Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 26, № 4. С. 607–629
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1942
EDN: AUKCBX

УДК 519.642.2

# Краевые задачи для уравнения соболевского типа дробного порядка с эффектом памяти

*М. Х. Бештоков*

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Россия, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 а.

**Аннотация**

Изучены краевые задачи для одномерного интегро-дифференциального уравнения соболевского типа с граничными условиями первого и третьего родов с двумя операторами дробного дифференцирования $\alpha$ и $\beta$ разных порядков. Построены разностные схемы порядка аппроксимации $O(h^2+\tau^2)$ при $\alpha=\beta$ и $O(h^2+\tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}})$ при $\alpha\neq\beta$. С помощью метода энергетических неравенств получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках, откуда следуют существование, единственность, устойчивость, а также сходимость решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку аппроксимации разностной схемы. Проведены численные эксперименты, иллюстрирующие полученные в работе результаты.

**Ключевые слова:** уравнение соболевского типа, дробная производная, эффект памяти, разностные схемы, априорная оценка, устойчивость и сходимость.

Получение: 15 июля 2022 г. / Исправление: 19 ноября 2022 г. / Принятие: 16 декабря 2022 г. / Публикация онлайн: 29 декабря 2022 г.

---

**Дифференциальные уравнения и математическая физика**
**Научная статья**



**Образец для цитирования**
Бештоков М. Х. Краевые задачи для уравнения соболевского типа дробного порядка с эффектом памяти // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 4. С. 607–629. EDN: AUKCBX. DOI: 10.14498/vsgtu1942.

**Сведения об авторе**
*Мурат Хамидбиевич Бештоков* https://orcid.org/0000-0003-2968-9211
кандидат физико-математических наук, доцент; ведущий научный сотрудник; отд. вычислительных методов; e-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

**Введение.** Среди неклассических уравнений математической физики [1] обширную область составляют псевдопараболические уравнения [2]

$$Lu_t = Mu.$$

Уравнения такого вида известны еще как вырожденные уравнения [3], уравнения соболевского типа [4], уравнения, не разрешенные относительно старшей производной [5] и даже уравнения не типа Коши—Ковалевской [6, 7]. Систематическое исследование уравнений такого рода началось с середины прошлого века в работах С. Л. Соболева. Термин «уравнения соболевского типа» ввел в обиход Р. Е. Шоуолтер (R. E. Showalter) [8, 9]. В работе [10] рассматривается линейное уравнение более общего вида

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u,$$

моделирующее динамику давления жидкости, фильтрующейся в трещиновато-пористой среде, которое является моделью процесса влагопереноса в почве [11–13] и процесса теплопроводности в среде с двумя температурами [14].

При решении многих задач физики, механики, биологии часто встречаются среды и системы, которые хорошо интерпретируются как фракталы, примерами последних могут служить сильно пористые среды, к каковым, например, можно отнести почвогрунт. Решение различных задач для таких сред приводит к краевым задачам для дифференциальных уравнений с дробной производной. Дифференциальные уравнения с частными производными дробного порядка являются обобщением уравнений с частными производными целочисленного порядка и вызывают большой теоретический и практический интерес. Так, в работе [15] предложены и исследованы математические модели водного режима в почвогрунтах с фрактальной структурой. В основе этих моделей лежат уравнения соболевского типа с дробной по времени производной.

В настоящей работе изучены краевые задачи для одномерного интегро-дифференциального уравнения соболевского типа с двумя операторами дробного дифференцирования $\alpha$ и $\beta$ разных порядков и краевыми условиями первого и третьего родов. Построены разностные схемы порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$ при $\alpha = \beta$ и $O(h^2 + \tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}})$ при $\alpha \neq \beta$. С помощью метода энергетических неравенств получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках, откуда следуют единственность, устойчивость, а также сходимость решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку аппроксимации разностной схемы.

Численным методам решения краевых задач для различных уравнений дробного порядка посвящены работы [16–21]. В работах [16–18] получены результаты, позволяющие, как и в классическом случае ($\alpha = 1$), применять метод энергетических неравенств для нахождения априорных оценок краевых задач для уравнения дробного порядка в дифференциальной и разностной трактовках. В работах [19, 20] изучаются краевые задачи для различных нагруженных дифференциальных уравнений целочисленного и дробного порядков.

Настоящая работа является продолжением серии работ автора в этом направлении [18–22].

**1. Постановка задачи.** В замкнутом прямоугольнике

$$\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$$

рассмотрим следующую задачу для уравнения соболевского типа с эффектом памяти

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x}\Big(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + \partial_{0t}^{\beta}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\eta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - \\ - q(x,t)u(x,t) + \int_0^t \rho(x,t,\tau)u(x,\tau)d\tau + f(x,t), \quad 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T, \quad (1)$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad (2)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad (3)$$

где

$$\begin{gathered} 0 < c_0 \leqslant k(x,t),\ \eta(x) \leqslant c_1; \\ |q(x,t)|,\ |r(x,t)|,\ |r_x(x,t)|,\ |k_x(x,t)|,\ |\rho(x,t,\tau)| \leqslant c_2,\ 0 \leqslant \tau \leqslant t, \end{gathered} \quad (4)$$

$$\partial_{0t}^{\gamma} u = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t \frac{u_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\gamma} d\tau$$

— дробная производная в смысле Герасимова—Капуто [23, 24] порядка $\gamma$, $0 < \gamma < 1$.

В дальнейшем будем предполагать, что задача (1)–(3) имеет единственное решение, обладающее нужными производными. Будем также считать, что коэффициенты уравнения и граничных условий удовлетворяют необходимым условиям гладкости, обеспечивающим нужный порядок аппроксимации разностной схемы.

Обозначим через $M_1$, $M_2$, ... положительные константы, зависящие только от входных данных исходной задачи.

**2. Априорная оценка в дифференциальной форме.**

Теорема 1. *Если*

$$k(x,t) \in C^{1,0}(Q_T),\ \eta(x) \in C^1[0,l],\ r(x,t),\ q(x,t),\ \rho(x,t),\ f(x,t) \in C(Q_T),$$

$$u(x,t) \in C^{2,0}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T),\ \partial_{0t}^{\alpha} u(x,t) \in C(Q_T),\ \partial_{0t}^{\alpha} u_{xx}(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$$

*и выполнены условия* (4), *то для решения задачи* (1)–(3) *справедливы следующие априорные оценки:*

1) *в случае, когда* $\alpha > \beta$:

$$\|u\|_1^2 \leqslant M_1(D_{0t}^{-\alpha}\|f\|_0^2 + \|u_0(x)\|_0^2),$$

*где* $\|u\|_1^2 = \|u\|_0^2 + D_{0t}^{-(\alpha-\beta)}\|u_x\|_0^2$;

2) *в случае, когда* $\alpha = \beta$:

$$\|u\|_2^2 \leqslant M_2(D_{0t}^{-\alpha}\|f\|_0^2 + \|u_0(x)\|_0^2 + \|u_0'(x)\|_0^2),$$

*где* $\|u\|_2^2 = \|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2$;

3) *в случае, когда $\alpha < \beta$:*

$$\|u\|_3^2 \leqslant M_3(D_{0t}^{-\beta}\|f\|_0^2 + \|u_0'(x)\|_0^2),$$

*где* $\|u\|_3^2 = \|u_x\|_0^2 + D_{0t}^{-(\beta-\alpha)}\|u\|_0^2$.

При доказательстве теоремы 1 будут использованы следующие леммы.

Лемма 1 [16]. *Для любой абсолютно непрерывной на $[0,T]$ функции $v(t)$ справедливо неравенство*

$$v(t)\partial_{0t}^{\alpha}v(t) \geqslant \frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}v^2(t), \quad 0<\alpha<1.$$

Лемма 2 [16]. *Пусть неотрицательная абсолютно непрерывная функция $y(t)$ удовлетворяет для почти всех $t$ из $[0,T]$ неравенству*

$$\partial_{0t}^{\alpha}y(t) \leqslant c_1y(t) + c_2(t), \quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1,$$

*где $c_1>0$, $c_2(t)$ — суммируемая на $[0,T]$ неотрицательная функция. Тогда*

$$y(t) \leqslant y(0)E_\alpha(c_1t^\alpha) + \Gamma(\alpha)E_{\alpha,\alpha}(c_1t^\alpha)D_{0t}^{-\alpha}c_2(t),$$

*где $E_\alpha(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+1)}$, $E_{\alpha,\mu}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\mu)}$ — функции Миттаг–Леффлера.*

*Доказательство теоремы 1.* Для получения априорных оценок решения задачи (1)–(3) в дифференциальной форме воспользуемся методом энергетических неравенств. Введем для этого скалярное произведение и норму в виде

$$(u,v) = \int_0^l uv\,dx, \quad (u,u) = \|u\|_0^2,$$

где $u$, $v$ — заданные на $[0,l]$ функции.

Умножим теперь уравнение (1) скалярно на $u$:

$$(\partial_{0t}^{\alpha}u,u) = \big((ku_x)_x,u\big) + \big(\partial_{0t}^{\beta}(\eta(x)u_x)_x,u\big) + \big(ru_x(x,t),u\big) - \\ - \big(q(x,t)u,u\big) + \Big(\int_0^t \rho(x,t,\tau)u(x,\tau)d\tau,u\Big) + \big(f(x,t),u\big). \quad (5)$$

Входящие в тождество (5) интегралы преобразуем и оценим, пользуясь неравенством Коши с $\varepsilon$ [16], [26, с. 100] и леммой 1:

$$(\partial_{0t}^{\alpha}u,u) \geqslant \frac{1}{2}\big(1,\partial_{0t}^{\alpha}u^2\big) = \frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2; \quad (6)$$

$$\big((ku_x)_x,u\big) = \int_0^l u(ku_x)_x dx = uku_x\Big|_0^l - \int_0^l ku_x^2dx; \quad (7)$$

$$\left(\partial_{0t}^{\beta}(\eta u_x)_x, u\right) = \int_0^l u\partial_{0t}^{\beta}(\eta u_x)_x dx = u\partial_{0t}^{\beta}(\eta u_x)\Big|_0^l - \int_0^l \eta(x)u_x\partial_{0t}^{\beta}u_x dx \leqslant$$

$$\leqslant u\partial_{0t}^{\beta}(\eta u_x)\Big|_0^l - \frac{1}{2}\int_0^l \eta\partial_{0t}^{\beta}(u_x)^2 dx; \quad (8)$$

$$\left(ru_x, u\right) = \int_0^l ruu_x dx \leqslant \frac{c_2^2}{4\varepsilon}\int_0^l u^2 dx + \varepsilon\int_0^l u_x^2 dx \leqslant M_4(\varepsilon)\|u\|_0^2 + \varepsilon\|u_x\|_0^2; \quad (9)$$

$$-\left(q(x,t)u, u\right) \leqslant c_2\|u\|_0^2; \quad (10)$$

$$\left(\int_0^t \rho(x,t,\tau)u(x,\tau)d\tau, u\right) = \int_0^l u\int_0^t \rho(x,t,\tau)u(x,\tau)d\tau dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\|u\|_0^2 + \left(\frac{1}{2}, \left(\int_0^t \rho(x,t,\tau)u(x,\tau)d\tau\right)^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\|u\|_0^2 + \left(\frac{1}{2}, \int_0^t \rho^2(x,t,\tau)d\tau\int_0^t u^2(x,\tau)d\tau\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\|u\|_0^2 + M_5\int_0^t \|u\|_0^2 d\tau; \quad (11)$$

$$(f, u) = \int_0^l fudx \leqslant \frac{1}{2}\|u\|_0^2 + \frac{1}{2}\|f\|_0^2. \quad (12)$$

Учитывая преобразования и неравенства (6)–(12), из (5) с учетом (2) находим

$$\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2 + \frac{1}{2}\partial_{0t}^{\beta}\int_0^l \eta(u_x)^2 dx + c_0\|u_x\|_0^2 \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\|u_x\|_0^2 + M_6(\varepsilon)\|u\|_0^2 + M_7\int_0^t \|u\|_0^2 d\tau + \frac{1}{2}\|f\|_0^2. \quad (13)$$

Выбирая $\varepsilon = c_0/2$, из (13) получаем

$$\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2 + \partial_{0t}^{\beta}\int_0^l \eta(u_x)^2 dx + \|u_x\|_0^2 \leqslant M_8\|u\|_0^2 + M_9\int_0^t \|u\|_0^2 d\tau + M_{10}\|f\|_0^2. \quad (14)$$

1. Рассмотрим случай, когда $\alpha > \beta$. Применяя к обеим частям неравенства (14) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, получаем

$$\|u\|_0^2 + D_{0t}^{-(\alpha-\beta)}\|u_x\|_0^2 \leqslant M_{11}D_{0t}^{-\alpha}\|u\|_0^2 + M_{12}D_{0t}^{-\alpha}\int_0^t \|u\|_0^2 d\tau +$$

$$+ M_{13}(D_{0t}^{-\alpha}\|f\|_0^2 + \|u_0(x)\|_0^2). \quad (15)$$

Преобразуем второе слагаемое в правой части (15) следующим образом:

$$D_{0t}^{-\alpha}\int_0^t \|u\|_0^2 d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\int_0^\tau \|u\|_0^2 ds =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \|u\|_0^2 ds \int_s^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \|u\|_0^2 \Big( -\frac{(t-\tau)^\alpha}{\alpha} \Big|_s^t \Big) ds =$$
$$= \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^\alpha \|u\|_0^2 ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (t-\tau)^\alpha \|u\|_0^2 d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{(t-\tau)\|u\|_0^2 d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \leqslant \frac{T}{\alpha} D_{0t}^{-\alpha} \|u\|_0^2.$$

Итак, получаем

$$D_{0t}^{-\alpha} \int_0^t \|u\|_0^2 d\tau \leqslant \frac{T}{\alpha} D_{0t}^{-\alpha} \|u\|_0^2. \qquad (16)$$

Учитывая преобразование (16), из (15) получаем

$$\|u\|_0^2 + D_{0t}^{-(\alpha-\beta)} \|u_x\|_0^2 \leqslant M_{14} D_{0t}^{-\alpha} \|u\|_0^2 + M_{13}(D_{0t}^{-\alpha} \|f\|_0^2 + \|u_0(x)\|_0^2). \qquad (17)$$

На основании леммы 2 из (17) находим априорную оценку

$$\|u\|_1^2 \leqslant M_{15}(D_{0t}^{-\alpha} \|f\|_0^2 + \|u_0(x)\|_0^2). \qquad (18)$$

2. Рассмотрим случай, когда $\alpha = \beta$. Применяя к обеим частям неравенства (14) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, получаем

$$\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 \leqslant M_{16} D_{0t}^{-\alpha} \|u\|_0^2 + M_{17} D_{0t}^{-\alpha} \int_0^t \|u\|_0^2 d\tau +$$
$$+ M_{18} \big( D_{0t}^{-\alpha} \|f\|_0^2 + \|u_0(x)\|_0^2 + \|u_0'(x)\|_0^2 \big). \qquad (19)$$

На основании леммы 2 из (19) с учетом (16) находим априорную оценку

$$\|u\|_2^2 \leqslant M_{19}(D_{0t}^{-\alpha} \|f\|_0^2 + \|u_0(x)\|_0^2 + \|u_0'(x)\|_0^2). \qquad (20)$$

3. Рассмотрим случай, когда $\alpha < \beta$. Применяя к обеим частям неравенства (14) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\beta}$, получаем

$$\|u_x\|_0^2 + D_{0t}^{-(\beta-\alpha)} \|u\|_0^2 \leqslant M_{20} D_{0t}^{-\beta} \|u\|_0^2 +$$
$$+ M_{21} D_{0t}^{-\beta} \int_0^t \|u\|_0^2 d\tau + M_{22}(D_{0t}^{-\beta} \|f\|_0^2 + \|u_0'(x)\|_0^2). \qquad (21)$$

В силу условия (2) справедливо неравенство [25]

$$\|u\|_0^2 \leqslant l^2 \|u_x\|_0^2.$$

Тогда из (21) с учетом (16) получаем

$$\|u_x\|_0^2 + D_{0t}^{-(\beta-\alpha)} \|u\|_0^2 \leqslant M_{23} D_{0t}^{-\beta} \|u_x\|_0^2 + M_{22}(D_{0t}^{-\beta} \|f\|_0^2 + \|u_0'(x)\|_0^2). \qquad (22)$$

На основании леммы 2 из (22) находим априорную оценку

$$\|u\|_3^2 \leqslant M_{24}(D_{0t}^{-\beta} \|f\|_0^2 + \|u_0'(x)\|_0^2). \qquad (23)$$

Из полученных априорных оценок (18), (20), (23) следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным. □

**3. Устойчивость и сходимость разностной схемы.** Для решения задачи (1)–(3) применим метод конечных разностей. В замкнутом прямоугольнике $\overline{Q}_T$ введем равномерную сетку

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau,$$

где

$$\overline{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i = 0, 1, \ldots, N,\ h = l/N\},$$

$$\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = 0, 1, \ldots, j_0,\ \tau = T/j_0\}.$$

На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1)–(3) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$ при $\alpha = \beta$ и $O(h^2 + \tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}})$ при $\alpha \neq \beta$:

$$\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y = \chi^j_i (a^j_i y^{(\sigma)}_{\bar{x}})_{x,i} + \Delta^\beta_{0t_{j+\sigma}} (\gamma_i y_{\bar{x}})_{x,i} + b^{-j}_i a^j_i y^{(\sigma)}_{\bar{x},i} + b^{+j}_i a^j_{i+1} y^{(\sigma)}_{x,i} -$$
$$- d^j_i y^{(\sigma)}_i + \sum_{s=0}^{j+1/2} p^j_{i,s} y^s_i \overline{\tau} + \varphi^j_i, \quad (x,t) \in \omega_{h,\tau}, \quad (24)$$

$$y^{(\sigma)}_0 = y^{(\sigma)}_N = 0, \quad (25)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad (26)$$

где

$$\Delta^\gamma_{0t_{j+\sigma}} y = \frac{\tau^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{s=0}^{j} c^{(\gamma,\sigma)}_{j-s} y^s_t$$

— дискретный аналог дробной производной Герасимова—Капуто порядка $\gamma$, $0 < \gamma < 1$, обеспечивающий порядок точности [17] $O(\tau^{3-\gamma})$ при $\sigma = 1 - \gamma/2$, и $O(\tau^{2-\gamma})$ при $\sigma = 1/2$;

$$a^{(\gamma,\sigma)}_0 = \sigma^{1-\gamma}, \quad a^{(\gamma,\sigma)}_l = (l+\sigma)^{1-\gamma} - (l-1+\sigma)^{1-\gamma}, \quad l \geqslant 1;$$

$$b^{(\gamma,\sigma)}_l = \frac{1}{2-\gamma}\left[(l+\sigma)^{2-\gamma} - (l-1+\sigma)^{2-\gamma}\right] - \frac{1}{2}\left[(l+\sigma)^{1-\alpha} + (l-1+\sigma)^{1-\gamma}\right], \ \ l \geqslant 1;$$

$c^{(\gamma,\sigma)}_0 = a^{(\gamma,\sigma)}_0$ при $j = 0$;

$$c^{(\gamma,\sigma)}_s = \begin{cases} a^{(\gamma,\sigma)}_0 + b^{(\gamma,\sigma)}_1, & s = 0, \\ a^{(\gamma,\sigma)}_s + b^{(\gamma,\sigma)}_{s+1} - b^{(\gamma,\sigma)}_s, & 1 \leqslant s \leqslant j-1, \\ a^{(\gamma,\sigma)}_j - b^{(\gamma,\sigma)}_j, & s = j, \quad \text{при } j > 0; \end{cases}$$

$\sigma = 1 - \gamma/2$ при $\alpha = \beta$ и $\sigma = 1/2$ при $\alpha \neq \beta$;

$$c^{(\gamma,\sigma)}_s > \frac{1-\gamma}{2}(s+\sigma)^{-\gamma} > 0;$$

$$a^j_i = k(x_{i-1/2}, t_{j+\sigma}), \ \ \gamma_i = \eta(x_{i-1/2}), \ \ b^{\pm j}_i = \frac{r^{\pm j}(x, t_{j+\sigma})}{k(x_i, t_{j+\sigma})}, \ \ \varphi^j_i = f(x_i, t_{j+\sigma});$$

$$r(x,t_{j+\sigma})=r^+(x,t_{j+\sigma})+r^-(x,t_{j+\sigma}),\quad |r(x,t_{j+\sigma})|=r^+(x,t_{j+\sigma})-r^-(x,t_{j+\sigma});$$

$$r^+(x,t_{j+\sigma})=\frac{1}{2}\big(r(x,t_{j+\sigma})+|r(x,t_{j+\sigma})|\big)\geqslant 0,$$

$$r^-(x,t_{j+\sigma})=\frac{1}{2}\big(r(x,t_{j+\sigma})-|r(x,t_{j+\sigma})|\big)\leqslant 0;$$

$$y^{(\sigma)}=\sigma y^{j+1}+(1-\sigma)y^j,\quad d_i^j=q(x_i,t_{j+\sigma}),\quad a^{(+1)}=a_{i+1};$$

$$\sum_{s=0}^{j+1/2}v^s\overline{\tau}=\sum_{s=1}^{j-1}v^s\tau+\frac{1}{2}\tau(v^0+v^j+v^{j+1/2}),\quad \overline{\tau}=\begin{cases}\tau/2, & s=0,j,j+1/2,\\ \tau, & s\neq 0,j,j+1/2;\end{cases}$$

$$\rho_{i,s}^j=p(x_i,t_{j+\sigma},\tau_{s+\sigma}),\quad \chi(x_i,t_{j+\sigma})=\frac{1}{1+R(x_i,t_{j+\sigma})};$$

$$R(x_i,t_{j+\sigma})=\frac{1}{2}\frac{|r(x_i,t_{j+\sigma})|}{k(x_i,t_{j+\sigma})}$$

— разностное число Рейнольдса.

Введем следующие скалярные произведения и нормы:

$$(u,v)=\sum_{i=1}^{N-1}u_iv_ih,\quad (u,u)=(1,u^2)=\|u\|_0^2;$$

$$(u,v]=\sum_{i=1}^{N}u_iv_i\tilde{h},\quad \tilde{h}=\begin{cases}h/2, & i=N,\\ h, & i\neq 0,N,\end{cases}\quad (u,u]=(1,u^2]=\|u]|_0^2.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (4), *тогда существует такое малое* $\tau_0=\tau_0(c_0,c_1,\ c_2,\alpha,\sigma)$, *что если* $\tau\leqslant\tau_0$, *то для решения разностной задачи* (24)–(26) *справедливы следующие априорные оценки:*

1) *в случае, когда* $\alpha>\beta$:

$$\|y^{j+1}\|_0^2\leqslant M_1\big(\|y^0\|_0^2+\max_{0\leqslant j'\leqslant j}\|\varphi^{j'}\|_0^2\big);$$

2) *в случае, когда* $\alpha=\beta$:

$$\|y^{j+1}\|_1^2\leqslant M_2\big(\|y^0\|_1^2+\max_{0\leqslant j'\leqslant j}\|\varphi^{j'}\|_0^2\big),$$

*где* $\|y\|_1^2=\|y\|_0^2+\|y_{\overline{x}}]|_0^2$;

3) *в случае, когда* $\alpha<\beta$:

$$\|y_{\overline{x}}^{j+1}]|_0^2\leqslant M_3\big(\|y^0\|_1^2+\max_{0\leqslant j'\leqslant j}\|\varphi^{j'}\|_0^2\big).$$

При доказательстве теоремы 2 будут использованы следующие леммы.

Лемма 3 [17]. *Для любой функции $y(t)$, заданной на сетке $\bar\omega_\tau$, справедливо неравенство*
$$y^{(\sigma)}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y \geqslant \frac{1}{2}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(y^2).$$

Лемма 4 [18] *Предположим, что неотрицательные последовательности $y^j$, $\varphi^j$, $j=0,1,2,\ldots$, удовлетворяют неравенству*
$$\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y^j \leqslant \lambda_1 y^{j+1}+\lambda_2 y^j+\varphi^j,\quad j\geqslant 1,$$
*где $\lambda_1$, $\lambda_2$ — неотрицательные константы. Тогда существует такое $\tau_0$, что если $\tau\leqslant\tau_0$, то*
$$y^{j+1}\leqslant 2\Big(y^0+\frac{t_j^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\max_{0\leqslant j'\leqslant j}\varphi^{j'}\Big)E_\alpha(2\lambda t_j^\alpha),\quad 1\leqslant j\leqslant j_0,$$
*где $\lambda=\lambda_1+\lambda_2/(2+2^{1-\alpha})$.*

*Доказательство теоремы 2.* Априорные оценки решения задачи (24)–(26) найдем методом энергетических неравенств. Умножим (24) скалярно на $y^{(\sigma)}$:
$$\big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y,y^{(\sigma)}\big)=\big(\chi(ay^{(\sigma)}_{\bar x})_x,y^{(\sigma)}\big)+\big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(\gamma y_{\bar x})_x,y^{(\sigma)}\big)+\big(b^-ay^{(\sigma)}_{\bar x},y^{(\sigma)}\big)+$$
$$+\big(b^+a^{(+1)}y^{(\sigma)}_x,y^{(\sigma)}\big)-\big(dy^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\big)+\left(\sum_{s=0}^{j+1/2}p_sy^s\bar\tau,y^{(\sigma)}\right)+\big(\varphi,y^{(\sigma)}\big).\quad (27)$$

Входящие в тождество (27) суммы преобразуем и оценим, пользуясь леммой 3:
$$\big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y,y^{(\sigma)}\big)\geqslant\frac{1}{2}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\|y\|_0^2;\quad (28)$$

$$\big(\chi(ay^{(\sigma)}_{\bar x})_x,y^{(\sigma)}\big)=\chi ay^{(\sigma)}_{\bar x}y^{(\sigma)}\big|_0^N-\big(ay^{(\sigma)}_{\bar x},(\chi y^{(\sigma)})_{\bar x}\big]=$$
$$=-\big(a\chi_{\bar x},y^{(\sigma)}_{\bar x}y^{(\sigma)}\big]-\big(a\chi^{(-1)},(y^{(\sigma)}_{\bar x})^2\big]\leqslant$$
$$\leqslant-\big(a\chi_{\bar x},y^{(\sigma)}_{\bar x}y^{(\sigma)}\big]-\frac{1}{(1+hM_4)}\big(a\chi,(y^{(\sigma)}_{\bar x})^2\big];\quad (29)$$

$$\big(\Delta^\beta_{0t_{j+\sigma}}(\gamma y_{\bar x})_x,y^{(\sigma)}\big)=y^{(\sigma)}\Delta^\beta_{0t_{j+\sigma}}(\gamma y_{\bar x})\big|_0^N-\big(\gamma,y^{(\sigma)}_{\bar x}\Delta^\beta_{0t_{j+\sigma}}(y_{\bar x})\big]\leqslant$$
$$\leqslant-\big(\frac{\gamma}{2},\Delta^\beta_{0t_{j+\sigma}}(y_{\bar x})^2\big]\leqslant-\frac{c_0}{2}\Delta^\beta_{0t_{j+\sigma}}\|y_{\bar x}]|_0^2;\quad (30)$$
$$-\big(dy^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\big)\leqslant c_2\|y^{(\sigma)}\|_0^2;\quad (31)$$

$$\left(\sum_{s=0}^{j+1/2}p_sy^s\bar\tau,y^{(\sigma)}\right)\leqslant\frac{1}{2}\|y^{(\sigma)}\|_0^2+\left(\frac{1}{2},\left(\sum_{s=0}^{j+1/2}p_sy^s\bar\tau\right)^2\right)\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \left(\frac{1}{2}, \sum_{s=0}^{j+1/2} p_s^2\tau \sum_{s=0}^{j+1/2} y^2\bar{\tau}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\|y^{(\sigma)}\|_0^2 + M_5 \sum_{s=0}^{j+1/2} \|y\|_0^2\bar{\tau}; \quad (32)$$

$$\left(\varphi, y^{(\sigma)}\right) \leqslant \frac{1}{2}\|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \frac{1}{2}\|\varphi\|_0^2. \quad (33)$$

Учитывая преобразования и неравенства (28)–(33), из (27) получим

$$\frac{1}{2}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|y\|_0^2 + M_6\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 + \frac{c_0}{2}\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\|y_{\bar{x}}]|_0^2 \leqslant$$
$$\leqslant -\left(a\chi_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}\right] + \left(b^- a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\right) + \left(b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\right) +$$
$$+ M_5 \sum_{s=0}^{j+1/2} \|y\|_0^2\bar{\tau} + M_7\|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \frac{1}{2}\|\varphi\|_0^2. \quad (34)$$

Оценим первое, второе и третье слагаемые в правой части (34) с помощью неравенства Коши с $\varepsilon$:

$$-\left(a\chi_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}\right] + \left(b^- a, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}\right) + \left(b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 + M_8(\varepsilon)\|y^{(\sigma)}\|_0^2. \quad (35)$$

Из (34) с учетом (35) при $\varepsilon = M_6/2$ находим

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|y\|_0^2 + \Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\|y_{\bar{x}}]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 \leqslant$$
$$\leqslant M_9\|y^{(\sigma)}\|_0^2 + M_{10} \sum_{s=0}^{j+1/2} \|y\|_0^2\bar{\tau} + M_{11}\|\varphi\|_0^2. \quad (36)$$

Учитывая, что

$$\sum_{s=0}^{j+1/2} \|y\|_0^2\bar{\tau} = \sum_{s=0}^{j} \|y^s\|_0^2\bar{\tau} + \frac{1}{2}\tau\|y^j\|_0^2,$$

перепишем (36) в другой форме:

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|y\|_0^2 + \Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\|y_{\bar{x}}]|_0^2 \leqslant M_{12}^{\sigma}\|y^{j+1}\|_0^2 + M_{13}^{\sigma}\|y^j\|_0^2 + M_{11}F, \quad (37)$$

где $F = \sum_{s=0}^{j} \|y^s\|_0^2\bar{\tau} + \|\varphi\|_0^2$.

1. Рассмотрим случай, когда $\alpha > \beta$. На основании леммы 4 из (37) получаем

$$\|y^{j+1}\|_0^2 \leqslant M_{14}\left(\|y^0\|_0^2 + \max_{0\leqslant j'\leqslant j}\left(\sum_{s=0}^{j'} \|y^s\|_0^2\bar{\tau} + \|\varphi^{j'}\|_0^2\right)\right). \quad (38)$$

Учитывая, что

$$\max_{0\leqslant j'\leqslant j}\sum_{s=0}^{j'}\|y^s\|_0^2\bar{\tau}\leqslant\sum_{j'=0}^{j}\max_{0\leqslant s\leqslant j'}\|y^s\|_0^2\bar{\tau}\leqslant\sum_{j'=0}^{j}\max_{0\leqslant s\leqslant j'}\|y^s\|_0^2\tau$$

и вводя обозначение $g^j=\max\limits_{0\leqslant j'\leqslant j}\|y^{j'}\|_0^2$, из (37) получим

$$g^{j+1}\leqslant M_{15}\sum_{s=0}^{j}g^s\tau+M_{16}F_1^j, \tag{39}$$

где $F_1^j=\|y^0\|_0^2+\max\limits_{0\leqslant j'\leqslant j}\|\varphi^{j'}\|_0^2$.

На основании Леммы Гронуолла [27, стр.171] из (38), (39) получаем априорную оценку

$$\|y^{j+1}\|_0^2\leqslant M_{17}\big(\|y^0\|_0^2+\max_{0\leqslant j'\leqslant j}\|\varphi^{j'}\|_0^2\big). \tag{40}$$

2. Рассмотрим случай, когда $\alpha=\beta$. В силу леммы 4 из (37) с учетом (40) получаем

$$\|y^{j+1}\|_1^2\leqslant M_{18}\big(\|y^0\|_1^2+\max_{0\leqslant j'\leqslant j}\|\varphi^{j'}\|_0^2\big). \tag{41}$$

3. Рассмотрим случай, когда $\alpha\leqslant\beta$. В силу (25), неравенства $\|y\|_0^2\leqslant$ $\leqslant 2l^2\|y_{\bar{x}}]|_0^2$ и леммы 4 из (37) получаем

$$\|y_{\bar{x}}^{j+1}]|_0^2\leqslant M_{19}\big(\|y^0\|_1^2+\max_{0\leqslant j'\leqslant j}\|\varphi^{j'}\|_0^2\big). \tag{42}$$

Из полученных априорных оценок (40)–(42) следуют единственность и устойчивость решения разностной схемы (24)–(26) по начальным данным и правой части, а также сходимость решения разностной задачи (24)–(26) к решению дифференциальной задачи (1)–(3) так, что существует такое $\tau_0$, что при $\tau\leqslant\tau_0$ справедливы следующие оценки:

1) $\|y^{j+1}-u^{j+1}\|_0^2\leqslant M_{17}(h^2+\tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}})$, когда $\alpha>\beta$;
2) $\|y^{j+1}-u^{j+1}\|_1^2\leqslant M_{18}(h^2+\tau^2)$, когда $\alpha=\beta$;
3) $\|y_{\bar{x}}^{j+1}-u_{\bar{x}}^{j+1}]|_0^2\leqslant M_{19}(h^2+\tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}})$, когда $\alpha<\beta$,

где $M_{17}$, $M_{18}$, $M_{19}$ — не зависящие от $h$ и $\tau$ положительные константы.

**4. Постановка краевой задачи с граничным условием третьего рода и априорная оценка в дифференциальной форме.** Второе краевое условие в (2) заменим условием третьего рода. Тогда вместо (2) имеем

$$u(0,t)=0,\quad -\Pi(l,t)=\beta(t)u(l,t)-\mu(t), \tag{43}$$

где

$$|\beta(t)|\leqslant c_2,\quad \Pi(x,t)=k(x,t)u_x+\eta\partial_{0t}^{\alpha}u_x. \tag{44}$$

Теорема 3. *Если*

$$k(x,t)\in C^{1,0}(\overline{Q}_T),\ \ \eta(x)\in C^1[0,l],\ \ q_s(x,t),f(x,t)\in C(\overline{Q}_T),$$

$$u(x,t) \in C^{2,0}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T), \ \ \partial_{0t}^{\alpha} u(x,t) \in C(\overline{Q}_T), \ \ \partial_{0t}^{\alpha} u_{xx}(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$$

*и выполнены условия* (4), (44), *то для решения задачи* (1), (43), (3) *справедливы следующие априорные оценки*:

1) *в случае, когда* $\alpha > \beta$:

$$\|u\|_1^2 \leqslant M_1 \bigl(D_{0t}^{-\alpha}(\|f\|_0^2 + \mu^2(t)) + \|u_0(x)\|_0^2\bigr);$$

2) *в случае, когда* $\alpha = \beta$:

$$\|u\|_2^2 \leqslant M_2 \bigl(D_{0t}^{-\alpha}(\|f\|_0^2 + \mu^2(t)) + \|u_0(x)\|_0 + \|u_0'(x)\|_0^2\bigr);$$

3) *в случае, когда* $\alpha < \beta$:

$$\|u\|_3^2 \leqslant M_3 \bigl(D_{0t}^{-\beta}(\|f\|_0^2 + \mu^2(t)) + \|u_0'(x)\|_0^2\bigr).$$

*Доказательство.* Повторим преобразования (6)–(12). После некоторых несложных преобразований из (5) получаем неравенство

$$\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2 + \frac{1}{2}\partial_{0t}^{\beta}\int_0^l \eta(u_x)^2 dx + c_0\|u_x\|_0^2 \leqslant$$
$$\leqslant u\Pi(x,t)\Big|_0^l + \varepsilon\|u_x\|_0^2 + M_4(\varepsilon)\|u\|_0^2 + M_5\int_0^t \|u\|_0^2 d\tau + \frac{1}{2}\|f\|_0^2. \quad (45)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (45) с учетом (43):

$$u\Pi(x,t)\Big|_0^l = \Pi(l,t)u(l,t) = u(l,t)\bigl(\mu(t) - \beta(t)u(l,t)\bigr) =$$
$$= -\beta(t)u^2(l,t) + \mu(t)u(l,t) \leqslant M_6 u^2(l,t) + \frac{1}{2}\mu^2(t) \leqslant$$
$$\leqslant M_7(\varepsilon)\|u\|_0^2 + \varepsilon\|u_x\|_0^2 + \frac{1}{2}\mu^2(t). \quad (46)$$

Из (45) с учетом (46) при $\varepsilon = c_0/2$ находим

$$\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2 + \partial_{0t}^{\beta}\int_0^l \eta(u_x)^2 dx + \|u_x\|_0^2 \leqslant$$
$$\leqslant M_8\|u\|_0^2 + M_9\int_0^t \|u\|_0^2 d\tau + M_{10}\bigl(\|f\|_0^2 + \mu^2(t)\bigr). \quad (47)$$

1. Рассмотрим случай, когда $\alpha > \beta$. Применяя к обеим частям неравенства (47) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, получаем

$$\|u\|_0^2 + D_{0t}^{-(\alpha-\beta)}\|u_x\|_0^2 \leqslant$$
$$\leqslant M_{11}D_{0t}^{-\alpha}\|u\|_0^2 + M_{12}D_{0t}^{-\alpha}\int_0^t \|u\|_0^2 d\tau +$$

$$+ M_{13}\big(D_{0t}^{-\alpha}(\|f\|_0^2 + \mu^2(t)) + \|u_0(x)\|_0^2\big). \quad (48)$$

На основании леммы 2 из (48) с учетом (16) получаем априорную оценку

$$\|u\|_1^2 \leqslant M_{14}\big(D_{0t}^{-\alpha}(\|f\|_0^2 + \mu^2(t)) + \|u_0(x)\|_0^2\big). \quad (49)$$

2. Рассмотрим случай, когда $\alpha = \beta$. Применяя к обеим частям неравенства (47) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, получаем

$$\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 \leqslant M_{15}D_{0t}^{-\alpha}\|u\|_0^2 + M_{16}D_{0t}^{-\alpha}\int_0^t \|u\|_0^2 d\tau +$$
$$+ M_{17}\big(D_{0t}^{-\alpha}(\|f\|_0^2 + \mu^2(t)) + \|u_0(x)\|_0 + \|u_0'(x)\|_0^2\big). \quad (50)$$

На основании леммы 2 из (50) с учетом (16) получаем априорную оценку

$$\|u\|_2^2 \leqslant M_{18}\big(D_{0t}^{-\alpha}(\|f\|_0^2 + \mu^2(t)) + \|u_0(x)\|_0 + \|u_0'(x)\|_0^2\big). \quad (51)$$

3. Рассмотрим случай, когда $\alpha < \beta$. Применяя к обеим частям неравенства (47) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\beta}$, получаем

$$\|u_x\|_0^2 + D_{0t}^{-(\beta-\alpha)}\|u\|_0^2 \leqslant$$
$$\leqslant M_{19}D_{0t}^{-\beta}\|u\|_0^2 + M_{20}D_{0t}^{-\beta}\int_0^t \|u\|_0^2 d\tau +$$
$$+ M_{21}\big(D_{0t}^{-\beta}(\|f\|_0^2 + \mu^2(t)) + \|u_0'(x)\|_0^2\big). \quad (52)$$

В силу условия $u(0,t) = 0$ справедливо тождество

$$u(x,t) = \int_0^x u_x(x,t)dx.$$

Тогда

$$u^2(x,t) \leqslant \left(\int_0^x u_x(x,t)dx\right)^2 \leqslant x\int_0^x u_x^2(x,t)dx \leqslant l\int_0^l u_x^2(x,t)dx. \quad (53)$$

Интегрируя обе части (53) по $x$ от 0 до $l$, получаем неравенство $\|u\|_0^2 \leqslant l^2\|u_x\|_0^2$. Тогда из (52) с учетом (16) получаем

$$\|u_x\|_0^2 + D_{0t}^{-(\beta-\alpha)}\|u\|_0^2 \leqslant$$
$$\leqslant M_{22}D_{0t}^{-\beta}\|u_x\|_0^2 + M_{23}\big(D_{0t}^{-\beta}(\|f\|_0^2 + \mu^2(t)) + \|u_0'(x)\|_0^2\big). \quad (54)$$

На основании леммы 2 из (54) находим априорную оценку

$$\|u\|_3^2 \leqslant M_{24}\big(D_{0t}^{-\beta}(\|f\|_0^2 + \mu^2(t)) + \|u_0'(x)\|_0^2\big). \quad (55)$$

Из полученных априорных оценок (49), (51), (55) следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным. □

**5. Устойчивость и сходимость разностной схемы.** На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1), (43), (3) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2+\tau^2)$ при $\alpha=\beta$ и порядка $O(h^2+\tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}})$ при $\alpha\neq\beta$:

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y=\chi^j_i(a^j_iy^{(\sigma)}_{\bar{x}})_{x,i}+\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_iy_{\bar{x}})_{x,i}+b^{-j}_ia^j_iy^{(\sigma)}_{\bar{x},i}+b^{+j}_ia^j_{i+1}y^{(\sigma)}_{x,i}-\\ -d^j_iy^{(\sigma)}_i+\sum_{s=0}^{j+1/2}p^j_{i,s}y^s_i\overline{\tau}+\varphi^j_i,\quad (x,t)\in\omega_{h,\tau},\quad (56)$$

$$y(0,t)=0,\quad t\in\overline{\omega}_\tau,\quad x=0,\quad (57)$$

$$-\big(\chi_Na_Ny^{(\sigma)}_{\bar{x},N}+\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_Ny_{\bar{x},N})\big)=\\ =\widetilde{\beta}y^{(\sigma)}_N+\frac{1}{2}h\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N-\sum_{s=0}^{j+1/2}p^j_{N,s}y^s_N\overline{\tau}\right)-\widetilde{\mu},\quad x=l,\quad (58)$$

$$y(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{\omega}_h,\quad (59)$$

где $\widetilde{\beta}^j=\beta^j+\frac{1}{2}hd^j_N$, $\widetilde{\mu}^j=\mu^j+0.5h\varphi^j_N$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (4), (43). *Тогда существует такое малое* $\tau_0=\tau_0(c_0,c_1,c_2,\alpha,\sigma)$, *что если* $\tau\leqslant\tau_0$, *то для решения разностной задачи* (56)–(59) *справедливы следующие априорные оценки*:

1) *в случае, когда* $\alpha>\beta$:

$$\|y]|^2_0\leqslant M_1\big(\|y^0]|^2_0+\max_{0\leqslant j'\leqslant j}(\|\varphi]|^2_0+\mu^2)\big);$$

2) *в случае, когда* $\alpha=\beta$:

$$\|y^{j+1}]|^2_2\leqslant M_2\big(\|y^0]|^2_2+\max_{0\leqslant j'\leqslant j}(\|\varphi^{j'}]|^2_0+\mu^2)\big),$$

*где* $\|y]|^2_2=\|y]|^2_0+\|y_{\overline{x}}]|^2_0$;

3) *в случае, когда* $\alpha<\beta$:

$$\|y_{\overline{x}}]|^2_0\leqslant M_3\big(\|y^0]|^2_2+\max_{0\leqslant j'\leqslant j}(\|\varphi^{j'}]|^2_0+\mu^2)\big).$$

*Доказательство.* Найдем априорную оценку методом энергетических неравенств. Для этого умножим уравнение (56) скалярно на $y$. Тогда, принимая во внимание преобразования (28)–(33), получаем

$$\big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y,y^{(\sigma)}\big)+M_4\|y^{(\sigma)}_{\overline{x}}]|^2_0+\frac{c_0}{2}\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\|y_{\overline{x}}]|^2_0\leqslant\\ \leqslant\big(\chi^j_iay^{(\sigma)}_{\overline{x}}+\Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_iy_{\bar{x}})\big)y^{(\sigma)}\Big|^N_0+M_5\|y^{(\sigma)}]|^2_0+\big(b^{-j}_ia^j_iy^{(\sigma)}_{\bar{x},i},y^{(\sigma)}\big)+$$

$$+\left(b_i^{+j}a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\right)-\left(dy^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\right)+\left(\sum_{s=0}^{j+1/2} p_s y^s \bar{\tau}, y^{(\sigma)}\right)+\left(\varphi, y^{(\sigma)}\right). \quad (60)$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части (60) с учетом (57), (58):

$$\left(\chi_i^j a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}+\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\beta}(\gamma_i y_{\bar{x}})\right)y^{(\sigma)}\Big|_0^N=\left(\chi_N^j a y_{\bar{x},N}^{(\sigma)}+\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\beta}(\gamma_i y_{\bar{x},N})\right)y_N^{(\sigma)}=$$
$$=\left[\mu+\frac{1}{2}h\varphi_N^j-\beta y_N^{(\sigma)}-\frac{1}{2}hdy_N^{(\sigma)}-\frac{1}{2}h\left(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_N-\sum_{s=0}^{j+1/2}p_{N,s}^j y_N^s\bar{\tau}\right)\right]y_N^{(\sigma)}\leqslant$$
$$\leqslant-\frac{1}{2}hy_N^{(\sigma)}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_N+M_6(\varepsilon)\|y^{(\sigma)}]|_0^2+\varepsilon\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2+M_7(\varepsilon)\mu^2+$$
$$+\frac{1}{2}hy_N^{(\sigma)}\varphi_N^j-\frac{1}{2}hd(y_N^{(\sigma)})^2+\frac{1}{2}hy_N^{(\sigma)}\sum_{s=0}^{j+1/2}p_{N,s}^j y_N^s\bar{\tau}. \quad (61)$$

Из (60) с учетом (61) при $\varepsilon=M_4/2$ находим

$$\left(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y, y^{(\sigma)}\right]+\frac{M_4}{2}\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2+\frac{c_0}{2}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\beta}\|y_{\bar{x}}]|_0^2\leqslant$$
$$\leqslant M_8\|y^{(\sigma)}]|_0^2+\left(b_i^{-j}a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\right)+\left(b_i^{+j}a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\right)-$$
$$-\left(d_i^j y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\right]+\left(\sum_{s=0}^{j+1/2}p_s y^s\bar{\tau}, y^{(\sigma)}\right]+\frac{1}{2}\mu^2+\left(\varphi, y^{(\sigma)}\right]. \quad (62)$$

Из (62) после несложных преобразований с учетом неравенства Коши с $\varepsilon$ получим

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\|y]|_0^2+\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\beta}\|y_{\bar{x}}]|_0^2+\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2\leqslant$$
$$\leqslant M_9\|y^{(\sigma)}]|_0^2+M_{10}\sum_{s=0}^{j+1/2}\|y]|_0^2\bar{\tau}+M_{11}(\|\varphi]|_0^2+\mu^2). \quad (63)$$

Перепишем (63) в другой форме:

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\|y]|_0^2+\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\beta}\|y_{\bar{x}}]|_0^2\leqslant M_{12}^{\sigma}\|y^{j+1}]|_0^2+M_{13}^{\sigma}\|y^j]|_0^2+M_{14}F, \quad (64)$$

где $F=\sum\limits_{s=0}^{j}\|y]|_0^2\bar{\tau}+\|\varphi]|_0^2+\mu^2$.

1. Рассмотрим случай, когда $\alpha>\beta$. На основании леммы 4 из (64) с учетом (16) получаем

$$\|y^{j+1}]|_0^2\leqslant M_{15}\left(\|y^0]|_0^2+\max_{0\leqslant j'\leqslant j}\left(\sum_{s=0}^{j'}\|y]|_0^2\bar{\tau}+\|\varphi]|_0^2+\mu^2\right)\right). \quad (65)$$

Тогда, повторяя рассуждения (39), (40), из (65) находим оценку

$$\|y]|_0^2 \leqslant M_{16}\big(\|y^0]|_0^2 + \max_{0\leqslant j'\leqslant j}(\|\varphi]|_0^2 + \mu^2)\big). \tag{66}$$

2. Рассмотрим случай, когда $\alpha = \beta$. В силу леммы 4 из (64) с учетом (40) получаем

$$\|y^{j+1}]|_2^2 \leqslant M_{17}\big(\|y^0]|_2^2 + \max_{0\leqslant j'\leqslant j}(\|\varphi]|_0^2 + \mu^2)\big). \tag{67}$$

3. Рассмотрим случай, когда $\alpha < \beta$. Из (64) с учетом (39), (40) и неравенства $\|y^{(\sigma)}]|_0^2 \leqslant 2l^2\|y_{\overline{x}}^{(\sigma)}]|_0^2$ получаем

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|y]|_0^2 + \Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}}\|y_{\overline{x}}]|_0^2 \leqslant M_{18}^{\sigma}\|y_{\overline{x}}^{j+1}]|_0^2 + M_{19}^{\sigma}\|y_{\overline{x}}^{j}]|_0^2 + M_{14}F. \tag{68}$$

На основании леммы 4 из (68) находим

$$\|y_{\overline{x}}]|_0^2 \leqslant M_{20}\big(\|y^0]|_2^2 + \max_{0\leqslant j'\leqslant j}(\|\varphi^{j'}]|_0^2 + \mu^2)\big). \tag{69}$$

Из полученных априорных оценок (66), (67), (69) следуют единственность и устойчивость решения разностной схемы (56)–(59) по начальным данным и правой части, а также сходимость решения разностной задачи (56)–(59) к решению дифференциальной задачи (1), (43), (3) так, что существует такое $\tau_0$, что при $\tau \leqslant \tau_0$ справедливы следующие оценки:

1) $\|y^{j+1} - u^{j+1}]|_0^2 \leqslant M_{16}(h^2 + \tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}})$, когда $\alpha > \beta$;
2) $\|y^{j+1} - u^{j+1}]|_1^2 \leqslant M_{17}(h^2 + \tau^2)$, когда $\alpha = \beta$;
3) $\|y_{\overline{x}}^{j+1} - u_{\overline{x}}^{j+1}]|_0^2 \leqslant M_{20}(h^2 + \tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}})$, когда $\alpha < \beta$,

где $M_{16}$, $M_{17}$, $M_{20}$ — не зависящие от $h$ и $\tau$ положительные константы.

□

**6. Алгоритм численного решения краевой задачи (1), (43), (3).** Для численного решения задачи (1), (43), (3) приведем разностную схему (56)–(59) к расчетному виду. Тогда уравнение (56) приводится к следующему виду:

$$A_i y_{i-1}^{j+1} - C_i y_i^{j+1} + B_i y_{i+1}^{j+1} = -F_i^j, \quad i = \overline{1, N-1}, \tag{70}$$

где

$$A_i = \tau\sigma\varkappa_i^j a_i^j + \gamma_i \frac{\tau^{1-\beta} c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)} - \tau h\sigma b_i^{-j} a_i,$$

$$B_i = \tau\sigma\varkappa_i^j a_{i+1}^j + \gamma_{i+1} \frac{\tau^{1-\beta} c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)} + \tau h\sigma b_i^{+j} a_{i+1},$$

$$C_i = A_i + B_i + h^2 \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} + \tau\sigma h^2 d_i^j,$$

$$F_i^j = \tilde{A}_i y_{i-1}^j - \tilde{C}_i y_i^j + \tilde{B}_i y_{i+1}^j + h^2\tau\varphi_i^j - h^2 \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} (y_i^{s+1} - y_i^s) +$$

$$+\frac{\tau^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}\sum_{s=0}^{j-1}c_{j-s}^{(\beta,\sigma)}\left((\gamma_{i+1}y_{i+1})^{s+1}-(\gamma_{i+1}y_{i+1})^{s}\right)-$$

$$-\frac{\tau^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}\sum_{s=0}^{j-1}c_{j-s}^{(\beta,\sigma)}\left(\left((\gamma_i+\gamma_{i+1})y_i\right)^{s+1}-\left((\gamma_i+\gamma_{i+1})y_i\right)^{s}\right)+$$

$$+\frac{\tau^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}\sum_{s=0}^{j-1}c_{j-s}^{(\beta,\sigma)}\left((\gamma_i y_{i-1})^{s+1}-(\gamma_i y_{i-1})^{s}\right)+\tau h^2\sum_{s=0}^{j+1/2}p_{i,s}^{j}y_i^{s}\overline{\tau},$$

$$\tilde{A}_i=\tau(1-\sigma)\varkappa_i^j a_i^j-\gamma_i\frac{\tau^{1-\beta}c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)}-\tau h(1-\sigma)b_i^{-j}a_i,$$

$$\tilde{B}_i=\tau(1-\sigma)\varkappa_i^j a_{i+1}^j-\gamma_{i+1}\frac{\tau^{1-\beta}c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)}+\tau h(1-\sigma)b_i^{+j}a_{i+1},$$

$$\tilde{C}_i=\tilde{A}_i+\tilde{B}_i-h^2\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}+\tau(1-\sigma)h^2 d_i^j.$$

Краевые условия (57), (58) принимают вид

$$y_0=0, \tag{71}$$

$$y_N=\varkappa y_{N-1}+\mu, \tag{72}$$

где

$$\varkappa=\left(\tau\sigma\varkappa_N a_N+\gamma_N\frac{\tau^{1-\beta}c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)}\right)\times$$
$$\times\left(\tau\sigma\varkappa_N a_N^j+\gamma_N\frac{\tau^{1-\beta}c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)}+\sigma h\tau\widetilde{\beta}^j+\frac{1}{2}h^2\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^{-1},$$

$$\mu=\Bigg(\widetilde{\mu}h\tau-(1-\sigma)h\tau\widetilde{\beta}y_N^j-$$
$$-\tau(1-\sigma)\varkappa_N a_N(y_N^j-y_{N-1}^j)+\gamma_N\frac{\tau^{1-\beta}c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)}(y_N^j-y_{N-1}^j)+$$
$$+\frac{1}{2}h^2\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}y_N-\frac{1}{2}h^2\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j-1}c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}(y_N^{s+1}-y_N^{s})-$$
$$-\frac{\tau^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}\sum_{s=0}^{j-1}c_{j-s}^{(\beta,\sigma)}\left((\gamma_N y_N\ )^{s+1}-(\gamma_N y_N)^{s}\right)+\frac{1}{2}\tau h^2\sum_{s=0}^{j+1/2}p_{N,s}^{j}y_N^{s}\overline{\tau}+$$
$$+\frac{\tau^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}\sum_{s=0}^{j-1}c_{j-s}^{(\beta,\sigma)}\left((\gamma_N y_{N-1})^{s+1}-(\gamma_N y_{N-1})^{s}\right)\Bigg)\times$$

$$\times \left( \tau\sigma\varkappa_N a_N^j + \gamma_N \frac{\tau^{1-\beta} c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)} + \sigma h \tau \widetilde{\beta}^j + \frac{h^2}{2} \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} \right)^{-1}.$$

Таким образом, с учетом (70)–(72) разностная схема (56)–(59) приводится к трехдиагональной системе линейных алгебраических уравнений, решение которой легко находится известным методом прогонки.

**7. Численный эксперимент.** Коэффициенты уравнения и граничных условий задачи (1), (43), (3) подберем таким образом, чтобы точным решением задачи была функция $u(x,t) = xt^3e^x$.

Ниже в таблице приведены максимальное значение погрешности ($z = y-u$) и порядок сходимости (Order of convergence) в норме $\|[\cdot]\|_0$ при различных значениях параметров $\alpha = 0.01, 0.5, 0.99$, $\beta = 0.01, 0.5; 0.99$ и уменьшении размера сетки, когда $h = \tau$. Погрешность уменьшается в соответствии с порядком аппроксимации. Порядок сходимости будем определять по формуле $\mathrm{OC} = \log_2 \frac{\|z_1\|}{\|z_2\|}$, где $z_1$ и $z_2$ — погрешности, соответствующие шагам $0.5h$, $h$.

**Результаты численного эксперимента [The numerical experiment results]**

| $\alpha$ | $\beta$ | $h$ | $\max\limits_{0<j<m} \|[z^j]\|_0$ | Order of convergence, $\|[\cdot]\|_0$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.01 | 0.01 | 1/20 | 0.004995188 | |
| | | 1/40 | 0.001244028 | 2.0055 |
| | | 1/80 | 0.000310374 | 2.0029 |
| | | 1/160 | 0.000077512 | 2.0015 |
| 0.5 | | 1/20 | 0.007588088 | |
| | | 1/40 | 0.001930506 | 1.9748 |
| | | 1/80 | 0.000495150 | 1.9630 |
| | | 1/160 | 0.000128319 | 1.9481 |
| 0.99 | | 1/20 | 0.007131222 | |
| | | 1/40 | 0.001794538 | 1.9905 |
| | | 1/80 | 0.000455417 | 1.9784 |
| | | 1/160 | 0.000117345 | 1.9564 |
| 0.01 | 0.5 | 1/20 | 0.010134180 | |
| | | 1/40 | 0.002815421 | 1.8478 |
| | | 1/80 | 0.000805897 | 1.8047 |
| | | 1/160 | 0.000238188 | 1.7585 |
| 0.5 | | 1/20 | 0.006797725 | |
| | | 1/40 | 0.001693782 | 2.0048 |
| | | 1/80 | 0.000422395 | 2.0036 |
| | | 1/160 | 0.000105412 | 2.0026 |
| 0.99 | | 1/20 | 0.009807660 | |
| | | 1/40 | 0.002746763 | 1.8362 |
| | | 1/80 | 0.000794954 | 1.7888 |
| | | 1/160 | 0.000238462 | 1.7371 |

| $\alpha$ | $\beta$ | $h$ | $\max\limits_{0<j<m} \|[z^j]\|_0$ | Order of convergence, $\|[\cdot]\|_0$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.01 | 0.99 | 1/20 | 0.008818458 | |
| | | 1/40 | 0.002305232 | 1.9356 |
| | | 1/80 | 0.000627402 | 1.8774 |
| | | 1/160 | 0.000182676 | 1.7801 |
| 0.5 | | 1/20 | 0.008932556 | |
| | | 1/40 | 0.002366377 | 1.9164 |
| | | 1/80 | 0.000653947 | 1.8554 |
| | | 1/160 | 0.000193130 | 1.7596 |
| 0.99 | | 1/20 | 0.008009633 | |
| | | 1/40 | 0.002000081 | 2.0017 |
| | | 1/80 | 0.000499586 | 2.0013 |
| | | 1/160 | 0.000124819 | 2.0009 |

**Заключение (Выводы).** В настоящей работе рассмотрены краевые задачи для интегро-дифференциального уравнения соболевского типа с краевыми условиями первого и третьего родов с двумя операторами дробного дифференцирования $\alpha$ и $\beta$ разных порядков. Построены разностные схемы порядка аппроксимации $O(h^2+\tau^2)$ при $\alpha=\beta$ и $O(h^2+\tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}})$ при $\alpha\neq\beta$. С помощью метода энергетических неравенств получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках при различных соотношениях $\alpha$ и $\beta$, откуда следуют единственность, устойчивость, а также сходимость решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку аппроксимации разностной схемы.

**Конкурирующие интересы.** Конкурирующих интересов не имею.

**Авторский вклад и ответственность.** Автор несет полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

**Финансирование.** Исследование выполнялось без финансирования.

### Библиографический список

1. Врагов В. Н. *Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики.* Новосибирск: НГУ, 1983. 84 с.
2. Ting T. W. Parabolic and pseudo-parabolic partial differential equations // *J. Math. Soc. Japan*, 1969. vol. 21, no. 3. pp. 440–453. DOI: https://doi.org/10.2969/jmsj/02130440.
3. Favini A., Yagi A. *Degenerate Differential Equations in Banach Spaces*. New York: Marcel Dekker, 1999. 336 pp. DOI: https://doi.org/10.1201/9781482276022.
4. Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д. *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа.* М.: Физматлит, 2007. 736 с.
5. Demidenko G.V., Uspenskii S.V. *Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative.* Boca Raton: CRC Press, 2003. 632 pp. DOI: https://doi.org/10.1201/9780203911433.
6. Lions J. L. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires* [Some Methods for Solving Nonlinear Boundary Value Problems] / Etudes mathematiques. Paris: Gauthier-Villars, 1969. xx+554 pp. (In French)
7. Петровский И. Г. *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Москов. унив., 1984. 296 с. EDN: QJLPYJ.
8. Showalter R. E. The Sobolev equations I // *Appl. Anal.*, 1975. vol. 5, no. 1. pp. 15–22. DOI: https://doi.org/10.1080/00036817508839103.
9. Showalter R. E. The Sobolev equations II // *Appl. Anal.*, 1975. vol. 5, no. 2. pp. 81–99. DOI: https://doi.org/10.1080/00036817508839111.

10. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах // *ПММ*, 1960. Т. 24, № 5. С. 852–864. EDN: OXMSGT.
11. Hallaire M. Le potentiel efficace de l'eau dans le sol en régime de dessèchement // *C. R. Acad. Sci., Paris*, 1962. vol. 254. pp. 2047–2049.
12. Hallaire M. On a theory of moisture-transfer // *Inst. Rech. Agronom.*, 1964. vol. 3. pp. 60–72.
13. Чудновский А. Ф. *Теплофизика почв.* М.: Наука, 1976. 353 с. EDN: RHLSCT.
14. Chen P. J., Gurtin M. E. On a theory of heat conduction involving two temperatures // *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)*, 1968. vol. 19, no. 4. pp. 614–627. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01594969.
15. Беданокова С. Ю. Уравнение движения почвенной влаги и математическая модель влагосодержания почвенного слоя, основанная на уравнении Аллера // *Вестн. Адыгейск. гос. ун-та. Сер. 4. Естеств.-математ. техн. науки*, 2007. Т. 4. С. 68–71. EDN: KBXDEN.
16. Алиханов А. А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // *Диффер. уравн.*, 2010. Т. 46, № 5. С. 658–664. EDN: MSQVJX.
17. Alikhanov A. A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // *J. Comp. Phys.*, 2015. vol. 280. pp. 424–438. EDN: UEGJJB. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.09.031.
18. Бештоков М. Х. Устойчивость и сходимость разностных схем, аппроксимирующих краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений соболевского типа дробного порядка // *Диффер. уравн.*, 2021. Т. 57, № 12. С. 1665–1681. EDN: RNNAJS. DOI: https://doi.org/10.31857/S0374064121120098.
19. Beshtokov M. Kh. The third boundary value problem for loaded differential Sobolev type equation and grid methods of their numerical implementation // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2016. vol. 158, 012019. EDN: YVCYFN. DOI: https://doi.org/10.1088/1757-899X/158/1/012019.
20. Бештоков М. Х. Краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся уравнений соболевского типа с нелокальным источником в дифференциальной и разностной трактовках // *Диффер. уравн.*, 2018. Т. 54, № 2. С. 249–266. EDN: YQYGVT. DOI: https://doi.org/10.1134/S0374064118020115.
21. Бештоков М. Х., Водахова В. А. Нелокальные краевые задачи для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка // *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2019. Т. 29, № 4. С. 459–482. EDN: DKSEVD. DOI: https://doi.org/10.20537/vm190401.
22. Бештоков М. Х. Метод Римана для решения нелокальных краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. № 4(33). С. 15–24. EDN: RVARQN. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1238.
23. Caputo M. Linear models of dissipation whose $Q$ is almost frequency independent—II // *Geophys. J. Intern.*, 1967. vol. 13, no. 5. pp. 529–539. DOI: https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x.
24. Герасимов А. Н. Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения // *ПММ*, 1948. Т. 12. С. 251–260.
25. Ладыженская О. А. *Краевые задачи математической физики.* М.: Наука, 1973. 407 с.
26. Самарский А. А. *Теория разностных схем.* М.: Наука, 1983. 616 с.
27. Самарский А. А., Гулин А. В. *Устойчивость разностных схем.* М.: Наука, 1973. 416 с.

**Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki**
**[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 4, pp. 607–629**
**ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print)** https://doi.org/10.14498/vsgtu1942

**MSC: 65L05, 65N12, 65R20**

# Boundary value problems for Sobolev type equations of fractional order with memory effect

***M. Kh. Beshtokov***

Institute of Applied Mathematics and Automation
of Kabardin-Balkar Scientific Centre of RAS,
89 a, Shortanova st., Nal'chik, 360000, Russian Federation.

### Abstract

Boundary value problems are studied for a one-dimensional Sobolev type integro-differential equation with boundary conditions of the first and third kind with two fractional differentiation operators $\alpha$ and $\beta$ of different orders. Difference schemes of the order of approximation $O(h^2 + \tau^2)$ for $\alpha = \beta$ and $O(h^2 + \tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}})$ are constructed for $\alpha \neq \beta$. Using the method of energy inequalities, a priori estimates are obtained in the differential and difference interpretations, from which the existence, uniqueness, stability, and convergence of the solution of the difference problem to the solution of the original differential problem at a rate equal to the order of approximation of the difference scheme follow. Numerical experiments were carried out to illustrate the results obtained in the paper.

**Keywords:** Sobolev type equation, fractional derivative, memory effect, difference schemes, a priori estimate, stability and convergence.

Received: 15th July, 2022 / Revised: 19th November, 2022 / Accepted: 16th December, 2022 / First online: 29th December, 2022

**Competing interests.** I have no competing interests.

**Authors' contributions and responsibilities.** The author assumes full responsibility for the submission of the final manuscript in print. I approve the final version of the manuscript.

**Funding.** The research has not received funding.

**Differential Equations and Mathematical Physics**
**Research Article**



**Please cite this article in press as:**
Beshtokov M. Kh. Boundary value problems for Sobolev type equations of fractional order with memory effect, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 4, pp. 607–629. EDN: AUKCBX. DOI: 10.14498/vsgtu1942 (In Russian).

**Author's Details:**
*Murat Kh. Beshtokov* https://orcid.org/0000-0003-2968-9211
Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Leading Researcher; Dept. of Computational Methods; e-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

## References


1. Vragov V. N. *Kraevye zadachi dlia neklassicheskikh uravnenii matematicheskoi fiziki* [Boundary Value Problems for Nonclassical Equations in Mathematical Physics]. Novosibirsk, Novosibirsk State Univ., 1983, 84 pp. (In Russian)
2. Ting T. W. Parabolic and pseudo-parabolic partial differential equations, *J. Math. Soc. Japan*, 1969, vol. 21, no. 3, pp. 440–453. DOI: https://doi.org/10.2969/jmsj/02130440.
3. Favini A., Yagi A. *Degenerate Differential Equations in Banach Spaces*. New York, Marcel Dekker, 1999, 336 pp. DOI: https://doi.org/10.1201/9781482276022.
4. Sveshnikov A. G., Al'shin A. B., Korpusov M. O., Pletner Yu. D. *Lineinye i nelineinye uravneniia sobolevskogo tipa* [Linear and Nonlinear Equations of the Sobolev Type]. Moscow, Fizmatlit, 2007, 736 pp. (In Russian)
5. Demidenko G.V., Uspenskii S.V. *Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative*. Boca Raton, CRC Press, 2003, 632 pp. DOI: https://doi.org/10.1201/9780203911433.
6. Lions J. L. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires* [Some Methods for Solving Nonlinear Boundary Value Problems], Etudes mathematiques. Paris, Gauthier-Villars, 1969, xx+554 pp. (In French)
7. Petrovsky I. G. *Lektsii po teorii obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii* [Lectures on the Theory of Ordinary Differential Equations]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1984, 296 pp. (In Russian). EDN: QJLPYJ.
8. Showalter R. E. The Sobolev equations I, *Appl. Anal.*, 1975, vol. 5, no. 1, pp. 15–22. DOI: https://doi.org/10.1080/00036817508839103.
9. Showalter R. E. The Sobolev equations II, *Appl. Anal.*, 1975, vol. 5, no. 2, pp. 81–99. DOI: https://doi.org/10.1080/00036817508839111.
10. Barenblatt G. I., Zheltov Yu. P., Kochina I. N. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata], *J. Appl. Math. Mech.*, 1960, vol. 24, no. 5, pp. 1286–1303. EDN: VSOXSF. DOI: https://doi.org/10.1016/0021-8928(60)90107-6.
11. Hallaire M. Le potentiel efficace de l'eau dans le sol en régime de dessèchement, *C. R. Acad. Sci., Paris*, 1962, vol. 254, pp. 2047–2049.
12. Hallaire M. On a theory of moisture-transfer, *Inst. Rech. Agronom.*, 1964, vol. 3, pp. 60–72.
13. Chudnovsky A. F. *Teplofizika pochv* [Soil Thermal Physics]. Moscow, Nauka, 1976, 353 pp. EDN: RHLSCT.
14. Chen P. J., Gurtin M. E. On a theory of heat conduction involving two temperatures, *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)*, 1968, vol. 19, no. 4, pp. 614–627. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01594969.
15. Bedanokova S. Yu. The equation of soil moisture movement and mathematical model of moisture content of the soil layer based on the Hallaire's equation, *Vestn. Adygeisk. Gos. Univ. Ser. 4. Estestv.-Matemat. Tekhn. Nauki*, 2007, vol. 4, pp. 68–71 (In Russian). EDN: KBXDEN.
16. Alikhanov A. A. A priori estimates for solutions of boundary value problems for fractional-order equations, *Diff. Equat.*, 2010, vol. 46, no. 5, pp. 660–666. EDN: MXDCPJ. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266110050058.
17. Alikhanov A. A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation, *J. Comp. Phys.*, 2015, vol. 280, pp. 424–438. EDN: UEGJJB. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.09.031.
18. Beshtokov M. Kh. Stability and convergence of difference schemes approximating boundary value problems for loaded Sobolev-type fractional differential equations, *Diff. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 12, pp. 1685–1701. EDN: NMCDYV. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266121120132.
19. Beshtokov M. Kh. The third boundary value problem for loaded differential Sobolev type equation and grid methods of their numerical implementation, *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2016, vol. 158, 012019. EDN: YVCYFN. DOI: https://doi.org/10.1088/1757-899X/158/1/012019.

20. Beshtokov M. Kh. Boundary value problems for degenerating and nondegenerating Sobolev-type equations with a nonlocal source in differential and difference forms, *Diff. Equat.*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 250–267. EDN: UXTRVT. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266118020118.
21. Beshtokov M. Kh., Vogahova V. A. Nonlocal boundary value problems for a fractional-order convection-diffusion equation, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2019, vol. 29, no. 4, pp. 459–482 (In Russian). EDN: DKSEVD. DOI: https://doi.org/10.20537/vm190401.
22. Beshtokov M. Kh. Riemann method for solving non-local boundary value problems for the third order pseudoparabolic equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2013, no. 4(33), pp. 15–24 (In Russian). EDN: RVARQN. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1238.
23. Caputo M. Linear models of dissipation whose $Q$ is almost frequency independent—II, *Geophys. J. Intern.*, 1967, vol. 13, no. 5, pp. 529–539. DOI: https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x.
24. Gerasimov A. N. Generalization of linear deformation laws and their application to problems of internal friction, *Appl. Math. Mech.*, 1948, vol. 12, pp. 529–539.
25. Ladyzhenskaya O. A. *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics*, Applied Mathematical Sciences, vol. 49. New York, Springer-Verlag, 1985, xxx+322 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4317-3.
26. Samarskii A. A. *Teoriia raznostnykh skhem* [Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1983, 616 pp. (In Russian)
27. Samarskii A. A., Gulin A. B. *Ustoichivost' raznostnykh skhem* [Stability of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1973, 416 pp. (In Russian)