mathrm{H}Y^k_n\mathbf{i}_\theta),&\end{aligned} \tag{1.18}$$

где $Y^k_n(\theta,\varphi)$ — сферические функции, оператор $\mathrm{H}v = (\sin^{-1}\theta\partial_\varphi + i\partial_\theta)v$, числа $c^{\pm}_{\kappa} \in \mathbb{R}$ — произвольны, $\kappa = (n,m,k)$ — мультииндекс, m, $n \in \mathbb{N}$, $|k| \leqslant n$, а

$$\Phi_n(\lambda r) = \int_0^r e^{i\lambda(r-t)}\psi_n(\lambda t)t^{-1}dt, \quad \operatorname{Im}\Phi_n(\pm\rho_{n,m}) = 0.$$

Решению этой спектральной задачи способствовали следующие наблюдения автора.

1. Функция $v(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{u} = ru_r$ — скалярное произведение радиус-вектора $\mathbf{x}$ и решения $\mathbf{u}$ спектральной задачи (1.12) в шаре B — является решением спектральной задачи Дирихле для уравнения Лапласа:
$$-\Delta v = \lambda^2 v \ \text{ в } \ B, \quad v|_S = 0, \quad v(0) = 0. \tag{1.19}$$
2. Уравнения $\operatorname{rot}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ в сферических координатах имеют вид двух комплексных уравнений
$$(\partial_r - i\lambda)rw = r^{-1}\mathrm{H}v, \quad \mathrm{K}w = \lambda v - ir^{-1}\partial_r(rv) \tag{1.20}$$
относительно функций $v = ru_r$ и $w = u_\varphi + iu_\theta$ с операторами
$$\mathrm{H}v = (\sin^{-1}\theta\partial_\varphi + i\partial_\theta)v, \quad \mathrm{K}w = \sin^{-1}\theta(\partial_\theta\sin\theta + i\partial_\varphi)w.$$
3. Уравнения (1.19) являются условиями совместности системы (1.20).

Таким образом, решение задачи сводится к решению спектральной задачи Дирихле—Лапласа (1.19). Ее решения — пары $\lambda_\kappa^2 = (\rho_{n,m}/R)^2$ и $v_\kappa = c_\kappa \psi_n(\rho_{n,m} r/R) Y_n^k(\theta,\varphi)$, где $\psi_n(\rho_{n,m}^2) = 0$ (см. [23, гл. V, § 26]). Условие $v(0) = 0$ выполняется, если постоянные $c_\kappa = 0$ при $\kappa = (0, m, 0)$. Числа $\lambda_\kappa^\pm = \pm\rho_{n,m}/R$ оказываются собственными значениями задачи (1.11), а функции $u_{r,\kappa} = v_\kappa/r$ — радиальными компонентами собственных полей. Далее, интегрируя уравнения (1.20) с $\lambda = \lambda_\kappa^+ > 0$ и $v = v_\kappa^+$, а затем с $\lambda_\kappa^- < 0$ и $v = v_\kappa^-$, определяем комплексные функции $w_\kappa^\pm$. Они задают касательные компоненты полей $\mathbf{u}_\kappa^\pm$, которые определятся однозначно условием $w_\kappa^\pm \in L_2(B)$. Наконец, из радиальных и касательных компонент составляем поля $\mathbf{u}_\kappa^\pm(\mathbf{x})$. В итоге получаем запись решения в виде (1.18).

Замечание. Уравнения (1.19) на функцию $v = ru_r$ при минимальном собственном значении $\lambda = 4.4934\ldots/R$ автор обнаружил в статье [26].

1.10. Явный вид собственных полей ∇ div в шаре B. Собственные значения оператора $\nabla\,\mathrm{div}$ равны $-\nu_{n,m}^2$, где $\nu_{n,m} = \alpha_{n,m}/R$, а числа $\alpha_{n,m}$ — нули производных $\psi_n'(r)$, $n \geqslant 0$, $m \in \mathbb{N}$; кратность собственных значений $-\nu_{n,m}^2$ равна $2n+1$.

Собственные поля $\mathbf{v}_\kappa$ градиента дивергенции — решения задачи

$$\nabla\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}_k = -\nu_\kappa^2 \mathbf{v}_\kappa, \quad \gamma\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_\kappa = 0, \quad \mathbf{v}_\kappa = \nabla g_\kappa \in \mathcal{C}^\infty(\bar{G}).$$

Эта задача сводится к задаче Неймана для скалярного оператора Лапласа и градиенту функций g_κ, так как

$$\nabla\,\mathrm{div}\,\nabla g_\kappa \equiv \nabla\Delta_c g_\kappa = \Delta_c(\nabla g_\kappa) = -\nu_k^2(\nabla g_\kappa), \quad \gamma(\mathbf{n}\cdot\nabla) g_\kappa = 0.$$

Матричный $(3{\times}1)$ оператор $\nabla\,\mathrm{div}\,\nabla g \equiv \nabla\Delta_c g$ эллиптичен.

Соответствующие $-\nu_\kappa^2 \equiv -\nu_{n,m}^2$ собственные функции g_κ имеют вид

$$g_\kappa(r,\theta,\varphi) = c_\kappa \psi_n(\alpha_{n,m} r/R) Y_n^k(\theta,\varphi).$$

Поля $\mathbf{v}_\kappa = \nabla g_\kappa$ являются решениями задачи (1.14); их компоненты v_r, v_θ, v_φ определяются из соотношений

$$v_{r,\kappa}(r,\theta,\varphi) = c_\kappa(\alpha_{n,m}/R)\psi_n'(\alpha_{n,m} r/R) Y_n^k(\theta,\varphi),$$
$$(v_\varphi + iv_\theta)_\kappa = c_\kappa(1/r)\psi_n(\alpha_{n,m} r/R)\mathrm{H}Y_n^k(\theta,\varphi).$$

При $\kappa = (0, m, 0)$ функция $Y_0^0(\theta,\varphi) = 1$, $\mathrm{H}Y_0^0(\theta,\varphi) = 0$, поэтому

$$v_{r,(0,m,0)}(r) = c_{(0,m,0)}(\alpha_{0,m}/R)\psi_0'(\alpha_{0,m} r/R), \quad (v_\varphi + iv_\theta)_{(0,m,0)} = 0.$$

Построенный базис из собственных полей операторов градиент дивергенции и ротор является полным в $\mathbf{L}_2(B)$, так как $\mathbf{L}_2(B) = \mathbf{A}^0 \oplus \mathbf{V}^0$.

1.11. Визуализация потока с минимальной энергией. Формулы (1.18) удобны при расчетах поля скоростей $\mathbf{u}_\kappa^\pm(\mathbf{x})$ и визуализации вихревых потоков при заданных $\kappa = (n, m, k)$.

Поля $\mathbf{u}_\kappa^\pm(\mathbf{x})$ при $n=1$, $\kappa=(1,1,0)$ и $\kappa=(1,1,\pm1)$ выражаются наиболее просто. Так, компоненты поля $\mathbf{u}^+_{(1,1,0)}(\mathbf{x})$ имеют вид

$$\begin{aligned} &u_r = 2\rho(r\rho)^{-3}\big(\sin(r\rho) - r\rho\cos(r\rho)\big)\cos\theta,\\ &u_\theta = (r\rho)^{-3}\big(\sin(r\rho) - r\rho\cos(r\rho) - (r\rho)^2\sin(r\rho)\big)\sin\theta,\\ &u_\varphi = (r\rho)^{-2}\big((\sin(r\rho) - r\rho\cos(r\rho)\big)\sin\theta. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Профессор Г. Г. Исламов[3] [28], используя эти формулы и программу `Wolfram Mathematica`, осуществил визуализацию линий тока поля $u^+_{1,1,0}(\mathbf{x})$ ротора при $R=1$, $\rho=\rho_{1,1}=4.4934$.[4] Траектория движения трех соседних точек напоминает ленту, которая наматывается на тороидальную катушку (см. изображение катушки Исламова в [21]).

В связи с задачами астрофизики S. Chandrasekhar, P. C. Kendall изучали собственные поля оператора ротор в цилиндре и в шаре [29]. Они нашли элементарный способ вычисления полей в цилиндре.

D. Montgomery, L. Turner, G. Vahala в [30] использовали их формулы при изучении магнитогидродинамической турбулентности в цилиндре. В предположении периодичности полей вдоль оси цилиндра они нашли три интегральных инварианта, имеющих квадратичные выражения в терминах спектральных разложений.

J. Cantarella, D. De Turck, H. Gluck, M. Teitel исследовали собственные поля ротора в шаре радиуса b и в шаровом слое. Уравнение (1.19) на функцию $v=ru_r$ при минимальном собственном значении $\lambda_{1,1}=\rho_{1,1}/b>0$ автор обнаружил в их статье [26], в которой авторы приводят также соответствующую $\lambda_{1,1}$ формулу собственного поля ротора в шаре (см. [26, Theorem A]). К сожалению, с опечаткой, исправив которую, мы приходим к формулам (1.21) для компонент поля $\mathbf{u}^+_{(1,1,0)}(\mathbf{x})$.

В [26, Fig. 1] также представлены интегральные кривые поля $\mathbf{u}^+_{(1,1,0)}(\mathbf{x})$ и приводится их описание: «они заполняют семейство концентрированных “торов” с замкнутой орбитой “ядра”, типичных для осесимметричных собственных полей ротора; специальная орбита начинается на южном полюсе сферы в момент времени $-\infty$, проходит вертикально вверх по оси z и достигает северного полюса ко времени $+\infty$; орбиты на граничной сфере начинаются на северном полюсе в момент времени $-\infty$, продолжаются по линиям долготы к южному полюсу до момента времени $+\infty$; имеются две стационарные точки в ее полюсах.»

В статье [26] отмечено, что L. Woltjer использовал векторное поле $\mathbf{u}^+_{(1,1,0)}(\mathbf{x})$ для моделирования магнитного поля в Крабовидной туманности [27].

Не зная об этих работах, Г. Исламов и автор настоящей статьи также исследовали это поле [31].

1.12. Степени оператора Лапласа в классах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Из формул (1.6) при $k=2,3,\ldots$ имеем

$$\Delta^k\mathbf{v} \equiv (\nabla\,\mathrm{div})^k\mathbf{v} \ \text{ при } \ \mathbf{v}\in\mathcal{A}, \quad \Delta^k\mathbf{u} \equiv (-1)^k(\mathrm{rot})^{2k}\mathbf{u} \ \text{ при } \ \mathbf{u}\in\mathcal{B}. \tag{1.22}$$

[3] Исламов Галимзян Газизович (02.02.1948–22.11.2017).

[4] http://wac.36f4.edgecastcdn.net/0036F4/pub/www.wolfram.com/pdf/report-islamov.pdf

В $\mathbf{L}_2(G)$ оператор Δ^k выражается через $(\nabla \operatorname{div})^k$ и $(\operatorname{rot})^{2k}$, а также через скалярный оператор $\Delta_c^k = (\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2)^k$:

$$\Delta^k \mathbf{v} = (\nabla \operatorname{div})^k \mathbf{v} + (-1)^k (\operatorname{rot})^{2k} \mathbf{v} = \Delta_c^k I_3 \mathbf{v},$$

где $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Эти формулы следуют из формул (1.5), так как операторы rot и $\nabla \operatorname{div}$ аннулируют друг друга.[5]

С. Л. Соболев изучил периодическую задачу π и краевые задачи D и N для скалярного полигармонического уравнения $\Delta^m u = \rho$ в пространствах $W_2^m(\Omega)$ с правой частью — обобщенной функцией (см. [1, § 9, гл. 12]).

В периодическом случае он доказал следующую теорему (цитирую).

Теорема XII.13. *Оператор Δ^m переводит произвольную функцию u из $\bar{W}_2^{(m)}$ в $\Delta^m u = \rho$ — элемент $\bar{L}_2^{(m)^*}$. Обратно, для произвольной обобщенной функции ρ из $\bar{L}_2^{(m)^*}$ существует функция $u \in \bar{W}_2^{(m)}$ такая, что $\Delta^m u = \rho$. Эта функция определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого.*

Операторы $(\nabla \operatorname{div})^p$ и $(\operatorname{rot})^{2q}$, где p и q — натуральные числа, суть аналоги полигармонических операторов Δ^m в классах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, согласно (1.22).

Мы покажем, что оператор $(\nabla \operatorname{div})^{2p}$ переводит произвольное поле $\mathbf{w}$ из A^{2p} в $(\nabla \operatorname{div})^{2p} \mathbf{w} = \rho$ — элемент $A^{-2p} \equiv (A_0^{2p})^*$, а оператор $(\operatorname{rot})^{2q}$ переводит произвольное поле $\mathbf{u}$ из W^q в $(\operatorname{rot})^{2q} \mathbf{u} = \mathbf{v}$ — элемент $W^{-q} \equiv (W_0^q)^*$.

Имеют место и обратные утверждения (см. теоремы 3 и 4).

2. Пространство $\mathcal{A}$ потенциальных полей

В статье [22] детально рассмотрены структура класса $\mathcal{A}$ потенциальных полей, его базис и оператор $\mathcal{N}_d$. Здесь мы рассмотрим его подпространства $\mathbf{A}^{2k}$. По определению

$$\mathcal{A}(G) = \{\nabla h, h \in H^1\}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}_H \oplus \mathbf{A}^0,$$

где $\mathcal{A}_H$ — ядро оператора $\nabla \operatorname{div}$ в $\mathcal{A}$, а $\mathbf{A}^0$ — его ортогональное дополнение;

$$\mathcal{A}_\gamma(G) = \{\nabla h, h \in H^2(G) : \gamma(\mathbf{n} \cdot \nabla) h = 0\}, \quad \mathcal{A}_\gamma^0 = \mathbf{A}^0 \cap \mathcal{A}_\gamma.$$

Подпространство $\mathbf{A}^2 = \{\mathbf{v} \in \mathcal{A}_\gamma^0 : \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} \in \mathcal{A}_\gamma^0\}$ — область определения оператора $\mathcal{N}_d$; оно плотно в $\mathbf{A}^0$ и $\mathbf{A}^2 \subset \mathbf{H}^2$ (согласно п. 1.5).

Собственные поля $\mathbf{q}_j(\mathbf{x})$ оператора $\nabla \operatorname{div}$ с ненулевыми собственными значениями $(-\nu_j^2)$: $\nabla \operatorname{div} \mathbf{q}_j = -\nu_j^2 \mathbf{q}_j$, $\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}_j) = 0$ принадлежат пространству $\mathbf{A}^2$. Они составляют ортонормированный базис $\{\mathbf{q}_j(\mathbf{x})\}$ в $\mathbf{A}^0$.

Проекция поля $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(G)$ на $\mathbf{A}^0$ имеет вид

$$\mathcal{P}_\mathcal{A} \mathbf{f} \equiv \mathbf{f}_\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \lim_{n \to \infty} (\mathbf{f}_\mathcal{A}^n) = \sum_{j=1}^{\infty} (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j) \mathbf{q}_j(\mathbf{x}), \tag{2.1}$$

где $\mathbf{f}_\mathcal{A}^n$ — частичные суммы этого ряда.

[5] Они являются проекторами: $\nabla \operatorname{div}$ проектирует $\mathbf{L}_2(G)$ на $\mathcal{A}$, а rot — на $\mathcal{B}$.

Оператор $\mathcal{N}_d$ определен и совпадает с $\nabla \operatorname{div}$ на $\mathbf{A}^2$, поэтому

$$\mathcal{N}_d \mathbf{f}_{\mathcal{A}} = \lim_{n\to\infty} \nabla \operatorname{div}(\mathbf{f}^n_{\mathcal{A}}) = -\sum_{j=1}^{\infty} \nu_j^2 (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j)\mathbf{q}_j(\mathbf{x}),$$

если ряд сходится и принадлежит $\mathbf{A}^0$. Это так, если $f \in \mathbf{H}^2(G)$.

Доказано, что оператор $\mathcal{N}_d$ замкнут и самосопряжен [22].

2.1. Подпространства $\mathbf{A}^{2k}$ в $\mathcal{A}$. Рассмотрим еще пространства[6]

$$\mathbf{A}^{2k} = \{\mathbf{f} \in \mathcal{A}^0_\gamma, \ldots, (\nabla \operatorname{div})^k \mathbf{f} \in \mathcal{A}^0_\gamma\}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Замечание. Согласно оценке (1.8), пространство $\mathbf{A}^{2k} \subset \mathbf{H}^{2k}$. С другой стороны, оно является проекцией пространства Соболева $\mathbf{H}^{2k}$ порядка $2k$ на класс $\mathcal{A}$, так как для любого поля $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{2k}$ его проекция $\mathcal{P}_A \mathbf{f} \in \mathbf{A}^{2k}$; если же $\mathbf{f} \in \mathbf{A}^{2k}$, то $\mathcal{P}_A \mathbf{f} = \mathbf{f}$, а его проекция на $\mathcal{B}$ равна 0.

Пространство $\mathcal{A}^0_\gamma$ ортогонально ядру оператора $\mathcal{N}_d$ в $\mathbf{L}_2(G)$, поэтому $\mathcal{N}_d$ имеет единственный обратный оператор:

$$\mathcal{N}_d^{-1} \mathbf{f}_{\mathbf{A}} = -\sum_{j=1}^{\infty} \nu_j^{-2} (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j)\mathbf{q}_j(\mathbf{x}).$$

Оператор $\mathcal{N}_d^{-1}$ — компактен.

Замечание. Спектр оператора $\mathcal{N}_d^{-1}$ точечный с единственной точкой накопления в нуле, $\nu_j^{-2} \to 0$ при $j \to \infty$.

2.2. Сопряженные пространства $\mathbf{A}^{-2k}$. По определению, пространство $H^s_0(G)$ есть замыкание в норме $H^s(G)$ функций из $C^\infty_0(G)$, $\mathcal{A}_0 = \{\nabla h, h \in H^1_0\}$, пространство $\mathbf{A}^{2k}_0 = \{\ \mathbf{f} \in \mathcal{A}_0, \ldots, (\nabla \operatorname{div})^k\ \mathbf{f} \in \mathcal{A}_0\}$.

Пространство линейных непрерывных функционалов над $\mathbf{A}^{2k}_0$ обозначим $(\mathbf{A}^{2k}_0)^*$. Эти пространства можно отождествить с пространствами $\mathbf{A}^{-2k}$ порядка $-2k$ (см. п. 2.4). Наконец, $\mathcal{A}^*$ — объединение $\mathbf{A}^{-2k}$ при $k \geqslant 1$.

Цепь вложений пространств $\mathbf{A}^{2k}$ имеет вид

$$\subset \mathbf{A}^{2k} \subset \cdots \subset \mathbf{A}^2 \subset \mathbf{A}^0 \subset \mathbf{A}^{-2} \subset \cdots \subset \mathbf{A}^{-2k} \subset .$$

Операторы $\mathcal{N}_d : \mathbf{A}^{2k} \to \mathbf{A}^{2(k-1)}$ обратимы при $k > 1$ и

$$\|\mathcal{N}_d^{-1}\mathbf{f}\|^2_{\mathbf{A}^{2k}} \leqslant c_k^2 \|\mathbf{f}\|^2_{\mathbf{A}^{2(k-1)}}, \quad \|\mathcal{N}_d\mathbf{f}\|^2_{\mathbf{A}^{2(k-1)}} \leqslant c_k^{-2} \|\mathbf{f}\|^2_{\mathbf{A}^{2k}},$$

где $c_k^2 = \max_j(1 + 1/\nu_j^{2k})$, а $1/\nu_j \to 0$ при $j \to \infty$.

Автор изучил также оператор $\mathcal{N}_d + \lambda I$, доказаны следующие утверждения:

– *оператор* $\mathcal{N}_d + \lambda I : \mathbf{A}^{2(k+1)} \to \mathbf{A}^{2k}$ — *фредгольмов при* $k \geqslant 0$ [22, п. 2.10];
– *если* $\lambda \overline{\in} \operatorname{Sp}(\mathcal{N}_d)$, *то оператор* $\mathcal{N}_d + \lambda I$ (*и обратный*) *отображает пространство* $\mathbf{A}^{2(k+1)}$ *на* $\mathbf{A}^{2k}$ (*и обратно*) *взаимно однозначно и непрерывно* [21, Лемма 2, п. 1.7].

[6] Они совпадают с пространствами $\mathbf{A}^{2k}_\gamma$ в [22], если пространство $\mathcal{A}_H$ пусто.

2.3. Оператор $\mathcal{N}_d^{2k}$ в пространстве $\mathbf{A}^{2k}$. Оператор $\mathcal{N}_d\mathbf{u}$ совпадает с $\nabla\operatorname{div}\mathbf{u}$, если $\mathbf{u}\in\mathbf{A}^2\equiv\mathcal{D}(\mathcal{N}_d)$. Поэтому оператор $(\nabla\operatorname{div})^k$ на $\mathbf{A}^{2k}\subset\mathbf{A}^2$ совпадает с $\mathcal{N}_d^k$ при $k>1$.

Основное утверждение. *Оператор $\mathcal{N}_d^{2k}$ отображает пространство $\mathbf{A}^{2k}$ на $\mathbf{A}^{-2k}$ и обратно.*

Ниже приведем этапы его *доказательства*.

Шаг 1. *Оператор $\mathcal{N}_d^{2k}$ отображает пространство $\mathbf{A}^{2k}$ на $(\mathbf{A}_0^{2k})^*$.*

Действительно, пусть $\mathbf{w}$ — произвольный элемент из $\mathbf{A}^{2k}$, а $\mathbf{w}_\eta$ — средняя вектор-функция для него, $\mathbf{w}_\eta\in\mathbf{A}_0^{2k}$; поле $\mathbf{u}\in\mathbf{A}^{2k}$.

Рассмотрим главную часть $(\mathbf{u},\mathbf{w}_\eta)_{2k}\equiv\big((\nabla\operatorname{div})^k\mathbf{u},(\nabla\operatorname{div})^k\mathbf{w}_\eta\big)$ скалярного произведения в $\mathbf{A}^{2k}(G)$. Проинтегрируем по частям:

$$(\mathbf{u},\mathbf{w}_\eta)_{2k}=\big((\nabla\operatorname{div})^{2k}\mathbf{u},\mathbf{w}_\eta\big)=\int_G\mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}_\eta)d\mathbf{x}.$$

Левая часть имеет предел при $\eta\to 0$, равный $(\mathbf{u},\mathbf{w})_{2k}$. Следовательно, правая часть также будет иметь предел и интеграл $\int_G\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}\,d\mathbf{x}$ существует при любой $\mathbf{w}\in\mathbf{A}^{2k}(G)$. Кроме того, из неравенства Коши—Буняковского следует оценка этого интеграла:

$$\left|\int_G\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}\,d\mathbf{x}\right|\leqslant\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{A}^{2k}}\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{A}^{2k}}.$$

Значит, $\mathbf{v}$ — линейный функционал из $(\mathbf{A}_0^{2k})^*$.

Применим его к полям $\mathbf{g}_i$, составляющим базис пространства $\mathcal{A}_H(G)$. Учитывая, что $\nabla\operatorname{div}\mathbf{g}_i=0$, получим

$$\int_G\mathbf{v}\cdot\mathbf{g}_i\,d\mathbf{x}=0.\quad i=1,\ldots,\rho_1.$$

Итак, на полях $\mathbf{w}$, отличающихся на вектор-функцию $\mathbf{g}$ из $\mathcal{A}_H(G)$, его значения совпадают.

Пусть $\mathcal{A}/\mathcal{A}_H$ — фактор-пространство $\mathcal{A}(G)$ по $\mathcal{A}_H$, классы смежности $\mathcal{A}^{2k}(G)=\mathbf{A}^{2k}(G)/\mathcal{A}_H$, его элементы имеют вид $\mathbf{w}+\mathbf{g}$, где $\nabla\operatorname{div}\mathbf{g}=0$.

2.4. Оператор $\mathcal{N}_d^{2k}$ в фактор-пространстве $\mathcal{A}^{2k}$.

Шаг 2. *Пространство $\mathcal{A}^{2k}(G)$ становится гильбертовым, если ввести скалярное произведение $\{\mathbf{u},\mathbf{w}\}_{2k}\equiv(\mathbf{u},\mathbf{w})_{2k}=((\nabla\operatorname{div})^k\,\mathbf{u},(\nabla\operatorname{div})^k\,\mathbf{w})$.*

При $\mathbf{f}\in\mathcal{A}^{2k}$, $\mathbf{g}_\eta\in\mathcal{A}_0^{2k}$ в терминах рядов Фурье (2.1) оно имеет вид

$$\{\mathbf{f},\mathbf{g}_\eta\}_{2k}\equiv(\mathcal{N}_d^k\,\mathbf{f},\mathcal{N}_d^k\,\mathbf{g}_\eta)=\sum_{j=1}^{\infty}\nu_j^{4k}[(\mathbf{f},\mathbf{q}_j)(\mathbf{g}_\eta,\mathbf{q}_j)],$$

так как

$$\mathcal{N}_d^k\mathbf{f}=\lim_{n\to\infty}(\nabla\operatorname{div})^k\,(\mathbf{f}_{\mathcal{A}}^n)=(-1)^k\sum_{j=1}^{\infty}\nu_j^{2k}(\mathbf{f},\mathbf{q}_j)\mathbf{q}_j(\mathbf{x}).$$

Для того чтобы функционал ρ служил элементом $(\mathcal{A}_0^{2k})^*$ нужно, чтобы скалярное произведение $(\rho(\mathbf{x}), \mathbf{w}(\mathbf{x}))$ существовало при всех $\mathbf{w}(\mathbf{x}) \in \mathcal{A}^{2k}$ и удовлетворяло неравенству $(\rho(\mathbf{x}), \mathbf{w}(\mathbf{x})) \leqslant M_{2k}\|\mathcal{N}_d^k \mathbf{w}\|$. Мы имеем

$$(\rho, \mathbf{w}) = \sum_{j=1}^{\infty} \big[(\rho, \mathbf{q}_j)/\nu_j^{2k}\big]\big[\nu_j^{2k}(\mathbf{w}, \mathbf{q}_j)\big] \leqslant M_{2k}\|\mathcal{N}_d^k\, \mathbf{w}\|,$$

где

$$M_{2k} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \nu_j^{-4k}(\rho, \mathbf{q}_j)^2\right)^{1/2}.$$

Знак равенства при заданных $(\rho, \mathbf{q}_j)$ достижим. Значит, имеет место

Лемма 1. *Условие $M_{2k} < \infty$ необходимо и достаточно для принадлежности $\rho(\mathbf{x})$ к $(\mathcal{A}_0^{2k})^*$.*

Величина M_{2k} есть норма функционала ρ в $(\mathcal{A}_0^{2k})^*$, которая совпадает с нормой элемента

$$\mathcal{N}_d^{-k}\, \mathbf{f} = (-1)^k \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j^{-2k}(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j)\mathbf{q}_j(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad \mathbf{f} \in \mathbf{A}^{-2k}.$$

Шаг 3. *Отождествление пространства $(\mathbf{A}_0^{2k})^*$ с пространством $\mathbf{A}^{-2k}$.* Определим в $(\mathbf{A}_0^{2k})^*$ скалярное произведение:

$$\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}_{-2k} = (\mathcal{N}_d^{-k}\, \mathbf{u}, \mathcal{N}_d^{-k}\, \mathbf{w}).$$

Переформулируем лемму 1 следующим образом.

Теорема 3. *При заданном $\mathbf{v} \in \mathcal{A}^*$ и $k \geqslant 1$ уравнение $(\nabla \operatorname{div})^{2k}\mathbf{u} = \mathbf{v}$ разрешимо в пространстве $\mathbf{A}^{2k}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{v} \in \mathbf{A}^{-2k}$. В фактор-пространстве $\mathcal{A}/\mathcal{A}_H$ его решение $\mathbf{u} = \mathcal{N}_d^{-2k}\mathbf{v}$ определяется однозначно.*

Доказательство. Действительно, если функционал $\mathbf{v} \in (\mathbf{A}_0^{2k})^*$, то его норма $M_{2k} < \infty$ и он принадлежит $\mathbf{A}^{-2k}$, так как

$$\{\mathbf{v}, \mathbf{v}\}_{-2k} = (\mathcal{N}_d^{-k}\, \mathbf{v}, \mathcal{N}_d^{-k}\mathbf{v}) = M_{2k}^2.$$

Ряд $\mathcal{N}_d^k\mathbf{u} = \mathcal{N}_d^k[\mathcal{N}_d^{-2k}, \mathbf{v}] = \mathcal{N}_d^{-k}\mathbf{v}$ сходится в $\mathcal{A}_\gamma$, так как $(\mathcal{N}_d^{-k}\mathbf{v}, \mathcal{N}_d^{-k}\mathbf{v}) = M_{2k}^2$. Элемент $\mathbf{u}$ принадлежит $\mathbf{A}^{2k}$ и удовлетворяет уравнению

$$(\nabla \operatorname{div})^{2k}\mathbf{u} = \mathcal{N}_d^{2k}[\mathcal{N}_d^{-2k}\mathbf{v}] = \mathbf{v},$$

так как квадрат его нормы

$$\{\mathbf{u}, \mathbf{u}\}_{2k} = (\mathcal{N}_d^k\mathbf{u}, \mathcal{N}_d^k\mathbf{u}) = (\mathcal{N}_d^{-k}\mathbf{v}, \mathcal{N}_d^{-k}\mathbf{v}) = \{\mathbf{v}, \mathbf{v}\}_{-m} = M_{2k}^2 < \infty.$$

Однозначность решения вытекает из определения и обратимости операторов $\mathcal{N}_d$. Теорема доказана. □

Теорема 3 показывает, что между пространствами $\mathbf{A}^{2k}$ и $\mathbf{A}^{-2k}$ имеется соответствие. Согласно п. 2.2 между пространствами $\mathbf{A}^{2(k+1)}$ и $\mathbf{A}^{2k}$ также имеется соответствие, что дополняет известное утверждение: *все сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны между собой.*

3. Пространство $\mathbf{V}^0$ вихревых полей

Как отмечают Z. Yoshida и Y. Giga [6], разложение $\mathcal{B}(G)=\mathcal{B}_H(G)\oplus\mathbf{V}^0(G)$ содержится в книге C. B. Morrey [13]; они же рассмотрели[7] пространство $\mathbf{V}^0$ и оператор S с областью определения $\mathbf{W}^1=\{\,\mathbf{f}\in\mathbf{V}^0, \operatorname{rot}\mathbf{f}\in\mathbf{V}^0\}$, который совпадает с $\operatorname{rot}\mathbf{u}$, если $\mathbf{u}\in\mathbf{W}^1$, и доказали, что оператор S самосопряжен в $\mathbf{V}^0$, его спектр $\sigma(S)$ точечный и действительный: $\sigma(S)=\sigma_p(S)\subset\mathbb{R}$. Оператор S имеет компактный обратный из $\mathbf{V}^0$ в $\mathbf{W}^1\subset\mathbf{H}^1$. Значит, в пространстве $\mathbf{V}^0$ существует ортогональный базис, составленный из собственных полей оператора S. Авторы [6] базис не рассматривали. Он построен и использовался автором настоящей работы в [21]. Ранее в шаре B были найдены их явные выражения [24].

В п. 1.6 мы вновь рассмотрели базис $\{\mathbf{q}_j^{\pm}\}$ в $\mathbf{V}^0(G)\subset\mathbf{L}_2(G)$:

$$\operatorname{rot}\mathbf{q}_j^{\pm}=\pm\lambda_j\mathbf{q}_j^{\pm},\quad \gamma\mathbf{n}\cdot\mathbf{q}_j^{\pm}=0,\quad \|\mathbf{q}_j^{\pm}\|=1,\quad j=1,2,\ldots,$$

и доказали гладкость его полей: $\mathbf{q}_j^{\pm}\in\mathbf{C}^{\infty}(\bar{G})$.

В этом базисе элементы $\mathbf{V}^0(G)$ представляются рядами Фурье:

$$\mathbf{f}_{\mathbf{V}}=\lim_{n\to\infty}(\mathbf{f}_{\mathbf{V}}^n)=\sum_{j=1}^{\infty}[(\mathbf{f},\mathbf{q}_j^{+})\mathbf{q}_j^{+}+(\mathbf{f},\mathbf{q}_j^{-})\mathbf{q}_j^{-}],\tag{3.1}$$

где $\mathbf{f}_{\mathbf{V}}^n$ — частичные суммы ряда, $\mathbf{f}_{\mathbf{V}}\equiv\mathcal{P}_{\mathbf{V}}\mathbf{f}$ — проекция поля $\mathbf{f}\in\mathbf{L}_2(G)$ на $\mathbf{V}^0$. Операторы S и S^{-1} являются преобразованиями этих рядов:

$$S\mathbf{f}_{\mathbf{V}}=\lim_{n\to\infty}\operatorname{rot}(\mathbf{f}_{\mathbf{V}}^n)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j[(\mathbf{f},\mathbf{q}_j^{+})\mathbf{q}_j^{+}-(\mathbf{f},\mathbf{q}_j^{-})\mathbf{q}_j^{-}],$$

$$S^{-1}\mathbf{f}_{\mathbf{V}}=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{-1}[(\mathbf{f},\mathbf{q}_j^{+})\mathbf{q}_j^{+}-(\mathbf{f},\mathbf{q}_j^{-})\mathbf{q}_j^{-}].$$

3.1. Подпространства $\mathbf{W}^m$ в $\mathbf{V}^0$ и их сопряженные. Эти пространства определяются соотношениями

$$\mathbf{W}^m=\{\,\mathbf{f}\in\mathbf{V}^0,\ldots,(\operatorname{rot})^m\mathbf{f}\in\mathbf{V}^0\},\quad m=1,2,3,\ldots.$$

Согласно оценке (1.7), для любого поля $\mathbf{f}\in\mathbf{H}^m$ его проекция $\mathcal{P}_V\mathbf{f}\in\mathbf{W}^m$; если же $\mathbf{f}_{\mathbf{V}}\in\mathbf{W}^m$, то $\mathcal{P}_V\mathbf{f}_{\mathbf{V}}=\mathbf{f}_{\mathbf{V}}$, а его проекция на подпространство $\mathcal{A}$ равна 0. Значит, пространство $\mathbf{W}^m\subset\mathbf{H}^m$ и $\mathbf{W}^m$ есть проекция $\mathbf{H}^m$ на $\mathbf{V}^0$.

Замыкание в норме $\mathbf{W}^k(G)$ пространства $\mathbf{C}_0^{\infty}(G)$ обозначается через $\mathbf{W}_0^k$, $k\geqslant 1$, а пространство $(\mathbf{W}_0^k)^*$ сопряжено с $\mathbf{W}_0^k$, его отождествляем с $\mathbf{W}^{-k}(G)$. В итоге получаем шкалу (цепь) вложенных пространств:

$$\subset\mathbf{W}^m\subset\cdots\subset\mathbf{W}^1\subset\mathbf{V}^0\subset\mathbf{W}^{-1}\subset\cdots\subset\mathbf{W}^{-m}\subset.$$

Оператор S отображает пространство $\mathbf{W}^m$ на $\mathbf{W}^{m-1}$, а S^{-1} — обратно.

Автор изучал также оператор $S+\lambda I$, в [21, Лемма 1, п. 1.5] доказано следующее:

[7] Пространства L^2_σ, L^2_H, L^2_Σ, $H^1_{\Sigma\Sigma}$ в [6] мы обозначили как $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_H$, $\mathbf{V}^0$ и $\mathbf{W}^1$ в [21].

– *оператор* $S+\lambda I:\mathbf{W}^m\to\mathbf{W}^{(m-1)}$ *фредгольмов при* $m\geqslant 1$;
– *если* $\lambda\overline{\in}\,\mathrm{Sp}(S)$, *то оператор* $S+\lambda I$ (*и его обратный*) *отображают пространство* $\mathbf{W}^{(m)}$ *на* $\mathbf{W}^{(m-1)}$ (*и обратно*) *взаимно однозначно и непрерывно.*

3.2. Оператор S^{2m} на пространстве $\mathbf{W}^m$. Пусть $m\geqslant 1$, а область G такова, что $\rho=\dim\mathcal{B}_H>0$. По определению, оператор $S\mathbf{u}$ совпадает с $\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$, если $\mathbf{u}\in\mathbf{W}^1\equiv\mathcal{D}(S)$. Поэтому оператор S^{2m} на $\mathbf{W}^m\subset\mathbf{W}^1$ совпадает с $(\mathrm{rot})^{2m}$. Докажем следующее

Утверждение. *Оператор S^{2m} отображает пространство $\mathbf{W}^m$ на $\mathbf{W}^{-m}$ и обратно.*

Приведем этапы *доказательства* этого утверждения.

Шаг 1. *Оператор S^{2m} отображает пространство $\mathbf{W}^m$ на $(\mathbf{W}_0^m)^*$.*

Действительно, пусть $\mathbf{u}$ и $\mathbf{w}$ — произвольные элементы из $\mathbf{W}^m(G)$, а $\mathbf{w}_\eta$ — средняя вектор-функция поля $\mathbf{w}$, $\mathbf{w}_\eta\in\mathbf{W}_0^m(G)$.

Рассмотрим главную часть $(\mathbf{u},\mathbf{w}_\eta)_m\equiv(\mathrm{rot}^m\,\mathbf{u},\mathrm{rot}^m\,\mathbf{w}_\eta)$ скалярного произведения в $\mathbf{W}^m(G)$; интегрируя по частям, получим

$$(\mathbf{u},\mathbf{w}_\eta)_m\equiv(\mathrm{rot}^{2m}\,\mathbf{u},\mathbf{w}_\eta)=\int_G\mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}_\eta)\,d\mathbf{x}.$$

Левая часть имеет предел при $\eta\to 0$, равный $(\mathbf{u},\mathbf{w})_m$. Следовательно, правая часть также будет иметь предел и интеграл $\int_G\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}\,d\mathbf{x}$ существует при любой $\mathbf{w}\in\mathbf{W}^m(G)$. Кроме того, из неравенства Коши—Буняковского следует оценка этого интеграла:

$$\left|\int_G\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}\,d\mathbf{x}\right|\leqslant\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^m}\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{W}^m}.$$

Значит, $\mathbf{v}$ есть линейный функционал из $(\mathbf{W}_0^m)^*$. Применим его к полям $\mathbf{h}_i$, составляющим базис пространства $\mathcal{B}_H(G)$. Учитывая, что $\mathrm{rot}\,\mathbf{h}_i=0$, получим

$$\int_G\mathbf{v}\cdot\mathbf{h}_i\,d\mathbf{x}=0,\quad i=1,\dots,\rho.$$

Итак, на полях $\mathbf{w}$, отличающихся на вектор-функцию $\mathbf{h}$ из $\mathcal{B}_H(G)$, его значения совпадают.

Пусть $\mathcal{B}/\mathcal{B}_H$ — фактор-пространство $\mathcal{B}(G)$ по $\mathcal{B}_H$, пространство $\mathcal{B}^m(G)=$ $=\mathbf{W}^m(G)/\mathcal{B}_H$, его элементы имеют вид $\mathbf{w}+\mathbf{h}$, где $\mathrm{rot}\,\mathbf{h}=0$.

3.3. Оператор S^{2m} в фактор-пространстве $\mathcal{B}^m(G)$.

Шаг 2. *Пространство $\mathcal{B}^m(G)$ становится гильбертовым, если ввести скалярное произведение* $\{\mathbf{u},\mathbf{w}\}_m\equiv(\mathrm{rot}^m\,\mathbf{u},\mathrm{rot}^m\,\mathbf{w})$.

При $\mathbf{f}\in\mathcal{B}^m$, $\mathbf{g}_\eta\in\mathcal{B}_0^m$, в терминах рядов Фурье (3.1)

$$\{\mathbf{f},\mathbf{g}_\eta\}_m\equiv(S^m\,\mathbf{f},S^m\,\mathbf{g}_\eta)=\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda_j^{2m})[(\mathbf{f},\mathbf{q}_j^+)(\mathbf{g}_\eta,\mathbf{q}_j^+)+(\mathbf{f},\mathbf{q}_j^-)(\mathbf{g}_\eta,\mathbf{q}_j^-)],$$

так как

$$S^m\mathbf{f}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{rot}^m(\mathbf{f}_{\mathbf{V}}^n)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^m[(\mathbf{f},\mathbf{q}_j^+)\mathbf{q}_j^++(-1)^m(\mathbf{f},\mathbf{q}_j^-)\mathbf{q}_j^-].$$

Функционал ρ служит элементом $(\mathcal{B}_0^m)^*$, если скалярное произведение $(\rho(\mathbf{x}), \mathbf{w}(\mathbf{x}))$ существует при всех $\mathbf{w}(\mathbf{x}) \in \mathcal{B}^m$ и удовлетворяет неравенству $(\rho(\mathbf{x}), \mathbf{w}(\mathbf{x})) \leqslant K_m \|S^m \mathbf{w}\|$. Мы имеем

$$(\rho, \mathbf{w}) = \sum_{j=1}^{\infty} \big[(\rho, \mathbf{q}_j^+)(\mathbf{w}, \mathbf{q}_j^+) + (\rho, \mathbf{q}_j^-)(\mathbf{w}, \mathbf{q}_j^-)\big] \leqslant K_m \|S^m \mathbf{w}\|,$$

где

$$K_m = \left(\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j^{-2m})[(\rho, \mathbf{q}_j^+)^2 + (\rho, \mathbf{q}_j^-)^2]\right)^{1/2}.$$

Знак равенства при заданных $(\rho, \mathbf{q}_j^\pm)$ достижим. Значит, имеет место

Лемма 2. *Условие $K_m < \infty$ необходимо и достаточно для принадлежности $\rho(\mathbf{x})$ к $(\mathcal{B}_0^m)^*$.*

Величина K_m — норма функционала ρ в $(\mathcal{B}_0^m)^*$, которая совпадает с нормой элемента

$$S^{-m}\mathbf{f} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-m}[(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+)\mathbf{q}_j^+ + (-1)^m (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-)\mathbf{q}_j^-] \quad \text{при} \quad \mathbf{f} \in \mathbf{W}^{-m}.$$

Таким образом, пространство $(\mathcal{B}_0^m)^*$ можно отождествить с пространством $\mathbf{W}^{-m}$, определить в нем скалярное произведение

$$\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}_{-m} = (S^{-m}\mathbf{u}, S^{-m}\mathbf{w}),$$

а лемму 2 переформулировать следующим образом.

Теорема 4. *При заданном $\mathbf{v}$ в объединении пространств $\mathbf{W}^{-n}(G)$ и $m \geqslant 1$ уравнение $\operatorname{rot}^{2m} \mathbf{u} = \mathbf{v}$ разрешимо в пространстве $\mathcal{B}^m(G)$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{v} \in \mathbf{W}^{-m}(G)$. Его решение $\mathbf{u} = S^{-2m}\mathbf{v}$ в классе $\mathcal{B}(G)/\mathcal{B}_H$ определяется однозначно.*

Доказательство. Действительно, если функционал $\mathbf{v} \in (\mathcal{B}_0^m)^*$, то его норма $K_m < \infty$ и он принадлежит $\mathbf{W}^{-m}$, так как

$$\{\mathbf{v}, \mathbf{v}\}_{-m} = (S^{-m}\mathbf{v}, S^{-m}\mathbf{v}) = K_m^2.$$

Ряд $S^m\mathbf{u} = S^m[S^{-2m}\mathbf{v}] = S^{-m}\mathbf{v}$ сходится в $\mathbf{V}^0$, так как $(S^{-m}\mathbf{v}, S^{-m}\mathbf{v}) = K_m^2$. Элемент $\mathbf{u}$ принадлежит $\mathbf{W}^m$ и удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{rot}^{2m} \mathbf{u} = S^{2m}\mathbf{u} = S^{2m}[S^{-2m}\mathbf{v}] = \mathbf{v},$$

так как квадрат его нормы

$$\{\mathbf{u}, \mathbf{u}\}_m = (S^m\mathbf{u}, S^m\mathbf{u}) = (S^{-m}\mathbf{v}, S^{-m}\mathbf{v}) = \{\mathbf{v}, \mathbf{v}\}_{-m} = K_m^2 < \infty.$$

Однозначность решения вытекает из определения и обратимости операторов S. Теорема доказана. □

Теорема 4 показывает, что между пространствами $\mathbf{W}^m$ и $\mathbf{W}^{-m}$ имеется соответствие. Между пространствами $\mathbf{W}^{(m+1)}$ и $\mathbf{W}^m$ также имеется соответствие, что дополняет известное утверждение: *все сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны между собой.*

4. Модельные краевые задачи в сети $\{\mathbf{C}(2k,m)\}_{k,m}$

Пусть область Ω гомеоморфна шару, а $\mathbf{C}(2k,m) = \mathbf{A}^{2k} \oplus \mathbf{W}^m$ — классы в сети пространств Соболева, числа k, m — целые.

4.1. Операторы $\mathcal{N}_d$ и S в пространствах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Если собственные поля $\mathbf{q}_j(\mathbf{x})$ и $\mathbf{q}_j^{\pm}(\mathbf{x})$ градиента дивергенции и ротора известны, то элементы $\mathbf{f}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ и $\mathbf{f}_{\mathbf{V}} \in \mathcal{B} = \mathbf{V}^0$ представляются рядами Фурье:

$$\mathbf{f}_{\mathcal{A}} = \sum_{j=1}^{\infty}(\mathbf{f},\mathbf{q}_j)\mathbf{q}_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{f}_{\mathbf{V}} = \sum_{j=1}^{\infty}\big[(\mathbf{f},\mathbf{q}_j^+)\mathbf{q}_j^+(\mathbf{x}) + (\mathbf{f},\mathbf{q}_j^-)\mathbf{q}_j^-(\mathbf{x})\big],$$

а элементы $\mathbf{f}$ из $\mathbf{L}_2(\Omega)$ — их суммой $\mathbf{f}_{\mathcal{A}} + \mathbf{f}_{\mathbf{V}}$. Причем $\operatorname{rot}\mathbf{f}_{\mathcal{A}} = 0$ и $\operatorname{div}\mathbf{f}_{\mathbf{V}} = 0$, поэтому $\operatorname{div}\mathbf{f} = \operatorname{div}\mathbf{f}_{\mathcal{A}}$, а $\operatorname{rot}\mathbf{f} = \operatorname{rot}\mathbf{f}_{\mathbf{V}}$. Скалярное произведение $(\mathbf{f},\mathbf{g})$ полей $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ из $\mathbf{L}_2(\Omega)$ равно $(\mathbf{f}_{\mathcal{A}},\mathbf{g}_{\mathcal{A}}) + (\mathbf{f}_{\mathbf{V}},\mathbf{g}_{\mathbf{V}})$.

Операторы $\mathcal{N}_d^p$ в $\mathcal{A}$, S^p в $\mathcal{B}$ и обратные при $p = 1, 2, \ldots$ действуют так:

$$\mathcal{N}_d^p\mathbf{f}_{\mathcal{A}} = (-1)^p\sum_{j=1}^{\infty}(\nu_j^{2p})(\mathbf{f},\mathbf{q}_j)\mathbf{q}_j,$$

$$S^p\mathbf{f}_{\mathbf{V}} = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^p\big[(\mathbf{f},\mathbf{q}_j^+)\mathbf{q}_j^+ + (-1)^p(\mathbf{f},\mathbf{q}_j^-)\mathbf{q}_j^-\big],$$

$$\mathcal{N}_d^{-p}\mathbf{f}_{\mathcal{A}} = (-1)^p\sum_{j=1}^{\infty}(\nu_j^{-2p})(\mathbf{f},\mathbf{q}_j)\mathbf{q}_j,$$

$$S^{-p}\mathbf{f}_{\mathbf{V}} = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{-p}\big[(\mathbf{f},\mathbf{q}_j^+)\mathbf{q}_j^+ + (-1)^p(\mathbf{f},\mathbf{q}_j^-)\mathbf{q}_j^-\big].$$

Так как $\mathcal{A}_H = \mathcal{B}_H = \emptyset$, то $\mathcal{A}_\gamma^0 = \mathcal{A}_\gamma(B) = \{\nabla h, h \in H^2(B) : \gamma(\mathbf{n}\cdot\nabla)h = 0\}$, $\mathbf{V}^0 = \{\mathbf{g} \in \mathbf{L}_2(B),\ \mathbf{g} \perp \mathcal{A},\ \operatorname{div}\mathbf{g} = 0,\ \gamma(\mathbf{n}\cdot\mathbf{g}) = 0\}$, и пространства

$$\mathbf{A}^{2k} \equiv \{\mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma, \ldots, (\nabla\operatorname{div})^k\mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma\} \quad \text{и} \quad \mathbf{W}^m \equiv \{\mathbf{g} \in \mathbf{V}^0, \ldots, (\operatorname{rot})^m\mathbf{g} \in \mathbf{V}^0\}$$

при $k \geqslant 1$, $m \geqslant 1$; $\mathbf{A}^0 \equiv \mathcal{A}_\gamma$, $\mathbf{W}^0 \equiv \mathbf{V}^0 \equiv \mathcal{B}$.

Имеют место вложения

$$\cdots \subset \mathbf{A}^{2k} \subset \cdots \subset \mathbf{A}^2 \subset \mathcal{A}_\gamma^0 \subset \mathbf{A}^{-2} \subset \cdots \subset \mathbf{A}^{-2k} \subset \ldots, \tag{4.1}$$

$$\cdots \subset \mathbf{W}^m \subset \cdots \subset \mathbf{W}^1 \subset \mathbf{V}^0 \subset \mathbf{W}^{-1} \subset \cdots \subset \mathbf{W}^{-m} \subset \ldots. \tag{4.2}$$

В шкале пространств (4.1) оператор $\mathcal{N}_d$ действует слева направо, а оператор $\mathcal{N}_d^{-1}$ — справа налево: $\mathcal{N}_d$ отображает $\mathbf{A}^{2k}$ на $\mathbf{A}^{2(k-1)}$, ..., $\mathbf{A}^4$ на $\mathbf{A}^2$, оператор $\mathcal{N}_d^2$ отображает $\mathbf{A}^2$ на пространство $\mathbf{A}^{-2}$, сопряженное с $\mathbf{A}_0^2$, а далее оператор $\mathcal{N}_d$ отображает $\mathbf{A}^{-2}$ в $\mathbf{A}^{-4}$ и так далее.

Рассмотрен также оператор $\mathcal{N}_d + \lambda I$. Доказано, что

– *оператор* $\mathcal{N}_d + \lambda I : \mathbf{A}^{2(k+1)} \to \mathbf{A}^{2k}$ — *фредгольмов*, $k \geqslant 0$ [22, п. 2.10];
– *если* $\lambda \overline{\in} \operatorname{Sp}(\mathcal{N}_d)$, *то оператор* $\mathcal{N}_d + \lambda I$ (*и обратный*) *отображает пространство* $\mathbf{A}^{2(k+1)}$ *на* $\mathbf{A}^{2k}$ (*и обратно*) *взаимно однозначно и непрерывно* [21, Лемма 2, п. 1.7].

Аналогично действуют операторы $S : \mathbf{W}^m \to \mathbf{W}^{m-1}, \ldots, \mathbf{W}^2 \to \mathbf{W}^1$, $S^2 : \mathbf{W}^1 \to \mathbf{W}^{-1} \equiv (\mathbf{W}^1_0)^*$, далее снова $S : \mathbf{W}^{-1} \to \mathbf{W}^{-2} \to \cdots \to \mathbf{W}^{-m}$; операторы S^{-1} действуют в обратную сторону.

Рассмотрен также оператор $S + \lambda I$. Доказано, что

– *оператор* $S + \lambda I : \mathbf{W}^m \to \mathbf{W}^{(m-1)}$ *— фредгольмов,* $m \geqslant 1$;
– *если* $\lambda \overline{\in} \mathrm{Sp}(S)$, *то оператор* $S + \lambda I$ *(и его обратный) отображают пространство* $\mathbf{W}^{(m)}$ *на* $\mathbf{W}^{(m-1)}$ *(и обратно) взаимно однозначно и непрерывно* [21, Лемма 1 п. 1.5].

Прямые суммы пространств $\mathbf{A}^{2k}$ и $\mathbf{W}^m$ мы обозначили как $\mathbf{C}(2k, m)$, они принадлежат $\mathbf{L}_2(\Omega)$, если $k \geqslant 0$, $m \geqslant 0$ — целые.

Оператор $(\mathcal{N}_d^{-1}, I)$ отображает класс $\mathbf{C}(2k, m)$ на $\mathbf{C}(2(k+1), m)$, оператор (I, S^{-1}) — на $\mathbf{C}(2k, m+1)$, а оператор $(\mathcal{N}_d^{-p}, S^{-q})$ — на класс $\mathbf{C}(2(k+p), m+q)$ при p, $q > 0$.

Отметим, что операторы $(\nabla \operatorname{div})^p$ и $(\operatorname{rot})^{2p}$ — аналоги полигармонических операторов Δ^p в классах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, p — натуральное число.

4.2. Модельные краевые задачи в классах $\mathbf{C}(2k, m)$. Рассматриваемые классы $\mathbf{C}(2k, m)$ пространств Соболева принадлежат двухпараметрической сети (прямой сумме шкал (4.1) и (4.2)).

Пространство $\mathbf{A}^{2k}(\Omega) \subset \mathbf{H}^{2k}(\Omega)$ и является проекцией $\mathbf{H}^{2k}$ на $\mathcal{A}$, а пространство $\mathbf{W}^m(\Omega) \subset \mathbf{H}^m(\Omega)$ является проекцией $\mathbf{H}^m$ на $\mathcal{B}$, поэтому класс $\mathbf{C}(2k, 2k)$ совпадает с пространством Соболева $\mathbf{H}^{2k}(\Omega)$. Рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. *Задано поле* $\mathbf{f} \in \mathbf{C}(2k, m) \subset \mathbf{L}_2(\Omega)$. *Найти поле* $\mathbf{u}$ *в* $\mathbf{L}_2(\Omega)$ *такое, что*

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad \gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) = 0.$$

Другими словами, *необходимо найти поле* $\mathbf{u}$ *в* $\mathbf{L}_2(\Omega)$, *для которого*

$$(\mathbf{u}, (\operatorname{rot} + \lambda I)\mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})$$

для любого поля $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^\infty_0(\Omega)$ *и выполняется краевое условие* $\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) = 0$, *если след* $\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})$ *на границе* Ω *существует.*

Задача 2. *Задано поле* $\mathbf{f} \in \mathbf{C}(2k, m) \subset \mathbf{L}_2(\Omega)$. *Найти поле* $\mathbf{w}$ *в* $\mathbf{L}_2(\Omega)$ *такое, что*

$$\nabla \operatorname{div} \mathbf{w} + \lambda \mathbf{w} = \mathbf{f} \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad \gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}) = 0,$$

если след $\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})$ *на границе* Ω *существует.*

Применим метод ортогонального проектирования уравнений этих задач в пространстве $\mathbf{L}_2(\Omega) = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ на подпространства $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

Используя разложение полей $\mathbf{f}$, $\mathbf{u}$ и $\mathbf{w}$ в суммы $\mathbf{f}_\mathcal{A} + \mathbf{f}_\mathbf{V}$, $\mathbf{u}_\mathcal{A} + \mathbf{u}_\mathbf{V}$ и $\mathbf{w}_\mathcal{A} + \mathbf{w}_\mathbf{V}$ и расширения S и $\mathcal{N}_d$ операторов ротор и градиент дивергенции, эти уравнения запишем в виде уравнений-проекций на $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$:

$$\begin{gathered} \lambda \mathbf{u}_\mathcal{A} = \mathbf{f}_\mathcal{A}, \quad (S + \lambda I)\mathbf{u}_\mathbf{V} = \mathbf{f}_\mathbf{V}, \\ (\mathcal{N}_d + \lambda I)\mathbf{w}_\mathcal{A} = \mathbf{f}_\mathcal{A}, \quad \lambda \mathbf{w}_\mathbf{V} = \mathbf{f}_\mathbf{V}, \end{gathered} \tag{4.3}$$

так как $\operatorname{rot} \mathbf{u}_\mathcal{A} = 0$ в $\mathcal{A}$, $\nabla \operatorname{div} \mathbf{w}_\mathbf{V} = 0$ в $\mathcal{B} \equiv \mathbf{V}^0$.

Задача 3. *Задано поле* $\mathbf{f} \in \mathbf{C}(2k, m) \subset \mathbf{L}_2(\Omega)$. *Найти поле* $\mathbf{u}$ *в* $\mathbf{L}_2(\Omega)$ *такое, что*

$$\nabla \mathbf{div} \mathbf{u} + \mathbf{rot} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{в} \quad \Omega, \quad \gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) = 0,$$

если след $\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})$ *на границе* Ω *существует.*

Это уравнение эквивалентно двум уравнениям-проекциям:

$$(\mathcal{N}_d + \lambda I)\mathbf{u}_{\mathcal{A}} = \mathbf{f}_{\mathcal{A}}, \quad (S + \lambda I)\mathbf{u}_{\mathbf{V}} = \mathbf{f}_{\mathbf{V}}. \tag{4.4}$$

Замечание. Если пространство $\mathcal{B}_H(G)$ не пусто и $\lambda \neq 0$, то уравнение

$$(\nabla \operatorname{div} + \operatorname{rot} + \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

распадается на три проекции

$$(\mathcal{N}_d + \lambda I)\mathbf{u}_{\mathcal{A}} = \mathbf{f}_{\mathcal{A}}, \quad (S + \lambda I)\mathbf{u}_{\mathbf{V}} = \mathbf{f}_{\mathbf{V}}, \quad \lambda \mathbf{u}_{B_H} = \mathbf{f}_{B_H}$$

— уравнения второго, первого и нулевого порядковсоответственно.

Доказано, что уравнения $(S + \lambda I)\mathbf{u}_{\mathbf{V}} = \mathbf{f}_{\mathbf{V}}$ и $(\mathcal{N}_d + \lambda I)\mathbf{u}_{\mathcal{A}} = \mathbf{f}_{\mathcal{A}}$ разрешимы по Фредгольму и что при $\lambda \overline{\in} \operatorname{Sp}(\mathcal{N}_d)$ оператор $\mathcal{N}_d + \lambda I$ обратим, соответственно, при $\lambda \overline{\in} \operatorname{Sp}(S)$ оператор $S + \lambda I$ обратим (см. п. 4.1).

Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *При* $\lambda \neq \operatorname{Sp}(S)$ *единственное решение задачи 1 имеет вид*

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathcal{A}} + \mathbf{u}_{\mathbf{V}}, \quad \text{где} \quad \mathbf{u}_{\mathcal{A}} = \lambda^{-1}\mathbf{f}_{\mathcal{A}}, \quad \mathbf{u}_{\mathbf{V}} = (S + \lambda I)^{-1}\mathbf{f}_{\mathbf{V}}.$$

Решение $\mathbf{u} \in \mathbf{C}(2k, m+1)$ *при* $\mathbf{f} \in \mathbf{C}(2k, m)$. *Кроме того,*

$$\mathbf{u} = \lambda^{-1}\mathbf{f}_{\mathcal{A}}, \quad \text{если} \quad \mathbf{f}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A} \quad \text{или} \quad \mathbf{f}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}_\gamma, \quad \text{а} \quad \mathbf{f}_{\mathbf{V}} = 0;$$

$$\mathbf{u} = (S + \lambda I)^{-1}\mathbf{f}_{\mathbf{V}} \in \mathbf{W}^1, \quad \text{если} \quad \mathbf{f} \in \mathcal{B} \perp \mathcal{A}, \quad \text{а} \quad \mathbf{f}_{\mathcal{A}} = 0.$$

При $\mathbf{f} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ *поле* $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega})$ *есть классическое решение задачи.*

Доказательство см. в [21].

В частности, при $\Omega = B$ согласно п. 1.9 и формуле (1.17) имеет место

Следствие 1. *Если область* $\Omega = B$ *есть шар,* $\psi_n(\lambda R) \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, *числа* k, m *целые, а поле* $\mathbf{f} \in \mathbf{A}^{2k}(B) \oplus \mathbf{W}^m(B)$, *то решение задачи 1 существует, единственно и принадлежит классу* $\mathbf{A}^{2k}(B) \oplus \mathbf{W}^{m+1}(B)$.

Отметим также свойство отображения $\operatorname{rot} + \lambda I$:

Лемма 3. *При* $\lambda \overline{\in} \operatorname{Sp}(S)$ *и целых* k, m *операторы* $\operatorname{rot} + \lambda I$ *(и обратный) отображают класс* $\mathbf{C}(2k, m+1)$ *на* $\mathbf{C}(2k, m)$ *взаимно однозначно и непрерывно.*

Следующая теорема аналогична предыдущей. Ввиду соотношений (4.3) ее *доказательство* основано на свойствах оператора $(\mathcal{N}_d + \nu^2 I)$.

Теорема 6. *При* $\nu^2 \neq \operatorname{Sp}(-\mathcal{N}_d)$ *единственное решение задачи 2 имеет вид*

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_{\mathcal{A}} + \mathbf{w}_{\mathbf{V}}, \quad \text{где} \quad \mathbf{w}_{\mathcal{A}} = (\mathcal{N}_d + \nu^2 I)^{-1}\mathbf{f}_{\mathcal{A}}, \quad \mathbf{w}_{\mathbf{V}} = \nu^{-2}\mathbf{f}_{\mathbf{V}}.$$

Решение $\mathbf{w} \in \mathbf{C}(2(k+1), m)$ *при* $\mathbf{f} \in \mathbf{C}(2k, m)$. *Кроме того,*

$$\mathbf{w} = (\mathcal{N}_d + \nu^2 I)^{-1}\mathbf{f}_{\mathcal{A}} \in \mathbf{A}^2(\Omega) \quad \textit{при} \quad \mathbf{f}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}_\gamma, \quad \mathbf{f}_{\mathbf{V}} = 0;$$

$$\mathbf{w} = \nu^{-2}\mathbf{f}_{\mathbf{V}} \quad \textit{при} \quad \mathbf{f}_{\mathcal{A}} = 0, \quad \mathbf{f}_{\mathbf{V}} \in \mathcal{B}.$$

При $\mathbf{f} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ *поле* $\mathbf{w} \in \mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega})$ *есть классическое решение задачи.*

В частности, при $\Omega = B$ согласно п. 1.10 имеет место

Следствие 2. *Если область* $\Omega = B$ *есть шар,* $\psi_n'(\nu R) \neq 0$ $\forall n \geqslant 0$, k, m *целые, а поле* $\mathbf{f} \in \mathbf{A}^{2k}(B) \oplus \mathbf{W}^m(B)$, *то решение задачи* 2 *при* $\lambda = \nu^2$ *существует, единственно и принадлежит классу* $\mathbf{A}^{2(k+1)}(B) \oplus \mathbf{W}^m(B)$.

Отметим также свойство отображения $\nabla\,\mathrm{div} + \nu^2 I$.

Лемма 4. *При* $\nu^2 \neq \mathrm{Sp}(-\mathcal{N}_d)$, *целых* k, m *оператор* $\nabla\,\mathrm{div} + \nu^2 I$ *отображает* $\mathbf{C}(2(k+1), m)$ *на класс* $\mathbf{C}(2k, m)$ *взаимно однозначно и непрерывно.*

Эти утверждения говорят о соответствии пространств и операторов.
Согласно формуле (4.4), имеет место следующее утверждение.

Теорема 7. *При* $\lambda \neq \mathrm{Sp}(-\mathcal{N}_d) \cup \mathrm{Sp}(S)$ *единственное решение задачи* 3 *имеет вид*

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathcal{A}} + \mathbf{u}_{\mathbf{V}}, \quad \textit{где} \quad \mathbf{u}_{\mathcal{A}} = (\mathcal{N}_d + \lambda I)^{-1}\mathbf{f}_{\mathcal{A}}, \quad \mathbf{u}_{\mathbf{V}} = (S + \lambda I)^{-1}\mathbf{f}_{\mathbf{V}}.$$

Решение $\mathbf{u} \in \mathbf{C}(2(k+1), m+1)$ *при* $\mathbf{f} \in \mathbf{C}(2k, m)$, *где* k, m *целые.*

4.3. Оператор Стокса в пространствах $\mathbf{C}(2k, m)$. Задача Стокса состоит в определении поля $\mathbf{v}$ и функции p в области Ω из условий

$$\nu\Delta\mathbf{v} - \nabla p = \mathbf{f}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v}|_\omega = \mathbf{g}$$

при заданных полях $\mathbf{f}$ в Ω и $\mathbf{g}$ на ее границе ω [9].

Собственные поля $\mathbf{w}_k$ оператора Стокса являются решениями задач

$$\nu\Delta\mathbf{w}_k - \nabla p_k = \mu_k\mathbf{w}_k, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{w}_k = 0, \quad \mathbf{w}_k|_\omega = 0.$$

Мы рассмотрим оператор Стокса с другими краевыми условиями:

$$\nu\Delta\mathbf{u} - \nabla p = \mathbf{f}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|_\omega = \mathbf{n}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{u}|_\omega = 0 \tag{4.5}$$

в ортогональных подпространствах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в $\mathbf{L}_2(\Omega)$.

По определению $\nabla p \in \mathcal{A}$ при $p \in H^1(\Omega)$, поле $\mathbf{u} \in \mathcal{B}$, а оператор

$$\Delta\mathbf{u} = -(\mathrm{rot})^2\mathbf{u}$$

на соленоидальных полях $\mathbf{u}$.

Используя разложение $\mathbf{f}_{\mathcal{A}} + \mathbf{f}_{\mathcal{B}}$ поля $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(\Omega)$ и самосопряженное расширение S оператора ротор, первое соотношение в (4.5) запишем в виде двух проекций:

$$-\nabla p = \mathbf{f}_{\mathcal{A}}, \quad -\nu S^2\mathbf{u} = \mathbf{f}_{\mathcal{B}}.$$

Так как $\mathbf{f}_{\mathcal{A}} = \nabla h$, где $h \in H^1(\Omega)$, и оператор S обратим, из этих соотношений имеем

$$p = -h + c, \quad \mathbf{u} = -\nu^{-1} S^{-2} \mathbf{f}_{\mathcal{B}}, \quad c = \mathrm{const}. \tag{4.6}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 8. *Решение задачи* (4.5) *имеет вид* (4.6).
В частности,

$$p = -h + c,\ \mathbf{u} = 0, \quad \textit{если} \ \ \mathbf{f} = \mathbf{f}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A} \ \ \textit{или} \ \ \mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma, \quad \textit{а} \ \ \mathbf{f}_{\mathcal{B}} = 0;$$

$$p = c,\ \mathbf{u} = -\nu^{-1} S^{-2} \mathbf{f}_{\mathcal{B}}, \quad \textit{если} \ \ \mathbf{f} \in \mathcal{B} \perp \mathcal{A}, \quad \textit{а} \ \ \mathbf{f}_{\mathcal{A}} = 0,\ \mathbf{u} \in \mathbf{W}^2;$$

$$(\nabla p, \mathbf{u}) \in (\mathbf{A}^{2k}, \mathbf{W}^{m+2}), \quad \textit{если} \ \ (\mathbf{f}_{\mathcal{A}}, \mathbf{f}_{\mathcal{B}}) \in (\mathbf{A}^{2k}, \mathbf{W}^m) = \mathbf{C}(2k, m),\ \ k, m > 0.$$

Если же $\mathbf{f} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$, *то пара* $(p, \mathbf{u}) \in \mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega})$ *есть классическое решение задачи.*

Собственные поля $\mathbf{w}_k$ оператора (4.5) удовлетворяют уравнениям

$$\nabla p_k = 0, \quad -\nu S^2 \mathbf{w}_k = \mu_k \mathbf{w}_k.$$

Следовательно, $p_k = \mathrm{const}$. Оператор S есть расширение оператора ротора. Собственные поля $\mathbf{q}_j^\pm$ ротора образуют базис в $\mathbf{V}^0(G)$, их нормы $\|\mathbf{q}_j^\pm\| = 1$, и

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{q}_j^\pm = \pm \lambda_j \mathbf{q}_j^\pm, \quad \gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}_j^\pm = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots.$$

Поля $\mathbf{q}_j^\pm$ являются также собственными полями оператора $-\nu S^2$, так как

$$\mathrm{rot}^2\, \mathbf{q}_j^\pm = \pm \lambda_j\, \mathrm{rot}\, \mathbf{q}_j^\pm = \lambda_j^2 \mathbf{q}_j^\pm, \quad \gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}_j^\pm = \gamma \mathbf{n} \cdot \mathrm{rot}\, \mathbf{q}_j^\pm = 0,$$

$$-\nu S^2 \mathbf{q}_j^\pm = -\nu \lambda_j^2 \mathbf{q}_j^\pm, \quad \gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}_j^\pm = \gamma \mathbf{n} \cdot \mathrm{rot}\, \mathbf{q}_j^\pm = 0,$$

его собственные значения $\mu_j = -\nu \lambda_j^2$ определяются собственными значениями ротора λ_j и параметром вязкости ν.

Конкурирующие интересы. Я заявляю, что у меня нет конкурирующих интересов в отношении данной статьи.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за представление окончательной рукописи в печатном виде. Я одобрил окончательный вариант рукописи.

Благодарности. Я выражаю благодарность академику РАН профессору В. П. Маслову, профессору д. ф.-м. н. С. Ю. Доброхотову, профессору д. ф.-м. н. М. Д. Рамазанову и доценту к. ф.-м. н. Р. Н. Гарифуллину за поддержку при написании данной статьи, а также к. ф.-м. н. М. Н. Саушкину, чья редакторская правка способствовала улучшению содержания рукописи.

Библиографический список

1. Соболев С. Л. *Введение в теорию кубатурных формул.* М.: Наука, 1974. 810 с.
2. Михайлов В. П. *Дифференциальные уравнения в частных производных.* М.: Наука, 1975. 392 с.
3. Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Пространства Соболева / *Избранные главы анализа и высшей алгебры.* Л.: Ленингр. ун-т, 1981. 129–196 с.
4. Weyl H. The method of orthogonal projection in potential theory // *Duke Math. J.*, 1940. vol. 7, no. 1. pp. 411–444. DOI: https://doi.org/10.1215/S0012-7094-40-00725-6.
5. Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1954. Т. 18, № 1. С. 3–50.
6. Yoshida Z., Giga Y. Remarks on spectra of operator rot // *Math. Z.*, 1990. vol. 204. pp. 235–245. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02570870.
7. Borchers W., Sohr H. On the equations $\operatorname{div} u = f$ and $\operatorname{rot} v = g$ with zero boundary conditions // *Hokkaido Math. J.*, 1990. vol. 19, no. 1. pp. 67–87. DOI: https://doi.org/10.14492/hokmj/1381517172.
8. Сакс Р. С. Собственные функции операторов ротора, градиента дивергенции и Стокса. Приложения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. № 2(31). С. 131–146. EDN: RAVQHN. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1166.
9. Ладыженская О. А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* М.: Наука, 1970. 288 с.
10. Fridrichs K. Differertial form on Riemannian manifolds // *Comm. Pure Appl. Math.*, 1955. vol. 8, no. 4. pp. 551–590. DOI: https://doi.org/10.1002/cpa.3160080408.
11. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. *Теоретическая гидромеханика. Ч.* 2. М.: Физматгиз, 1963. 728 с.
12. Быховский Э. Б., Смирнов Н. В. Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа / *Математические вопросы гидродинамики и магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости*: Сборник работ / Тр. МИАН СССР, Т. 59. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1960. С. 5–36.
13. Morrey C. B. Multiple Integrals in the Calculus of Variations / Classics in Mathematics. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1966. xi+506 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-69952-1.
14. Шварц Л. *Комплексные многообразия. Эллиптические уравнения с частными производными.* М.: Мир, 1964. 212 с.
15. Волевич Л. Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем // *Матем. сб.*, 1965. Т. 68(110), № 3. С. 373–416.
16. Солонников В. А. Переопределенные эллиптические краевые задачи / *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 5* / Зап. научн. сем. ЛОМИ, Т. 21. Л.: Изд-во «Наука», Ленинград. отд., 1971. С. 112–158.
17. Сакс Р. С. *Краевые задачи для эллиптических систем дифференциальных уравнений.* Новосибирск: НГУ, 1975. 164 с.
18. Temam R. I. *Navier–Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis.* Amsterdam: North-Holland, 1984. DOI: https://doi.org/10.1090/chel/343.
19. Зорич В. А. *Математический анализ. Часть II.* М.: Наука, 1984. 640 с.
20. Вайнберг Б. Р., Грушин В. В. О равномерно неэллиптических задачах. I // *Матем. сб.*, 1967. Т. 72(114), № 4. С. 602–636.
21. Сакс Р. С. Пространства Соболева и краевые задачи для операторов ротор и градиент дивергенции // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 2. С. 249–274. EDN: FTOOME. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1759.
22. Сакс Р. С. Оператор градиент дивергенции и пространства Соболева // *Динамические системы*, 2018. Т. 8, № 4. С. 385–407. EDN: YWAJED.
23. Владимиров В. С. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1988. 512 с.

24. Сакс Р. С. Решение спектральных задач для операторов ротора и Стокса // *Уфимск. матем. журн.*, 2013. Т. 5, № 2. С. 63–81. EDN: QBEBPH.
25. Woltjer L. A theorem on force-free magnetic fields // *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 1958. vol. 44. pp. 489-491. DOI: https://doi.org/10.1073/pnas.44.6.489.
26. Cantarella J., DeTurck D., Gluck H., Teytel M. The spectrum of the curl operator on spherically symmetric domains // *Physics of Plasmas*, 2000. vol. 7. pp. 2766–2775. DOI: https://doi.org/10.1063/1.874127.
27. Woltjer L. The Crab Nebula // *Bull. Astron. Inst. Netherlands*, 1958. vol. 14. pp. 39–80.
28. Исламов Г. Г. Об одном классе векторных полей // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 4. С. 680–696. EDN: VQDCOD. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1382.
29. Chandrasekhar S., Kendall P. C. On force-free magnetic fields // *Astrophys. J.*, 1957. vol. 126. pp. 457–460. DOI: https://doi.org/10.1086/146413.
30. Montgomery D., Turner L., Vahala G. Three-dimentional magnetohydrodyamic turbulence in cylindrical geometry // *Phys. Fluids.*, 1978. vol. 21, no. 5. pp. 757–764. DOI: https://doi.org/10.1063/1.862295.
31. Saks R. S., Islamov G. G. Eigenfunctions of the curl operator in $\mathbf{L}_2(G)$ / *Международная конференция “Бицадзе 100”. Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных*: Тезисы докладов (Москва, МГУ, 16–18 июня 2016). М.: МГУ, 2016. С. 21–23.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 1, pp. 23–49
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1961

MSC: 35P05, 35P15, 47A10

A set of Sobolev spaces and boundary-value problems for the curl and gradient-of-divergence operators

R. S. Saks

Institute of Mathematics with Computing Centre,
Ufa Science Centre, Russian Academy of Sciences,
112, Chernyshevskiy st., Ufa, Russia, 450077.

Abstract

We will consider the scale of the Sobolev spaces $\mathbf{H}^m(G)$ vector fields in a bounded domain G of $\mathbb{R}^3$ with a smooth boundary of Γ. The gradient-of-divergence and the rotor-of-rotor operators ($\nabla \operatorname{div}$ and rot^2) and their powers are analogous to the scalar operator Δ^m in $\mathbb{R}^3$. They generate spaces $\mathbf{A}^{2k}(G)$ and $\mathbf{W}^m(G)$ potential and vortex fields; where the numbers k, $m > 0$ are integers.

It is proven that $\mathbf{A}^{2k}(G)$ and $\mathbf{W}^m(G)$ are projections of Sobolev spaces $\mathbf{H}^{2k}(G)$ and $\mathbf{H}^m(G)$ in subspaces $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ in $\mathbf{L}_2(G)$. Their direct sums $\mathbf{A}^{2k}(G) \oplus \mathbf{W}^m(G)$ form a network of spaces. Its elements are classes $\mathbf{C}(2k, m) \equiv \mathbf{A}^{2k} \oplus \mathbf{W}^m$.

We consider at the properties of the spaces $\mathbf{A}^{-m}$ and $\mathbf{W}^{-m}$ and proved their compliance with the spaces $\mathbf{A}^m$ and $\mathbf{W}^m$. We also consider at the direct sums of $\mathbf{A}^k(G) \oplus \mathbf{W}^m(G)$ for any integer numbers k and $m > 0$. This completes the construction of the $\{\mathbf{C}(k, m)\}_{k,m}$ network.

In addition, an orthonormal basis has been constructed in the space $\mathbf{L}_2(G)$. It consists of the orthogonal subspace $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ bases. Its elements are eigenfields of the operators $\nabla \operatorname{div}$ and rot. The proof of their smoothness is an important stage in the theory developed.

The model boundary value problems for the operators $\operatorname{rot} + \lambda I$, $\nabla \operatorname{div} + \lambda I$, their sum, and also for the Stokes operator have been investigated in the network $\{\mathbf{C}(k, m)\}_{k,m}$. Solvability conditions are obtained for the model problems considered.

Keywords: Sobolev spaces, gradient operator, divergence operator, curl operator, elliptic boundary value problems, spectral problems.

Received: 11th October, 2022 / Revised: 9th February, 2023 /
Accepted: 13th March, 2023 / First online: 24th March, 2023

Differential Equations and Mathematical Physics
Research Article

Please cite this article in press as:
Saks R. S. A set of Sobolev spaces and boundary-value problems for the curl and gradient-of-divergence operators, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 1, pp. 23–49. EDN: TXBBDP. DOI: 10.14498/vsgtu1961 (In Russian).

Author's Details:
Romen S. Saks Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; e-mail: romen-saks@yandex.ru

Competing interests. I declare that I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Acknowledgments. The author thanks the Academician of RAS V. P. Maslov, Professor S. Yu. Dobrokhotov, Professor M. D. Ramazanov and Associate Professor R. N. Garifullin for their support in writing this article. The author also thanks M. N. Saushkin, whose editorial help have been invaluable.

References

1. Sobolev S. L. *Cubature Formulas and Modern Analysis: An introduction*. Montreux, Gordon and Breach Science Publ., 1992, xvi+379 pp.
2. Mikhailov V. P. *Partial Differential Equations*. Moscow, Mir, 1978, 397 pp.
3. Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N. Sobolev spaces, In: *Izbrannye glavy analiza i vysshei algebry* [Selected Chapters of Analysis and Higher Algebra]. Leningrad, Leningrad State Univ., 1981, 129–196 pp. (In Russian)
4. Weyl H. The method of orthogonal projection in potential theory, *Duke Math. J.*, 1940, vol. 7, no. 1, pp. 411–444. DOI: https://doi.org/10.1215/S0012-7094-40-00725-6.
5. Sobolev S. L. On a new problem of mathematical physics, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1954, vol. 18, no. 1, pp. 3–50 (In Russian).
6. Yoshida Z., Giga Y. Remarks on spectra of operator rot, *Math. Z.*, 1990, vol. 204, pp. 235–245. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02570870.
7. Borchers W., Sohr H. On the equations $\operatorname{div} u = f$ and $\operatorname{rot} v = g$ with zero boundary conditions, *Hokkaido Math. J.*, 1990, vol. 19, no. 1, pp. 67–87. DOI: https://doi.org/10.14492/hokmj/1381517172.
8. R. S. Saks The eigenfunctions of curl, gradient of divergence and Stokes operators. Applications, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2013, no. 2(31), pp. 131–146 (In Russian). EDN: RAVQHN. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1166.
9. Ladyzhenskaya O. A. *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flows*. New York, Gordon and Breach, 1969, xviii+224 pp.
10. Fridrichs K. Differertial form on Riemannian manifolds, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1955, vol. 8, no. 4, pp. 551–590. DOI: https://doi.org/10.1002/cpa.3160080408.
11. Kochin N. E., Kibel' I. A., Roze N.V. *Teoreticheskaia gidromekhanika*. Ch. 2 [Theoretical Hydromechanics, Vol. 2]. Moscow, Fizmatgiz, 1963, 728 pp. (In Russian)
12. Bykhovskii É. B., Smirnov N. V. Orthogonal decomposition of the space of vector functions square-summable on a given domain, and the operators of vector analysis, In: *Mathematical problems of hydrodynamics and magnetohydrodynamics for a viscous incompressible fluid*, Collected papers, Trudy Mat. Inst. Steklov., 59. Moscow–Leningrad, Acad. Sci. USSR, 1960, pp. 5–36 (In Russian).
13. Morrey C. B. Multiple Integrals in the Calculus of Variations, Classics in Mathematics. Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1966, xi+506 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-69952-1.
14. Schwartz L. *Kompleksnye mnogoobraziia. Ellipticheskie uravneniia s chastnymi proizvodnymi* [Complex Analytic Manifolds. Elliptic Partial Differential Equations]. Moscow, Mir, 1964, 212 pp. (In Russian)
15. Volevich L. R. Solubility of boundary value problems for general elliptic systems, *Mat. Sb. (N.S.)*, 1965, vol. 68(110), no. 3, pp. 373–416 (In Russian).
16. Solonnikov V. A. Overdetermined elliptic boundary value problems, In: *Boundary-value problems of mathematical physics and related problems of function theory. Part 5*, Zap. Nauchn. Sem. LOMI, 21. Leningrad, "Nauka", Leningrad. Otdel., 1971, pp. 112–158 (In Russian).

17. Saks R. S. *Boundary-value problems for elliptic systems of differential equations*. Novosibirsk, Novosibirsk State Univ., 1975, 162 pp. (In Russian)
18. Temam R. I. *Navier–Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis*. Amsterdam, North-Holland, 1984. DOI: https://doi.org/10.1090/chel/343.
19. Zorich V. A. *Mathematical analysis II*. Berlin, Springer, 2016, xx+720 pp.
20. Vainberg B. R., Grushin V. V. Uniformly nonelliptic problems. I, *Math. USSR-Sb.*, 1967, vol. 1, no. 4, pp. 543–568. DOI: https://doi.org/10.1070/SM1967v001n04ABEH001999.
21. Saks R. S. Sobolev spaces and boundary-value problems for the curl and gradient-of-divergence operators, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 2, pp. 249–274 (In Russian). EDN: FTOOME. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1759.
22. Saks R. S. Operator ∇ div and Sobolev spaces, *Dinamicheskie Sistemy*, 2018, vol. 8, no. 4, pp. 385–407 (In Russian). EDN: YWAJED.
23. Vladimirov V. S. *Equations of Mathematical Physics*. New York, Marcel Dekker, 1971.
24. Saks R. S. Solving of spectral problems for curl and Stokes operators, *Ufa Math. J.*, 2013, vol. 5, no. 2, pp. 63–81. DOI: https://doi.org/10.13108/2013-5-2-63.
25. Woltjer L. A theorem on force-free magnetic fields, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 1958, vol. 44, pp. 489-491. DOI: https://doi.org/10.1073/pnas.44.6.489.
26. Cantarella J., DeTurck D., Gluck H., Teytel M. The spectrum of the curl operator on spherically symmetric domains, *Physics of Plasmas*, 2000, vol. 7, pp. 2766–2775. DOI: https://doi.org/10.1063/1.874127.
27. Woltjer L. The Crab Nebula, *Bull. Astron. Inst. Netherlands*, 1958, vol. 14, pp. 39–80.
28. Islamov G. G. On a class of vector fields, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 4, pp. 680–696 (In Russian). EDN: VQDCOD. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1382.
29. Chandrasekhar S., Kendall P. C. On force-free magnetic fields, *Astrophys. J.*, 1957, vol. 126, pp. 457–460. DOI: https://doi.org/10.1086/146413.
30. Montgomery D., Turner L., Vahala G. Three-dimentional magnetohydrodyamic turbulence in cylindrical geometry, *Phys. Fluids.*, 1978, vol. 21, no. 5, pp. 757–764. DOI: https://doi.org/10.1063/1.862295.
31. Saks R. S., Islamov G. G. Eigenfunctions of the curl operator in $\mathbf{L}_2(G)$, In: *Actual Problems in Theory of Partial Differential Equations dedicated to the centenary of Andrey V. Bitzadze*, Abstracts (Russia, 16–18 June, 2016). Moscow, Moscow State Univ., 2016, pp. 21–23.