Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 26, № 3. С. 419–445
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1943
EDN: WJCOQD

УДК 519.853.53

Равномерная оптимизация управляемых систем с распределенными параметрами

Э. Я. Рапопорт

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Предлагается конструктивный метод решения широкого круга задач оптимального управления системами с распределенными параметрами, описываемыми линейными многомерными уравнениями в частных производных параболического типа в условиях заданной точности равномерного приближения конечного состояния объекта к требуемому пространственному распределению управляемой величины. Развиваемый подход сводится к упорядоченной совокупности специальных процедур последовательной параметризации управляющих воздействий на основе аналитических условий оптимальности; редукции к задаче полубесконечной оптимизации относительно искомого вектора параметров и ее решению разработанным ранее альтернансным методом построения параметризуемых алгоритмов программного управления, который распространяет на исследуемые задачи оптимизации результаты теории нелинейных чебышевских приближений и существенно использует фундаментальные закономерности предметной области. Показывается, что уравнения оптимальных регуляторов в типичных линейно-квадратичных задачах оптимизации описываются линейными с ограничениями алгоритмами обратной связи по измеряемому состоянию с нестационарными коэффициентами передачи и находятся по известным результатам расчета программных управлений при отсутствии классических условий трансверсальности на негладкой границе целевого множества. Полученные результаты распространяются на задачи поиска неизменных во времени пространственных управлений, рассматриваемых в роли искомых оптимальных проектных решений объекта.

Ключевые слова: равномерная метрика, системы с распределенными параметрами, альтернансный метод.

Получение: 17 июля 2022 г. / Исправление: 12 августа 2022 г. / Принятие: 18 августа 2022 г. / Публикация онлайн: 19 сентября 2022 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Научная статья

Образец для цитирования
Рапопорт Э. Я. Равномерная оптимизация управляемых систем с распределенными параметрами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 3. С. 419–445. EDN: WJCOQD. DOI: 10.14498/vsgtu1943.

Сведения об авторе
Эдгар Яковлевич Рапопорт https://orcid.org/0000-0002-0604-8801
доктор технических наук, профессор; профессор каф. автоматики и управления в технических системах; e-mail: edgar.rapoport@mail.ru

1. Введение

Одной из актуальных проблем в теории оптимального управления объектами с распределенными параметрами (ОРП) является разработка конструктивных методов решения задач перевода ОРП из заданного начального в требуемое конечное состояние с экстремальным значением заданного функционала качества.

В классической схеме с закрепленными концами траектории движения в бесконечномерном фазовом пространстве ОРП типичные для приложений требования, предъявляемые к пространственным распределениям управляемой величины в конце оптимального процесса, как правило, либо невыполнимы вследствие неуправляемости объекта относительно этих распределений (в том числе по типичной причине их несогласованности с граничными условиями начально-краевой задачи, моделирующей поведение ОРП), либо формально обеспечиваются в классе технически нереализуемых управляющих воздействий [1, 2].

Эффективный способ преодоления отмеченных затруднений состоит в отказе от жесткой фиксации требуемого конечного состояния ОРП уже на стадии постановки задачи оптимального управления (ЗОУ) с последующим переходом к заведомо разрешимой задаче при заданном целевом множестве, которое отвечает достижимым значениям оцениваемых в соответствующей метрике допусков на отклонение от номинальной точки, фиксируемой положением правого конца фазовой траектории в исходной двухточечной схеме [1, 3]. Как правило, в качестве такой оценки чаще всего используется среднеквадратичное отклонение от номинального конечного состояния. Гладкая граница такого целевого множества позволяет получить сравнительно простые алгоритмически точные аналитические решения ЗОУ в рамках линейных моделей ОРП с использованием классических условий трансверсальности [4, 5].

Однако формальные оценки точности попадания в заданное конечное состояние ОРП по величине среднеквадратичной ошибки приближения приводят к недопустимым для целого ряда актуальных прикладных задач локальным отклонениям управляемой величины от заданных значений в пределах пространственной области ее определения и при этом слабо ассоциируются с типичными для приложений требованиями [1,3,4]. Эти требования чаще всего формулируются в равномерной метрике в виде заданной максимально допустимой величины ошибки равномерного приближения конечного пространственного распределения управляемой величины к номинальному состоянию на заданном множестве его пространственных аргументов [1, 3, 4]. Соответствующее целевое множество автоматически исключает локальные «выбросы» ошибок приближения за допустимые пределы. В то же время такое множество допустимых состояний имеет сложную форму в фазовом пространстве ОРП с негладкой границей в конечной точке оптимального процесса [4,5]. В данном случае уже не удается использовать условия трансверсальности в их классическом виде и решение ЗОУ ОРП принципиально усложняется как раз применительно к ситуациям, представляющим самостоятельный теоретический интерес и наиболее характерным для приложений.

В работах [1, 3–5] предложен метод решения ЗОУ ОРП в условиях равномерной оценки целевых множеств, базирующийся на предварительной параметризации управляющих воздействий с помощью аналитических условий оптимальности и последующей редукции к специальной задаче математического программирования — задаче полубесконечной оптимизации, алгоритмически точные решения которой находятся предложенным ранее альтернансным методом, существенно использующим фундаментальные закономерности предметной области.

В настоящей работе полученные в [1, 3–5] результаты обобщаются применительно к более широкому классу задач оптимального программного и позиционного управления объектами с распределенными параметрами, описываемыми пространственно-многомерными уравнениями в частных производных параболического типа.

2. Математические модели управляемых процессов

Пусть управляемая функция состояния $Q(X,t)$ объекта с распределенными параметрами описывается в зависимости от времени $t \geqslant 0$ и пространственных координат $X \in V$, $X = (x_i)$, $i = \overline{1,k}$; $1 \leqslant k \leqslant 3$, в пределах односвязной области $V \ni X$ с кусочно-гладкой границей S линейным многомерным уравнением в частных производных второго порядка параболического типа:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \sum_{i=1}^{k} a_i(X)\frac{\partial^2 Q}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{k} b_i(X)\frac{\partial Q}{\partial x_i} + C(X)Q + u_V(X,t) \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$Q(X,0) = Q_0(x), \quad X \in \bar{V} = V \cup S; \tag{2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \Gamma} + \alpha Q = u_S(X,t), \quad X \in S, \tag{3}$$

внутренним $u_V(X,t)$ или(и) граничным $u_S(X,t)$ управляющими воздействиями, допустимыми в классе кусочно-непрерывных функций [5]. Здесь Γ — вектор внешней нормали к S; $\alpha = \mathrm{const} \geqslant 0$; заданная функция $Q_0(X)$ интегрируема с квадратом в области V и коэффициенты $a_i(X)$, $b_i(X)$, $C(X)$ являются достаточно гладкими функциями своих аргументов, причем не все $a_i(X)$ в (1) одновременно равны нулю.

Общее решение начально-краевой задачи (1)–(3), понимаемое в обобщенном смысле [6, 7], может быть получено в следующем виде [5, 8, 9]:

$$Q(X,t) = \int_0^t \int_V G(X,Y,t-\tau)u_V(X,\tau)dY d\tau + \int_V Q_0(Y)G(X,Y,t)dY + \\ + \int_0^t \int_S G(X,Y,t-\tau)u_S(Y,\tau)dS(Y)d\tau, \tag{4}$$

где функция Грина $G(X,Y,t-\tau)$ рассматриваемого ОРП определяется методом конечных интегральных преобразований [10] в форме ее разложения в сходящейся в среднем ряд по собственным функциям $\Phi_n(X)$, $\Phi_n(Y)$ задачи (1)–(3), вычисляемым с собственными числами M_n^2 известными способами [8, 10]:

$$G(X,Y,t-\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\Phi}_n(X)\hat{\Phi}_n(Y)r(Y)e^{-M_n^2(t-\tau)}, \quad \hat{\Phi}_n(X) = \frac{\Phi_n(X)}{\|\Phi_n\|}. \tag{5}$$

Здесь $\|\Phi_n\|$ — норма Φ_n; $r(Y)$ — весовая функция конечного интегрального преобразования.

Разложение $Q(X,t)$ в сходящийся в среднем ряд по ортогональной с весом $r(X)$ системе функций $\Phi_n(X)$ [8–10]

$$Q(X,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(t)\hat{\Phi}_n(X); \quad \bar{Q}_n(t) = \int_V Q(X,t)\hat{\Phi}_n(X)r(X)dX \tag{6}$$

приводит после подстановки (5), (6) в (4) к описанию модели объекта бесконечной системой соотношений для каждой из его модальных переменных (временны́х мод) $\bar{Q}_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$. Последующее дифференцирование этих соотношений по переменной t позволяет перейти к представлению ОРП (1)–(3) бесконечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\bar{Q}_n(t)$ (модальное описание ОРП) [5, 9]:

$$\begin{gathered}\frac{d\bar{Q}_n}{dt} = -M_n^2\bar{Q}_n + F_n(t); \quad \bar{Q}_n(0) = \bar{Q}_{0n};\\ F_n(t) = \bar{u}_{Vn}(t) + F_n^{(1)}(t), \quad n = 1, 2, \ldots .\end{gathered} \tag{7}$$

Здесь

$$\begin{gathered}\bar{u}_{Vn}(t) = \int_V u_V(X,t)\hat{\Phi}_n(X)r(X)dX,\\ F_n^{(1)}(t) = \int_S u_S(Y,t)\hat{\Phi}_n(Y)r(Y)dS(Y),\end{gathered} \tag{8}$$

а внутреннее управление $u_V(X,t)$ и начальное состояние $Q_0(X)$ восстанавливаются по их модальным составляющим $\bar{u}_{Vn}(t)$, $\bar{Q}_{0n}$ в форме разложения в ряд, подобно (6):

$$u_V(X,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_{Vn}(t)\hat{\Phi}_n(X), \quad Q_0(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_{0n}\hat{\Phi}_n(X). \tag{9}$$

Далее всюду будем рассматривать область $\bar{V}$ в форме параллелепипеда в декартовой системе координат $X = \{(x,y,z) : 0 \leqslant x \leqslant x_c;\ 0 \leqslant y \leqslant y_c;\ 0 \leqslant z \leqslant z_c\}$ с одним (для простоты) управлением $u_S(X,t) = u_c(x,y,t)$ на грани $z = z_c$. Случаи с $u(X,t)$ на других гранях или их совместное использование приводят к аналогичным результатам. Тогда поверхностный интеграл в (8) сводится к вычислению обыкновенного двойного интеграла по области $D = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant x_c;\ 0 \leqslant y \leqslant y_c\}$ и выражение для $F_n^{(1)}(t)$ в (8) принимает следующий вид [5, 9]:

$$F_n^{(1)}(t) = \bar{u}_{Sn}(t) = \int_D u_S(x,y,t)\hat{\Phi}_n^*(x,y)r_1(x,y)dxdy. \tag{10}$$

Здесь $\bar{u}_{Sn}(t)$ — моды граничного управления $u_S(x,y,t)$, определяемые подобно $\bar{u}_{Vn}(t)$ при известных собственных функциях $\hat{\Phi}_n^*(x,y)$ конечного интегрального преобразования $u_S(x,y,t)$, x, $y \in D$, а $u_S(x,y,t)$ определяется по известным модальным составляющим в форме разложения в ряд вида (9):

$$u_S(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\bar u_{Sn}(t)\hat\Phi_n^*(x,y). \tag{11}$$

В итоге равенство (10) приводит (вместо (7)) к модальному описанию ОРП системой уравнений

$$\frac{d\bar Q_n}{dt}=-M_n^2\bar Q_n+\bar u_{Vn}(t)+\bar u_{Sn}(t),\quad \bar Q_n(0)=\bar Q_{0n},\quad n=1,2,\ldots. \tag{12}$$

Можно показать [11, 12], что при выполнении усиленных условий Коши—Липшица система (12) имеет единственное решение при заданных воздействиях $\bar u_{Vn}(t)$, $\bar u_{Sn}(t)$, которое с любой требуемой точностью аппроксимируется решением укороченной системы, образуемой достаточно большим конечным числом N^* первых из уравнений (12) при $\bar Q_n(t)=0\ \forall\, n>N^*$. Далее всюду на этом основании учитываются N_1^* мод $\bar Q_n$, $n=\overline{1,N_1^*}$ в (6), (9), (12), где $N_1^*=\infty$ или $N_1^*=N^*<\infty$ в зависимости от используемой схемы анализа.

3. Постановка задачи оптимального управления

Пусть для рассматриваемого ОРП (1)–(3) применительно к его модальному описанию (12) требуется обеспечить за время t^* приближение конечного состояния объекта $Q\big(X,t^*\big)$ в форме его разложения в ряд (6) к заданному пространственному распределению управляемой величины $Q^*(X)$ с оцениваемой в равномерной метрике погрешностью $\varepsilon>0$ согласно соотношению

$$\max_{X\in\bar V}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\bar Q_n(t^*)\hat\Phi_n(X)-Q^*(X)\right|\leqslant\varepsilon. \tag{13}$$

Пусть применительно к рассматриваемому всюду далее случаю канонической формы области V и ее границы S качество управления ОРП характеризуется интегральным функционалом достаточно общего вида [5]:

$$I(\bar u_V,\bar u_S)=\int_0^{t^*}f_0(\bar Q(t),\bar u_V(t),\bar u_S(t),t)dt\to\min_{\bar u_V,\bar u_S}. \tag{14}$$

Здесь f_0 — заданная достаточно гладкая подынтегральная функция своих аргументов; $\bar Q(t)=(\bar Q_n(t))$, $\bar u_V(t)=(\bar u_{Vn}(t))$, $\bar u_S(t)=(\bar u_{Sn}(t))$ — векторы модальных составляющих соответственно управляемой величины, внутреннего и граничного управляющих воздействий, $n=1,2,\ldots$. При этом $u_V(X,t)$, $u_S(X,t)$ должны быть стеснены ограничениями:

$$u_{\min}\leqslant u(X,t)\leqslant u_{\max},\quad 0\leqslant t\leqslant t^* \tag{15}$$

с заданными границами диапазона их возможных изменений, где

$$u(X,t)=u_V(X,t),\quad X\in V\quad\text{или}\quad u(X,t)=u_S(X,t),\quad X\in S, \tag{16}$$

и всюду далее для простоты без потери общности основных результатов исключается вариант одновременного использования обоих управлений. В итоге задача сводится к отысканию оптимальных программных управляющих воздействий

$$\begin{aligned}&\bar{u}^*(t) = \bar{u}_V^*(t) \quad \text{или} \quad \bar{u}^*(t) = \bar{u}_S^*(t); \quad \bar{u}(t) = (\bar{u}_n(t));\\ &\bar{u}_n(t) = \bar{u}_{Vn}(t) \quad \text{или} \quad \bar{u}_n(t) = \bar{u}_{Sn}(t); \quad n = 1, 2, \ldots\end{aligned} \tag{17}$$

и соответствующей $\bar{u}^*(t)$ оптимальной траектории $\bar{Q}_{\text{opt}}(t)$, обеспечивающих выполнение требования (13) к конечному состоянию объекта при минимальном значении функционала качества (14) в условиях ограничений (15), стесняющих поведение $\bar{u}(t)$ при восстановлении $u(X,t)$ по значениям $\bar{u}(t)$ в форме рядов вида (9), (11).

4. Метод параметрической оптимизации управляющих воздействий

Краевая задача принципа максимума. На бесконечномерную задачу оптимального управления (12)–(15) распространяется принцип максимума Понтрягина [1, 13]. Базовое условие

$$H\big(\bar{Q}_{\text{opt}}(t), \bar{u}^*(t), \psi_{\text{opt}}(t)\big) = \max_{\bar{u}} H\big(\bar{Q}_{\text{opt}}(t), \bar{u}(t), \psi_{\text{opt}}(t)\big), \quad t \in [0, t^*] \tag{18}$$

достижения на соответствующих оптимальному процессу величинах $\bar{Q}_{\text{opt}}(t)$, $\bar{u}^*(t)$, $\psi_{\text{opt}}(t)$ максимума функции Понтрягина

$$H\big(\bar{Q}(t), \bar{u}(t), \psi(t)\big) = -f_0(\bar{Q}, \bar{u}, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t)\big(-M_n^2 \bar{Q}_n + \bar{u}_n(t)\big) \tag{19}$$

по векторному аргументу $\bar{u}(t)$ совместно с уравнениями

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{Q}_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{20}$$

описывающими вектор $\psi(t) = (\psi_i(t))$ сопряженных переменных, уравнениями (12) модели объекта и ограничениями (15) составляют программно управляемую систему (П-систему) [5, 14], замыкаемую относительно всех неизвестных требованиями (13) к конечному состоянию $Q(X, t^*)$ управляемой величины.

Решение П-системы формально определяет искомые экстремали с точностью до вектора начальных значений сопряженных функций, выступающих, таким образом, в роли естественного параметрического представления искомых управлений $\bar{u}^*(t)$ [14–16]. Однако для объектов с распределенными параметрами такой способ параметризации оказывается некоструктивным прежде всего в силу бесконечной размерности этого вектора и известных затруднений, возникающих при решении П-системы [14–16].

Параметризация управляющих воздействий. В работе [17] предложен реализуемый в процессе решения П-системы специальный способ последовательной конечномерной параметризации программных управляющих воздействий («ψ-параметризация») на множестве N-мерных векторов $\psi^{(N)} = (\widetilde{\psi}_i)$,

$i = \overline{1, N}$, $\widetilde{\psi}_i = \psi_i(t^*)$, $N < N_1^* \leqslant \infty$, конечных значений $\widetilde{\psi}_i$ первых N сопряженных функций в (20) при равных нулю всех остальных значениях $\psi_i(t^*)$:

$$\psi^{(N)} = (\psi_i(t^*)) = (\widetilde{\psi}_i), \quad i = \overline{1, N}; \quad \psi_i(t^*) = 0 \; \forall\, i > N \geqslant 1. \tag{21}$$

Интегрирование уравнений П-системы в условиях ψ-параметризации (21) позволяет получить конечное состояние управляемой величины, управляющие воздействия и значения критерия оптимальности в форме явных функций $Q(X, \psi^{(N)})$, $\bar{u}(t, \psi^{(N)})$ и $I(\psi^{(N)})$ от своих аргументов, определяя тем самым искомое управление $\bar{u}^*(t, \psi^{(N)})$ с точностью до выбора оптимального вектора параметров $\psi^{(N)} = \psi_*^{(N)} = (\widetilde{\psi}_i^*)$, $i = \overline{1, N}$, к нахождению которого и сводится дальнейшая задача.

Редукция к задаче полубесконечной оптимизации и альтернансный метод ее решения. Минимально достижимые в классе параметризуемых управлений $\bar{u}(t, \psi^{(N)})$ значения $\varepsilon_{\min}^{(N)}$ ошибки ε равномерного приближения $Q(X, t^*)$ к $Q^*(X)$ определяются, согласно (13), соотношением

$$\begin{gathered}
\varepsilon_{\min}^{(N)} = \min_{\psi^{(N)} \in E^N} \Big\{ \max_{X \in \bar{V}} \big| Q(X, \psi^{(N)}) - Q^*(X) \big| \Big\} = \\
= \max_{X \in \bar{V}} \big| Q(X, \psi_0^{(N)}) - Q^*(X) \big|, \\
\psi_0^{(N)} = \arg\Big\{ \min_{\psi^{(N)} \in E^N} \Big[\max_{X \in \bar{V}} \big| Q(X, \psi^{(N)}) - Q^*(X) \big| \Big] \Big\}, \\
\psi_0^{(N)} = (\widetilde{\psi}_{0i}), \quad i = \overline{1, N}.
\end{gathered} \tag{22}$$

Вектор $\psi_0^{(N)}$ совпадает по определению (21) с вектором $\hat{\psi}^{(N+1)}$ с нулевой компонентой $\widetilde{\psi}_{N+1}$:

$$\psi_0^{(N)} = \hat{\psi}^{(N+1)} = (\widetilde{\psi}_{0i},\ i = \overline{1, N};\ \widetilde{\psi}_{N+1} = 0).$$

В типичных условиях существования отрицательной производной $\partial L(\hat{\psi}^{(N+1)})/\partial \omega < 0$ функции максимума

$$L(\psi^{(N+1)}) = \max_{X \in \bar{V}} \big| Q(X, \psi^{(N+1)}) - Q^*(X) \big| \tag{23}$$

по некоторому направлению $\omega \in E^{N+1}$ при $\varepsilon_{\min}^{(N)} > \varepsilon_{\inf}$ [3], где $\varepsilon_{\inf}$ — точная нижняя грань возможных значений ε в (13), оказывается достижимой точность равномерного приближения в классе управлений $\bar{u}(t, \psi^{(N+1)})$:

$$\varepsilon = \varepsilon' = \max_{X \in \bar{V}} \big| Q(X, \psi^{(N+1)}) - Q^*(X) \big| < \varepsilon_{\min}^{(N)}$$

при некотором векторе $\psi^{(N+1)}$, отличном от $\hat{\psi}^{(N+1)}$.

Последнее неравенство означает, что $\varepsilon_{\min}^{(N+1)} < \varepsilon_{\min}^{(N)}$, если $\varepsilon_{\min}^{(N)} > \varepsilon_{\inf}$.

Отсюда следует, что ошибки минимакса в (22) уменьшаются с возрастанием N, образуя строго убывающую цепочку неравенств

$$\varepsilon_{\min}^{(1)} > \varepsilon_{\min}^{(2)} > \cdots > \varepsilon_{\min}^{(j)} > \varepsilon_{\min}^{(j+1)} > \cdots > \varepsilon_{\min}^{(\rho)} = \varepsilon_{\inf}, \tag{24}$$

где $\rho = \infty$ при $\varepsilon_{\inf} = 0$ и $\rho < \infty$ при $\varepsilon_{\inf} > 0$ соответственно для управляемых и неуправляемых относительно $Q^*(X)$ моделей объекта [3,17]. В случае, когда $\varepsilon < \varepsilon_{\inf}$ в (13), решения рассматриваемой задачи оптимального управления не существует.

Неравенства (24) характеризуют сужающиеся к $Q^*(X)$ с возрастанием j семейства целевых множеств для $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(j)}$ в (13), создавая возможности обеспечения достижимой точности равномерного приближения к $Q^*(X)$ при $\varepsilon > \varepsilon_{\inf}$ в (13) в процессе последовательной ψ-параметризации управляющих воздействий с конечномерным вектором параметров $\psi^{(N)}$, $N < N_1^*$, для ряда возрастающих значений N в (21).

В результате перехода к ψ-параметризованной форме $Q(X, \psi^{(M)})$ и $I(\psi^{(M)})$ представления $Q(X, t^*)$ в (6), (13) и $I(\bar{u})$ в (14) осуществляется точная редукция исходной задачи оптимального управления к задаче полубесконечной оптимизации (ЗПО) [1, 3–5]:

$$I(\psi^{(N)}) \to \min_{\psi^{(N)}}; \quad \max_{X \in \bar{V}} \left| Q(X, \psi^{(N)}) - Q^*(X) \right| \leqslant \varepsilon \tag{25}$$

на экстремум функции $I(\psi^{(N)})$ конечного числа N переменных $\widetilde{\psi}_i$, $i = \overline{1, N}$, в (21) с бесконечным числом ограничений, порождаемых требованием выполнения условия (13) для всех $X \in \bar{V}$ и заменяемых в (25) одним ограничением на функцию максимума $L(\psi^{(N)})$ в (23).

Принципиальным преимуществом метода ψ-параметризации по сравнению с выбором в качестве параметрического представления управляющих воздействий вектора начальных значений сопряженных переменных является установленное в [17] однозначное соответствие между размерностью N вектора $\psi^{(N)}$ и местом заданной величины ε в цепочке неравенств (24) для задачи (25) согласно соотношению

$$N = \vartheta \quad \forall \varepsilon : \varepsilon_{\min}^{(\vartheta)} \leqslant \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(\vartheta - 1)}, \ \vartheta \leqslant \rho. \tag{26}$$

Поскольку в условиях $\varepsilon_{\min}^{(\vartheta)} \leqslant \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(\vartheta - 1)}$ заведомо $N \geqslant \vartheta$ по определению величины $\varepsilon_{\min}^{(\vartheta)}$ в (22), то ψ-параметризуемое управление отличается минимально возможной размерностью вектора параметров $\psi^{(N)}$ для заданного значения ε, устанавливая тем самым структуру оптимальных программных управлений минимальной сложности в условиях (13).

Решение задачи полубесконечной оптимизации (25), (26) относительно вектора параметров $\psi^{(N)}$, а также заранее неизвестной величины минимакса $\varepsilon_{\min}^{(\vartheta)}$ в (26) в случае, когда $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(\vartheta)}$, может быть получено в условиях малостеснительных ограничений альтернансным методом [1, 3, 5]. Метод базируется на специальных альтернансных свойствах искомого решения $\psi_*^{(N)} = (\widetilde{\psi}_i^*)$, $i = \overline{1, N}$, задачи (25), являющихся аналогом условий экстремума в теории нелинейных чебышевских приближений, и дополнительной информации о конфигурации пространственного распределения результирующего состояния $Q(X, \psi_*^{(N)})$ управляемой величины, диктуемой закономерностями предметной области.

Согласно альтернансным свойствам, равные допустимой величине ε значения функции максимума $L(\psi_*^{(N)})$ в (23) достигаются в некоторых точках $X_j^0 \in \bar{V}$, $j = \overline{1, R}$, общее число которых R (в выполняющихся, как правило, условиях $R \geqslant 2$) оказывается равным числу всех искомых параметров оптимального процесса, к которым относятся $\tilde{\psi}_i^*$, $i = \overline{1, N}$, а также величина $\varepsilon_{\min}^{(N)}$, если в (26) $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(N)}$ [2,3]:

$$R = \begin{cases} N, & \text{если } \varepsilon_{\min}^{(N)} < \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(N-1)}; \\ N+1, & \text{если } \varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(N)}, \end{cases} \quad R \geqslant 2. \tag{27}$$

Указанные альтернансные свойства порождают замкнутую относительно всех неизвестных систему соотношений

$$\left| Q(X_j^0, \psi_*^{(N)}) - Q^*(X_j^0) \right| = \varepsilon, \quad j = \overline{1, R}. \tag{28}$$

При известной форме зависимостей $Q(X, \psi_*^{(N)})$ от $X \in \bar{V}$, которая определяется базовыми свойствами конкретных оптимизируемых процессов и позволяет идентифицировать точки X_j^0, $j = \overline{1, R}$, и знаки предельно допустимых отклонений $Q(X_j^0, \psi_*^{(N)}) - Q^*(X_j^0)$, равенства (28), дополненные условиями существования экстремума функции $Q(X, \psi_*^{(N)}) - Q^*(X)$ в точках $X_{jg}^0 \in \operatorname{int} \bar{V}$, $g = \overline{1, R_1}$, где $R_1 \leqslant R$ и $X_{jg}^0 \in \{X_j^0\}$, переводятся в систему уравнений

$$\begin{aligned} &Q(X_j^0, \psi_*^{(N)}) - Q^*(X_j^0) = \pm\varepsilon, \quad j = \overline{1, R}; \\ &\frac{\partial}{\partial X}\left[Q(X_{jg}^0, \psi_*^{(N)}) - Q^*(X_{jg}^0)\right] = 0, \quad g = \overline{1, R_1} \end{aligned} \tag{29}$$

с однозначно определяемым знаком ε в каждой точке X_j^0.

Решением системы уравнений (29) стандартными численными методами относительно всех искомых неизвестных, включая значения X_{jg}^0, $g = \overline{1, R_1}$, завершается процедура определения $\psi_*^{(N)}$ и оптимального программного управления $\bar{u}(t, \psi_*^{(N)})$ в виде явной функции временного аргумента, по которой искомые программные управляющие воздействия $u^*(X, t)$ находятся в форме разложения в ряд вида (9), (11).

Явное выражение для зависимости $Q(X_j^0, \psi_*^{(N)})$ от всех аргументов в (29) представляется в форме ряда вида (6), где значения модальных переменных $\bar{Q}_n(t^*) = \bar{Q}_n(\psi^{(N)})$ в конце оптимального процесса вычисляются в результате решения П-системы (12), (15), (18)–(20) с параметризованным управлением $\bar{u}(t, \psi^{(N)})$. Если при этом по исходным требованиям $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(\vartheta)}$ в (25) при заданном ϑ, то решение задачи (25) непосредственно сводится к решению системы уравнений (29) при $N = \vartheta$, $R = \vartheta + 1$ согласно (26), (27).

Если в (29) ε задается конкретным числом ε_0, то на первом этапе требуется решить систему уравнений (29) при $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(k)}$ для возрастающего ряда значений $k = 1, 2, \ldots, \vartheta_1$, где ϑ_1 находится из условия $\varepsilon_{\min}^{(\vartheta_1)} < \varepsilon_0 < \varepsilon_{\min}^{(\vartheta_1 - 1)}$. В случае $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(\vartheta_1)}$ исходная задача оказывается уже решенной. В случае

$\varepsilon_{\min}^{(\vartheta_1)} < \varepsilon_0 < \varepsilon_{\min}^{(\vartheta_1-1)}$ получаем, что $N = \vartheta_1$ согласно правилу (26), и на втором этапе остается решить систему уравнений (29) при известном ε_0 относительно вектора $\psi_*^{(N)}$ с найденной и априори нефиксируемой размерностью $N = \vartheta_1$ при $R = \vartheta_1$ в соответствии с правилом (27).

Описанная базовая технология альтернансного метода решения ЗОУ ОРП широко апробирована на целом ряде задач управления объектами технологической теплофизики [1, 3–5, 17–24].

5. Программное управление в линейно-квадратичных задачах оптимизации

Одной из центральных в теории оптимального управления объектами с распределенными параметрами является задача оптимизации поведения линейных моделей ОРП по квадратичным критериям качества [1, 25–29]. В данном случае аппарат принципа максимума позволяет непосредственно получить искомые управляющие воздействия в ψ-параметризованном виде и предлагаемая методология решения задачи оптимального программного управления реализуется в аналитической форме алгоритмически точных вычислительных процедур. Пусть эффективность управления объектом (1)–(3) оценивается квадратичным интегральным функционалом, определяемым далее для простоты без потери общности основных результатов в следующем типичном виде:

$$I(u) = \int_0^{t^*} \left[\int_V r(X)\big(\rho_Q Q^2(X,t) + u_V^2(X,t)\big)dX + \right.$$
$$\left. + \int_D r_1(x,y)u_S^2(x,y,t)dxdy\right]dt \to \min_u \quad (30)$$

с постоянным весовым коэффициентом ρ_Q.

Переход к описанию ОРП в терминах модальных переменных в форме системы уравнений (12) приводит в силу разложения в ряды (6), (9), (11) по ортонормированному семейству собственных функций к представлению критерия (30) в следующем, подобном (14), виде в условиях (17):

$$I_1(\bar u) = \int_0^{t^*} f_0 dt = \int_0^{t^*} \left[\rho_Q \sum_{n=1}^{N_1^*} \bar Q_n^2(t) + \sum_{n=1}^{N_1^*} \bar u_n^2(t)\right]dt \to \min_{\bar u}, \quad \bar u = (\bar u_n). \quad (31)$$

В соответствии с рассматриваемой постановкой задачи оптимального управления требуется найти управляющее воздействие $\bar u^*(t)$ и оптимальную траекторию $\bar Q_{opt}(t)$, обеспечивающие перевод объекта (12) за заранее фиксируемое время t^* в заданное целевое множество (13) с минимальным значением функционала (31) в условиях ограничений (15).

Условие максимума (18) в задаче оптимизации (12), (13), (15), (31) определяет каждое из искомых автономных управлений $\bar u_n^*(t)$ в форме явной функции от соответствующей сопряженной переменной $\psi_n(t)$ независимо от других составляющих $\bar u^*(t)$:

$$\bar u_n^*(t) = \bar u_{n\min}, \quad \text{если} \ \ \tfrac{1}{2}\psi_n^*(t) < \bar u_{n\min}; \quad (32)$$

$$\bar{u}_n^*(t) = \tfrac{1}{2}\psi_n(t), \quad \text{если} \quad \bar{u}_{n\,\min} \leqslant \tfrac{1}{2}\psi_n^*(t) \leqslant \bar{u}_{n\,\max}, \quad n = \overline{1, N_1^*}; \tag{33}$$

$$\bar{u}_n^*(t) = \bar{u}_{n\,\max}, \quad \text{если} \quad \tfrac{1}{2}\psi_n^*(t) > \bar{u}_{n\,\max}, \tag{34}$$

где $\bar{u}_{n\,\min}$, $\bar{u}_{n\,\max}$ — ограничения на $\bar{u}_n(t)$, связанные общим для всех $n = \overline{1, N_1^*}$ условием (15), стесняющим распределенное управление $u(X,t)$.

Если в (15), (16) на некотором временном промежутке $u(X,t) = u_V(X,t) \equiv \equiv u_{V\,\max}$ или $u(X,t) = u_S(X,t) \equiv u_{S\,\max}$, либо $u_V(X,t) \equiv u_{V\,\min}$, $u_S(X,t) \equiv \equiv u_{S\,\min}$, то отвечающие этим значениям $u(X,t)$ величины $\bar{u}_n(t)$ определяются согласно (8), (10):

$$\begin{aligned} &\bar{u}_{n\,\max} = \bar{u}_{Vn\,\max} = u_{V\,\max} I_{Vn} \quad \text{или} \quad \bar{u}_{n\,\max} = \bar{u}_{Sn\,\max} = u_{S\,\max} I_{Sn}; \\ &\bar{u}_{n\,\min} = \bar{u}_{Vn\,\min} = u_{V\,\min} I_{Vn} \quad \text{либо} \quad \bar{u}_{n\,\min} = \bar{u}_{Sn\,\min} = u_{S\,\min} I_{Sn}. \end{aligned} \tag{35}$$

Здесь

$$I_{Vn} = \int_V \widehat{\Phi}_n(X) r(X) dX; \quad I_{Sn} = \int_D \widehat{\Phi}_n^*(x,y) r_1(x,y) dx dy. \tag{36}$$

5.1. Управление в открытой области изменения управляющих воздействий

Ограничимся здесь типичным для линейно-квадратичных задач случаем линейной зависимости $\bar{u}_n^*(t)$ от сопряженной переменной, согласно (33), считая, что ограничения (15) не достигаются на всем протяжении оптимального процесса. Подобный подход позволяет, во-первых, определить минимально достижимое значение критерия оптимальности (31) и, во-вторых, установить по полученным результатам уровни $u_{\max}$ и $u_{\min}$ в (15), необходимые для реализации максимального эффекта по величине I в (31).

Каждое из уравнений (12) после подстановки модального управления $\bar{u}_n^*(t)$ в виде (33) образует совместно с соответствующим уравнением (20) для сопряженной переменной линейную программно-управляемую П-систему второго порядка относительно двух переменных $\bar{Q}_n$ и ψ_n для каждого $n = \overline{1, N_1^*}$:

$$\frac{d\psi_n}{dt} = 2\rho_Q \bar{Q}_n + M_n^2 \psi_n, \quad \frac{d\bar{Q}_n}{dt} = -M_n^2 \bar{Q}_n + \tfrac{1}{2}\psi_n, \tag{37}$$

замыкаемую требованиями к ее конечному состоянию, которые считаются заданными исходя из общего для всех $n = \overline{1, N_1^*}$ условия (13).

Решение этой системы представляется в известной векторно-матричной форме

$$\begin{bmatrix} \psi_n(t) \\ \bar{Q}_n(t) \end{bmatrix} = e^{A_n t} \begin{bmatrix} \psi_n(0) \\ \bar{Q}_n(0) \end{bmatrix}, \quad e^{A_n t} = \begin{bmatrix} A_{n11}(t) & A_{n12}(t) \\ A_{n21}(t) & A_{n22}(t) \end{bmatrix}, \tag{38}$$

где A_n — 2×2-матрица коэффициентов системы (37); $e^{A_n t}$ — матричная экспонента и A_{nks}, k, $s = 1, 2$, — заданные в соответствии со структурой уравнений (37) элементы блочного представления $e^{A_n t}$.

Перенос (прогонка) начальных условий в (38) в заданный конечный момент времени t^* приводит по приведенной в [22] схеме к следующему выражению для каждой из сопряженных функций $\psi_{n\text{opt}}(t)$ в оптимальном процессе в зависимости от их конечных значений $\psi_{n\mathrm{opt}}(t^*)$ и начального состояния объекта $\bar{Q}_n(0)$:

$$\begin{aligned} &\psi_{n\,\mathrm{opt}}(t) = K_n(t,t^*)\psi_{n\,\mathrm{opt}}(t^*) + K_{1n}(t,t^*)\bar{Q}_n(0), \quad n=\overline{1,N_1^*};\\ &K_n(t,t^*) = \hat{A}_{n11}(t^*-t) + \hat{A}_{n12}(t^*-t)B_n(t^*);\\ &K_{1n}(t,t^*) = \hat{A}_{n12}(t^*-t)B_{1n}(t^*). \end{aligned} \tag{39}$$

Здесь $\hat{A}_{nks}$ — подобные (38) элементы обратной матрицы $e^{-A_n(t^*-t)}$, и

$$\begin{aligned} &B_n(t^*) = A_{n21}(t^*)A_{n11}^{-1}(t^*);\\ &B_{1n}(t^*) = A_{n22}(t^*) - A_{n21}(t^*)A_{n11}^{-1}(t^*)A_{n12}(t^*). \end{aligned} \tag{40}$$

При определении $\psi_{\mathrm{opt}}(t^*)$ в параметризованной форме (21) будем иметь, согласно (33), (39):

$$\bar{u}_n^*(t) = \tfrac{1}{2}\psi_{n\,\mathrm{opt}}(t) = \begin{cases} \tfrac{1}{2}K_n(t,t^*)\widetilde{\psi}_n^* + \tfrac{1}{2}K_{1n}(t,t^*)\bar{Q}_n(0), & n \leqslant N;\\ \tfrac{1}{2}K_{1n}(t,t^*)\bar{Q}_n(0), & n > N, \end{cases} \tag{41}$$

где $\widetilde{\psi}_n^*$ — значения $\widetilde{\psi}$ в (21), соответствующие оптимальному процессу и $\psi_*^{(N)} = (\widetilde{\psi}_n^*)$, $n=\overline{1,N}$.

В итоге получаем ψ-параметризованную форму оптимального пространственно-временного управления, восстанавливаемого по значениям $\bar{u}_n^*(t)$ в (41) в форме его разложения в ряды (9) или (11):

$$u^*(X,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} K_n(t,t^*)\widetilde{\psi}_n^*\hat{\Phi}_{1n}(X) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N_1^*} K_{1n}(t,t^*)\bar{Q}_n(0)\hat{\Phi}_{1n}(X), \tag{42}$$

заданные с точностью до выбора оптимального вектора параметров $\psi_*^{(N)} = (\widetilde{\psi}_n^*)$, $i=\overline{1,N}$, к определению которого и сводится последующая задача.

Здесь в (42) $\hat{\Phi}_{1n}(X) = \hat{\Phi}_n(X)$, если $u^*(X,t) = u_V^*(X,t)$ или $\hat{\Phi}_{1n}(X) = \hat{\Phi}_n^*(x,y)$, если $u^*(X,t) = u_s^*(X,t)$, согласно (9), (11), (16), (17).

Последующий переход к задаче полубесконечной оптимизации (25) приводит в силу альтернансных свойств (27) к замкнутой системе равенств (28) относительно оптимальной величины $\psi_*^{(N)}$ вектора $\psi^{(N)}$.

Здесь явное выражение для зависимости $Q(X_j^0, \psi_*^{(N)})$ от своих аргументов представляется в форме ряда

$$Q(X_j^0, \psi_*^{(N)}) = \sum_{n=1}^{N_1^*} \bar{Q}_n(\psi_*^{(N)})\hat{\Phi}_{1n}(X_j^0), \quad j=\overline{1,R}, \tag{43}$$

где значения модальных переменных $\bar{Q}_{n\,\mathrm{opt}}(t^*)$ в конце оптимального процесса находятся, согласно (37), (38), в подобном (39) виде [24]:

$$\bar{Q}_{n\,\mathrm{opt}}(t^*) = \bar{Q}_n(\psi_*^{(N)}) = B_n(t^*)\psi_{n\,\mathrm{opt}}(t^*) + B_{1n}(t^*)\bar{Q}_n(0), \quad n=1,N_1, \tag{44}$$

при определении $\psi_{n\,\mathrm{opt}}(t^*)$ в виде (21).

Базовые закономерности конкретной предметной области рассматриваемой ЗОУ ОРП позволяют перевести равенства (28) в систему уравнений вида (29), разрешаемую относительно всех неизвестных параметров оптимального процесса.

Программное управление с минимальным энергопотреблением. Критерий оптимальности (31) при $\rho_Q = 0$ оценивается интегральным функционалом

$$I_2(\bar{u}) = \int_0^{t^*} \left[\sum_{n=1}^{N_1^*} \bar{u}_n^2(t)\right] dt \to \min_{\bar{u}}, \tag{45}$$

в типичных ситуациях характеризующим расход энергии на процесс управления [21, 23, 26].

Условие (18) максимума функции Понтрягина определяет в данном случае каждое из модальных управлений $\bar{u}_n^*(t)$ в открытой области его изменения в форме (33).

При этом уравнения для сопряженных переменных в (37) не зависят от временных мод $\bar{Q}_n$ при $\rho_Q = 0$:

$$\frac{d\psi_n}{dt} = M_n^2 \psi_n, \quad n = \overline{1, N_1^*},$$

откуда следует, что $\psi_{\text{opt}}(t)$ и $\bar{u}_n^*(t)$ непосредственно определяется согласно (33), (45), в явной экспоненциальной форме с точностью до конечных значений $\psi(t^*)$:

$$\bar{u}_n^*(t) = \tfrac{1}{2}\psi_{n\,\text{opt}}(t) = \psi_{n\,\text{opt}}(t^*)e^{-M_n^2(t^*-t)}, \quad n = \overline{1, N_1^*},$$

в отличие от общего случая $\rho_Q > 0$, требующего решения П-системы (37) для вычисления $\bar{u}_n^*(t)$ в явном виде (41).

При определении $\psi_{n\,\text{opt}}(t^*)$ в ψ-параметризованной форме (21) будем иметь вместо (41)

$$\bar{u}_n^*(t) = \widetilde{\psi}_n^* e^{-M_n^2(t^*-t)}, \quad n = \overline{1, N}; \quad \bar{u}_n^*(t) = 0, \quad n > N$$

с последующим восстановлением $u^*(X, t)$ в виде суммы N членов ряда (9) или (11) вместо (42):

$$u^*(X, t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \widetilde{\psi}_n^* e^{-M_n^2\left(t^*-t\right)} \widehat{\Phi}_{1n}(X).$$

Дальнейшее решение задачи программного управления производится по схеме общего случая $\rho_Q > 0$.

5.2. Управление с ограничениями на характер пространственно-временного распределения управляющих воздействий

В прикладных задачах во многих случаях используются частные варианты представления искомых управляющих воздействий $u(X, t)$ в (4), (16), заведомо обеспечивающие их осуществимость стандартными техническими средствами [1, 2, 21, 24].

Редукция к задаче многоканального сосредоточенного управления. Во многих типичных ситуациях $u(X,t)$ в (4), (16) может быть представлена в форме взвешенной суммы заранее фиксируемых проектными решениями объекта и заведомо технически реализуемых (чаще всего кусочно-постоянных) зависимостей $g_m(X)$, $m=\overline{1,s}$; $s \geqslant 1$ от пространственного аргумента с весовыми коэффициентами, в роли которых выступают искомые сосредоточенные управляющие воздействия $w_m(t)$ [1, 2, 9, 21, 24]:

$$u(X,t) = \sum_{m=1}^{s} g_m(X) w_m(t), \quad s \geqslant 1. \tag{46}$$

В данном случае в (12), (17), (19)

$$\bar{u}_n(t) = \sum_{m=1}^{s} \bar{g}_{mn} w_m(t), \quad n = \overline{1, N_1^*}, \tag{47}$$

где моды $\bar{g}_{mn}$ разложения $g_m(X)$ в ряды вида (9) или (11) находятся согласно (8), (10):

$$\bar{g}_{mn} = \int_V g_m(X)\widehat{\Phi}_n(X) r(X) dX \quad \text{или} \quad \bar{g}_{mn} = \int_D g_m(x,y)\widehat{\Phi}_n^*(x,y) r_1(x,y)\, dx dy, \tag{48}$$

если $\bar{u}_n(t) = \bar{u}_{Vn}(t)$ или $\bar{u}_n(t) = \bar{u}_{sn}(t)$ соответственно.

При этом критерий оптимальности с учетом суммирования эффекта многоканального сосредоточенного управления принимает вместо (31) следующий вид:

$$I_3(w) = \int_0^{t^*} \left[\rho_Q \sum_{n=1}^{N_1^*} \bar{Q}_n^2(t) + \sum_{m=1}^{s} w_m^2(t) \right] dt \to \min_w; \quad w = (w_m). \tag{49}$$

Рассматриваемая линейно-квадратичная задача программного управления сводится к определению s сосредоточенных управлений $w_m^*(t)$, $m = \overline{1,s}$, в открытой области их определения, переводящих объект управления (12), (47) в требуемое конечное состояние (13) при минимально возможном значении критерия оптимальности (49).

Стандартная процедура принципа максимума определяет по прежней схеме при подстановке $\bar{u}_n(t)$ в уравнения объекта (12) в виде (47) оптимальные программные сосредоточенные управления:

$$w_m^*(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_1^*} \bar{g}_{mn} \psi_n(t) = \frac{1}{2} \bar{g}_m \psi(t), \quad \bar{g}_m = (g_{mn}), \quad m = \overline{1,s} \tag{50}$$

теперь уже в форме взвешенной суммы всех N_1^* сопряженных переменных, в отличие от (33). Здесь $\bar{g}_m$ — матрица-строка, $\psi(t)$ — матрица-столбец.

Уравнения (12) с управляющими воздействиями (47), (50) образуют совместно с сопряженной системой (20) краевую задачу принципа максимума относительно $2N_1^*$ переменных $\bar{Q}_n$, ψ_n; $n=\overline{1,N_1^*}$, в отличие от (37):

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_n}{dt} &= 2\rho_Q\bar{Q}_n + M_n^2\psi_n(t), && n=\overline{1,N_1^*};\\ \frac{d\bar{Q}_n}{dt} &= -M_n^2\bar{Q}_n + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{s}\bar{g}_{mn}\sum_{p=1}^{N_1^*}\bar{g}_{mp}\psi_p(t), && n=\overline{1,N_1^*}, \end{aligned} \tag{51}$$

решение которой относительно $\psi_{\mathrm{opt}}(t)$ определяется по аналогичной (37)–(39) схеме в подобном (39) векторно-матричном виде:

$$\psi_{\mathrm{opt}}(t) = K(t,t^*)\psi_{\mathrm{opt}}(t^*) + K_1(t,t^*)\bar{Q}(0); \quad \bar{Q}(0) = (\bar{Q}_n(0)), \quad n=\overline{1,N_1^*}. \tag{52}$$

Здесь матрицы K и K_1 вычисляются по формулам (39), (40) с заменой всех элементов A_{nks} и $\hat{A}_{nks}$, k, $s=1,2$, на известные, согласно структуре системы уравнений (51); $N_1^*\times N_1^*$ — матрицы A_{ij} и $\hat{A}_{ij}$, i, $j=1,2$, блочного представления матричной экспоненты e^{At} этой системы и обратной матрицы $e^{-A(t^*-t)}$ соответственно [24].

Искомое программное управление (50) находится в ψ-параметризованном виде (21) после подстановки в (50) выражения (52):

$$w_m^*(t) = \tfrac{1}{2}\bar{g}_m\big[K(t,t^*)\psi_{\mathrm{opt}}(t^*) + K_1(t,t^*)\bar{Q}(0)\big], \quad m=\overline{1,s}.$$

Дальнейшее решение задачи производится по общей схеме, описанной в разделах 4, 5.1.

В отличие от случая автономного модального управления зависимость $Q(X,\psi_*^{(N)})$ в системах уравнений альтернансного метода определяется в форме (43) с заменой покоординатного представления $\bar{Q}_n(t^*)$ в (44) векторным равенством [24]:

$$\begin{aligned} &\bar{Q}(\psi_*^{(N)}) = B(t^*)\psi_{\mathrm{opt}}(t^*) + B_1(t^*)\bar{Q}(0);\\ &B(t^*) = A_{21}(t^*)A_{11}^{-1}(t^*);\\ &B_1(t^*) = A_{22}(t^*) - A_{21}(t^*)A_{11}^{-1}(t^*)A_{12}(t^*), \end{aligned} \tag{53}$$

где $\psi_{\mathrm{opt}}(t^*)$ определяется в соответствии с (21) и, согласно (6),

$$Q(X,\psi_*^{(N)}) = \Lambda\bar{Q}(\psi_*^{(N)}), \quad \Lambda = [\hat{\Phi}_n(X)], \quad n=\overline{1,N_1^*}.$$

Если можно ограничиться учетом только $N^*=N$ мод $\bar{Q}_n$ при $n=\overline{1,N}$ и если возможен выбор $s=N$ в (46), то равенства (47) при $n=\overline{1,N}$, $N=s$ образуют линейную систему уравнений относительно $w_m^*(t)$, $m=\overline{1,s}$, для заданных значений $\bar{u}_n^*(t)$ в (41), решение которой определяется формулами Крамера непосредственно по решению задачи с автономными модальными управлениями:

$$w_m^*(t) = \sum_{n=1}^{s}\frac{D_{mn}^*}{D^*}\bar{u}_n^*(t), \quad m=\overline{1,s},$$

где $D^*=\det[\bar{g}_{mn}]$, m, $n=\overline{1,s}$; D_{mn}^* — алгебраическое дополнение n-го элемента m-го столбца D^*, и $D^*\neq 0$ при линейно независимых функциях $g_m(X)$.

Оптимизация проектных решений. В частном варианте $s = 1$ в (46)

$$u(X,t) = g(t)w(X)$$

с заданной функцией $g(t)$ и неизменяемым во времени пространственным управляющим воздействием $w(X)$, в роли которого рассматриваются искомые проектные решения объекта, следует принять вместо (47)

$$\bar{u}_n(t) = g(t)\bar{w}_n. \tag{54}$$

Здесь $\bar{w}_n$ — определяемые аналогично (48) постоянные во времени моды управления $w(X)$, восстанавливаемого по значениям $\bar{w}_n$, подобно (9), (11):

$$w(X) = \sum_{n=1}^{N_1^*} \bar{w}_n \hat{\Phi}_n(X) \quad \text{или} \quad w(X) = w(x,y) = \sum_{n=1}^{N_1^*} \bar{w}_n \hat{\Phi}_n^*(x,y); \tag{55}$$

$$\bar{w}_n = \int_V w(X)\hat{\Phi}_n(X)r(X)dX \quad \text{или} \quad \bar{w}_n = \int_D w(x,y)\hat{\Phi}_n^*(x,y)r_1(x,y)dxdy,$$

если $\bar{u}_n(t) = \bar{u}_{Vn}(t)$ или $\bar{u}_n(t) = \bar{u}_{Sn}(t)$ соответственно. Величины $\bar{w}_n$ в (55) следует рассматривать в качестве искомых автономных модальных управлений. Критерий оптимизации принимает в данном случае вместо (49) следующий вид:

$$I_4(\bar{u}) = \int_0^{t^*} \rho_Q \sum_{n=1}^{N_1^*} \bar{Q}_n^2(t)dt + \sum_{n=1}^{N_1^*} \bar{w}_n^2 \to \min_{\bar{w}}, \quad \bar{w} = (\bar{w}_n), \quad n = \overline{1, N_1^*}. \tag{56}$$

В итоге задача сводится к определению оптимального значения $\bar{w}^*$ и соответствующего ему, согласно (55), оптимального проектного решения $w^*(X)$, обеспечивающих перевод объекта управления (12) в требуемое конечное состояние (13) при минимальной величине критерия оптимальности (56).

Здесь вектор $\bar{w}$ уже представляет собой неизменное во времени параметрическое представление пространственного управления $w(X)$.

Действительно, для одинаковых конечных значений $\bar{u}_n(t^*)$ в (33) и (54) получаем равенство

$$\bar{w}_n = \frac{1}{2g(t^*)}\psi_n(t^*), \quad g(t^*) \neq 0, \quad n = \overline{1, N_1^*}. \tag{57}$$

Последующее представление $\bar{w}$ по правилу (21) на основании (57) приводит к описанию $w(X)$ в форме укороченной суммы N первых слагаемых в (55):

$$w(X) = \sum_{n=1}^{N} \widetilde{w}_n \hat{\Phi}_n(X) \quad \text{или} \quad w(X) = w(x,y) = \sum_{n=1}^{N} \widetilde{w}_n \hat{\Phi}_n^*(x,y), \tag{58}$$

являющейся параметризуемым на конечномерном подмножестве векторов $\bar{w}^{(N)} = (\widetilde{w}_n)$, $n = \overline{1, N}$, распределенным управлением, где, аналогично (21),

$$\bar{w}_n = \widetilde{w}_n, \quad n = \overline{1, N}; \quad \bar{w}_n = 0, \quad n > N. \tag{59}$$

В таком случае рассматриваемая задача оптимального управления непосредственно редуцируется к задаче полубесконечной оптимизации вида (25):

$$I(\bar{w}^{(N)}) \to \min_{\bar{w}^{(N)}}, \quad \max_{X\in\bar{V}}\big|Q(X,\bar{w}^{(N)}) - Q^*(X)\big| \leqslant \varepsilon \tag{60}$$

относительно $\bar{w}^{(N)}$. Здесь размерность N вектора $\bar{w}^{(N)}$ определяется по правилу (26), где, подобно (22),

$$\varepsilon_{\min}^{(N)} = \min_{\bar{w}^{(N)}}\big\{\max_{X\in\bar{V}}|Q(X,\bar{w}^{(N)}) - Q^*(X)|\big\}.$$

Явная форма зависимости $Q(X,\bar{w}^{(N)})$ от своих аргументов в (60) определяется в форме ряда (6) при значениях $\bar{Q}_n(t^*)$, которые находятся интегрированием уравнений объекта (12) в условиях (54), (59):

$$\bar{Q}_n\ (t^*) = \bar{Q}_{0n}e^{-M_n^2t^*} + d_n(t^*)\bar{w}_n; \qquad \bar{w}_n = \widetilde{w}_n, \ \ n = \overline{1,N};$$

$$\bar{w}_n = 0, \ \ n = \overline{N+1,N_1^*}; \qquad d_n(t^*) = \int_0^{t^*} g(t)e^{-M_n^2(t^*-t)}dt.$$

Решение ЗПО (60) по схеме альтернансного метода с последующей подстановкой результатов в (58) определяет искомую зависимость $w^*(X)$.

5.3. Управление в замкнутой области изменения управляющих воздействий

Рассмотрим линейно-квадратичную задачу оптимизации (12), (13), (31) с модальными управляющими воздействиями $\bar{u}(t)$ при ограничениях (15) на управления (16), представляемые в форме (9), (11). Структуре алгоритма (32)–(34) в общем случае соответствуют многочисленные варианты чередования на протяжении процесса управления участков вида (33) и интервалов постоянства управляющих воздействий на предельно допустимых уровнях. Каждому из таких вариантов отвечает конкретный вид явной зависимости оптимальной программы $\bar{u}_{1n}^*(t)$ от временной переменной, для которого становится возможным дальнейший анализ. Ограничимся далее, подобно [21], наиболее характерной для приложений ситуацией с выходом на ограничения только на начальной и конечной стадиях оптимизируемого процесса, для которого алгоритм (32)–(34) принимает следующую конкретизированную форму:

$$\bar{u}_{1n}^*(t) = \begin{cases} \bar{u}_n^*(t), & t\in[0,t_1], \quad t_1\geqslant 0; \\ \bar{u}_{n\max}, & t\in[t_1,t_2]; \\ \bar{u}_n^*(t), & t\in[t_2,t_3]; \\ \bar{u}_{n\min}, & t\in[t_3,t^*]. \end{cases} \tag{61}$$

Здесь $\bar{u}_n^*(t)$ представляется в ψ-параметризованном виде (41); $\bar{u}_{n\max}$, $\bar{u}_{n\max}$ находятся согласно соотношениям (35), (36) и моменты $t_1 < t_2 < t_3$ выхода и схода с ограничений в (61) фиксируются равенствами

$$\begin{aligned} u_{1n}^*(t_i) &= \bar{u}_n^*(t_i) = \bar{u}_{n\max}, \quad i=1,2; \\ u_{1n}(t_3) &= \bar{u}_n^*(t_3) = \bar{u}_{n\min}. \end{aligned} \tag{62}$$

Далее задача программного управления решается по предлагаемой схеме альтернансного метода с переходом к задаче полубесконечной оптимизации (25), решение которой в силу альтернансных свойств (27) приводит к замкнутой относительно $\psi_*^{(N)}$ системе уравнений (29), где зависимости $Q(X_j^0, \psi_*^{(N)})$ опять представляются разложением в ряд вида (43):

$$Q(X_j^0, \psi_*^{(N)}) = \sum_{n=1}^{N_1^*} \bar{Q}_n^{(1)}(\psi_*^{(N)}) \Phi_{1n}(X_j^0), \quad j = \overline{1, R}.$$

Здесь, в отличие от (44), $\bar{Q}_n^{(1)}(\psi_*^{(N)})$ не совпадают с $\bar{Q}_n(\psi_*^{(N)})$ и находятся путем интегрирования уравнений объекта (12) с ψ-параметризованным управлением (61):

$$\bar{Q}_n^{(1)}(\psi_*^{(N)}) = \bar{Q}_{on} e^{-M_n^2 t^*} + \int_0^{t_1} e^{-M_n^2 (t^* - \tau)} \bar{u}_n^*(\tau) d\tau + \\ + \frac{\bar{u}_{n\max}}{M_n^2} (e^{-M_n^2 (t^* - t_2)} - e^{-M_n^2 (t^* - t_1)}) + \int_{t_2}^{t_3} e^{-M_n^2 (t^* - \tau)} \bar{u}_n^*(\tau) d\tau + \\ + \frac{\bar{u}_{n\min}}{M_n^2} (1 - e^{-M_n^2 (t^* - t_3)}), \quad n = \overline{1, N_1^*}. \quad (63)$$

Соотношения (63) совместно с равенствами (62) полностью определяют зависимости $\bar{Q}_n^{(1)}(\psi_*^{(N)})$ при подстановке в (63) $\bar{u}_n^*(t)$ в форме (41).

В соответствии с соотношениями (35), (36) искомое программное управление $u_1^*(X, t)$, представляемое его разложением в ряд вида (9) или (11), находится в форме, подобной (61), в условиях ограничений (15):

$$u_1^*(X, t) = \begin{cases} u^*(X, t), & t \in [0, t_1], \quad t_1 \geqslant 0; \\ u_{\max}, & t \in [t_1, t_2]; \\ u^*(X, t), & t \in [t_2, t_3]; \\ u_{\min}, & t \in [t_3, t^*], \end{cases} \quad (64)$$

где $u^*(X, t)$ описывается выражением (42).

6. Синтез оптимального управления в линейно-квадратичных задачах оптимизации

Начиная с основополагающих работ А. М. Летова [30, 31] классическая проблема аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) в линейно-квадратичных задачах оптимизации остается одной из центральных в теории и технике автоматического управления, отличаясь при этом принципиальной спецификой применительно к бесконечномерным объектам с распределенными параметрами [1, 27, 29, 31]. Основные результаты решения проблемы АКОР ОРП получены применительно к задачам со свободным или подвижным правым концом траектории движения объекта с использованием классических условий трансверсальности на гладкой границе области допустимых конечных состояний управляемой системы.

Однако эти условия неприменимы на негладкой границе целевого множества, оцениваемого в чебышевской метрике, согласно (13) [4, 5, 22]. В целях опознания конечной точки оптимального процесса здесь могут быть использованы опирающиеся на ее альтернансные свойства (26)–(28) результаты расчета программных управлений альтернансным методом.

6.1. Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов в открытой области изменения управляющих воздействий

Синтез оптимального регулятора с модальными управлениями. Перенос граничных условий при $t = t^*$ в произвольный момент времени $t \in [0, t^*]$ определяет в краевой задаче (37) следующие зависимости конечных значений сопряженных переменных $\psi_{n\,\mathrm{opt}}(t^*)$ и временных мод $\bar{Q}_{n\,\mathrm{opt}}(t^*)$ от их текущих значений в оптимальном процессе $(\bar{Q}_{n\,\mathrm{opt}}(t), \psi_{n\,\mathrm{opt}}(t))$ для всех $n = \overline{1, N_1^*}$ [24]:

$$\psi_{n\,\mathrm{opt}}(t^*) = A_{n11}(t^* - t)\psi_{n\,\mathrm{opt}}(t) + A_{n12}(t^* - t)\bar{Q}_{n\,\mathrm{opt}}(t); \tag{65}$$

$$\bar{Q}_{n\,\mathrm{opt}}(t^*) = A_{n21}(t^* - t)\psi_{n\,\mathrm{opt}}(t) + A_{n22}(t^* - t)\bar{Q}_{n\,\mathrm{opt}}(t), \tag{66}$$

где A_{nks}, k, $s = 1, 2$, — элементы 2×2-матрицы (38).

После умножения равенств (65), (66) соответственно на известные, согласно результатам расчета программного управления, значения $\bar{Q}_{n\,\mathrm{opt}}(t^*) = \bar{Q}_n(\psi_*^{(N)})$ и $\psi_{n\,\mathrm{opt}}(t^*)$ в (21), (44) левые части соотношений (65), (66) становятся одинаковыми. Последующее вычитание этих уравнений приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned}\psi_{n\,\mathrm{opt}}(t, \psi_{n\,\mathrm{opt}}(t^*), \bar{Q}_n(0), \bar{Q}_{n\,\mathrm{opt}}(t)) = \\ = T_{n1}(t, t^*, \psi_{n\,\mathrm{opt}}(t^*), \bar{Q}_{n\,\mathrm{opt}}(t^*)) \times \\ \times T_{n2}(t, t^*, \psi_{n\,\mathrm{opt}}(t^*), \bar{Q}_{n\,\mathrm{opt}}(t^*))\bar{Q}_{n\,\mathrm{opt}}(t), \quad n = \overline{1, N_1^*};\end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned}T_{n1} &= [\bar{Q}_{n\,\mathrm{opt}}(t^*)A_{n11}(t^* - t) - \psi_{n\,\mathrm{opt}}(t^*)A_{n21}(t^* - t)]^{-1};\\ T_{n2} &= \psi_{n\,\mathrm{opt}}(t^*)A_{n22}(t^* - t) - \bar{Q}_{n\,\mathrm{opt}}(t^*)A_{n12}(t^* - t),\end{aligned} \tag{68}$$

однозначным образом определяющему зависимость $\psi_{n\,\mathrm{opt}}(t, \psi_{n\,\mathrm{opt}}(t^*), \bar{Q}_n(0), \bar{Q}_{n\,\mathrm{opt}}(t))$ от своих аргументов. Здесь зависимость $\psi_{n\,\mathrm{opt}}(t)$ от $\bar{Q}_n(0)$ в (67) характеризуется представлением $\bar{Q}_{n\,\mathrm{opt}}(t^*)$ в виде (44).

Подстановка (67) в выражение (33) для автономного модального управления в открытой области его определения приводит к линейному закону синтеза оптимального пространственно-временного управления в форме (9) или (11) с нестационарными коэффициентами обратных связей по измеряемому состоянию $\bar{Q}(t) = (\bar{Q}_n(t))$, $n = \overline{1, N_1^*}$:

$$u^*(\bar{Q}(t), X, t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N_1^*} T_{n1}T_{n2}\bar{Q}_n(t)\hat{\Phi}_{1n}(X). \tag{69}$$

Здесь $\hat{\Phi}_{1n}(X)$ определяется так же, как в (42).

Значения T_{n1} и T_{n2} представляются в (69), согласно (68), известными функциями времени с фиксируемыми на протяжении процесса управления величинами $\bar{Q}_n(0)$ в (44), которые находятся по результатам наблюдения $\bar{Q}(t)$ в момент $t = 0$.

Переход в (69) от $\bar{Q}(t)$ к измеряемому выходу объекта $Q_u(X_u,t) = (Q(X_{uj},t))$, $j=\overline{1,r}$, в r точках $X_{uj}\in S$ соответственно при $u(X,t) = u_V(X,t)$ или $u(X,t)=u_S(X,t)$ в (16) определяется, согласно (6), векторно-матричным уравнением наблюдения

$$Q_u(X_u,t)=\Lambda_u\bar{Q}(t);\quad \Lambda_u=[\hat{\Phi}_n(X_{uj})],\quad n=\overline{1,N_1^*};\quad j=\overline{1,r}. \tag{70}$$

В условиях $r<N_1^*$ неполного измерения состояния для восстановления вектора $\bar{Q}(t)$ по значениям $Q_u(X_u,t)$ требуется построение наболюдателя полного или пониженного порядка [2].

Если в соответствии с требуемой точностью моделирования объекта можно ограничиться учетом только N первых составляющих $\bar{Q}(t)=(\bar{Q}_n(t))$, $n=\overline{1,N}$, с минимальным их числом $N<N_1^*$, необходимым для решения системы уравнений (29) относительно $\psi_*^{(N)}$, то $\bar{Q}(t)$ непосредственно определяется решением уравнения (70) относительно $\bar{Q}(t)$ при $N_1^*=N^*=N=r$:

$$\bar{Q}(t)=\Lambda_u^{-1}Q_u(X_u,t). \tag{71}$$

Подстановка (71) в (69) приводит к линейному алгоритму синтеза с обратными связями по измеряемому выходу объекта:

$$\begin{aligned} &u^*(Q_u,X,t)=\tfrac{1}{2}\Lambda_u^{-1}Q_u(X_u,t)\Phi(X,t);\\ &\Phi(X,t)=(T_{n1}T_{n2}\hat{\Phi}_{1n}(X)),\quad n=\overline{1,N}, \end{aligned} \tag{72}$$

где $\Lambda_u^{-1}Q_u(X_u,t)$ — матрица-строка; $\Phi(X,t)$ — матрица-столбец.

Синтез оптимального регулятора с многоканальным сосредоточенным управлением. В случае (46) возникает задача АКОР для сосредоточенных управлений $w_m(t)$, $m=\overline{1,s}$, $s\geqslant 1$.

Обобщение зависимостей (65)–(68) на этот случай приводит по схеме [24] к соответствующим векторно-матричным равенствам, базирующимся на описании оптимального процесса решениями краевой задачи (51):

$$\psi_{\text{opt}}(t^*)=A_{11}(t^*-t)\psi_{\text{opt}}(t)+A_{12}(t^*-t)\bar{Q}_{\text{opt}}(t); \tag{73}$$

$$\bar{Q}_{\text{opt}}(t^*)=A_{21}(t^*-t)\psi_{\text{opt}}(t)+A_{22}(t^*-t)\bar{Q}_{\text{opt}}(t), \tag{74}$$

где A_{ij}, i, $j=1,2,$ — $N_1^*\times N_1^*$-матрицы блочного представления матричной экспоненты системы уравнений (51) в форме, подобной (38).

Умножение слева равенств (73) и (74) соответственно на известные по решениям задачи многоканального программного управления $N_1^*\times N_1^*$-матрицы $\operatorname{diag}[\bar{Q}_{j\,\text{opt}}(t^*)]$, $\bar{Q}_{\text{opt}}(t^*)=(\bar{Q}_{j\,\text{opt}}(t^*))$, $j=\overline{1,N_1^*}$, и $\operatorname{diag}[\psi_{j\,\text{opt}}(t^*)]$, $\psi_{\text{opt}}(t^*) = (\psi_{j\,\text{opt}}(t^*))$, $j=\overline{1,N_1^*}$, и последующее вычитание результатов приводит к векторному соотношению

$$\begin{aligned}&\psi_{\text{opt}}(t,\psi_{\text{opt}}(t^*),\bar{Q}(0),\bar{Q}_{\text{opt}}(t))=\\ &\qquad=T_1(t,t^*,\psi_{\text{opt}}(t^*),\bar{Q}_{\text{opt}}(t^*))\cdot T_2(t,t^*,\psi_{\text{opt}}(t^*),\bar{Q}_{\text{opt}}(t^*))\cdot\bar{Q}_{\text{opt}}(t),\end{aligned} \tag{75}$$

где

$$T_1=[W_1A_{11}(t^*-t)-W_2A_{21}(t^*-t)];$$

$$T_2 = W_2 A_{22}(t^* - t) - W_1 A_{12}(t^* - t);$$
$$W_1 = \operatorname{diag}[\bar{Q}_{j\,\mathrm{opt}}(t^*)], \quad W_2 = \operatorname{diag}[\psi_{j\,\mathrm{opt}}(t^*)], \quad j = \overline{1, N_1^*},$$

и, согласно (53),

$$\bar{Q}_{j\,\mathrm{opt}}(t^*) = (B(t^*)\psi_{\mathrm{opt}}(t^*) + B_1(t^*)\bar{Q}(0))_j, \quad j = \overline{1, N_1^*}.$$

Подстановка (75) в (50) определяет линейный с нестационарными коэффициентами алгоритм синтеза для сосредоточенных управлений с обратными связями по $\bar{Q}(t)$:

$$w_m^*(\bar{Q}(t), t) = \tfrac{1}{2}\bar{g}_m \psi_{\mathrm{opt}}(t) = \tfrac{1}{2}\bar{g}_m T_1 T_2 \bar{Q}(t), \quad m = \overline{1, s},$$

и уравнение оптимального регулятора для пространственно-временного управляющего воздействия в (46)

$$u^*(\bar{Q}, X, t) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{s} \bar{g}_m T_1 T_2 \bar{Q}(t) g_m(X). \tag{76}$$

В условиях $N_1^* = N^* = N = r$ в (70) вектор $\bar{Q}_{\mathrm{opt}}(t)$ в (76) определяется непосредственно по измеряемому выходу объекта, согласно (71). После подстановки (71) в (76) получаем оптимальное управление с линейной обратной связью по наблюдаемым величинам:

$$u^*\big(Q_u, X, t\big) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{s} \bar{g}_m T_1 T_2 \Lambda_u^{-1} \bar{Q}_u\big(X_u, t\big) g_m(X). \tag{77}$$

Здесь в (77), аналогично (69), матрицы T_1, T_2 вычисляются с фиксируемыми на протяжении процесса управления значениями $\bar{Q}(0)$, которые находятся по измерениям начального состояния объекта.

6.2. Синтез в замкнутой области изменения управляющих воздействий

Решение краевой задачи (37) на интервалах $[0, t_1] \ni t$, $[t_2, t_3] \ni t$ в (61), (64) с управлением $\bar{u}_n^*(t)$ в (41) находится в форме, подобной (38):

$$\begin{gathered}
\begin{bmatrix} \psi_n(t) \\ \bar{Q}_n(t) \end{bmatrix} = e^{A_n(t - t_{j-1})} \begin{bmatrix} \psi_n(t_{j-1}) \\ \bar{Q}_n(t_{j-1}) \end{bmatrix}; \\
e^{A_n(t - t_{j-1})} = \begin{bmatrix} A_{n11}(t - t_{j-1}) & A_{n12}(t - t_{j-1}) \\ A_{n21}(t - t_{j-1}) & A_{n22}(t - t_{j-1}) \end{bmatrix}, \\
t_{j-1} \leqslant t \leqslant t_j; \quad j = 1, 3; \quad t_0 = 0.
\end{gathered} \tag{78}$$

Путем переноса граничных условий при $t = t_j$ в произвольный момент времени $t \in [t_{j-1}, t_j]$ это решение может быть представлено в виде, аналогичном (65), (66) в условиях (78):

$$\psi_{n\,\mathrm{opt}}(t_j) = A_{n11}(t_j - t)\psi_{n\,\mathrm{opt}}(t) + A_{n12}(t_j - t)\bar{Q}_{n\,\mathrm{opt}}(t); \tag{79}$$
$$\bar{Q}_{n\,\mathrm{opt}}(t_j) = A_{n21}(t_j - t)\psi_{n\,\mathrm{opt}}(t) + A_{n22}(t_j - t)\bar{Q}_{n\,\mathrm{opt}}(t). \tag{80}$$

Здесь предварительный расчет программного управления определяет $\psi_{n\,\mathrm{opt}}(t_j)$ и t_j по выражениям (39), (62), а $\bar{Q}_{n\,\mathrm{opt}}(t_j)$ находятся по формулам вида (63):

$$\bar{Q}_{n\,\mathrm{opt}}(t_1) = \bar{Q}_n(0)e^{-M_n^2 t_1} + \int_0^{t_1} e^{-M_n^2(t_1-\tau)}\bar{u}_n^*(\tau)d\tau;$$

$$\bar{Q}_{n\,\mathrm{opt}}(t_3) = \bar{Q}_n(0)e^{-M_n^2 t_3} + \int_0^{t_1} e^{-M_n^2(t_3-\tau)}\bar{u}_n^*(\tau)d\tau + \\ + \frac{\bar{u}_{n\max}}{M_n^2}\left(e^{-M_n^2(t_3-t_2)} - e^{-M_n^2(t_3-t_1)}\right) + \int_{t_2}^{t_3} e^{-M_n^2(t_3-\tau)}\bar{u}_n^*(\tau)d\tau.$$

По предполагаемому способу синтеза оптимальных регуляторов в задаче с неограничиваемыми модальными управлениями равенства (79), (80) приводят к аналогичным (67), (68) базовым соотношениям для зависимости сопряженных переменных $\psi_{n\,\mathrm{opt}}(t)$ от модальных составляющих управляемой величины на рассматриваемых временных интервалах оптимального процесса:

$$\begin{gathered} \psi_{n\,\mathrm{opt}}(t, \psi_{n\,\mathrm{opt}}(t_j), \bar{Q}_n(0), \bar{Q}_{n\,\mathrm{opt}}(t)) = \\ = T_{n1j}(t, t_j, \psi_{n\,\mathrm{opt}}(t_j), \bar{Q}_{n\,\mathrm{opt}}(t_j)) \times \\ \times T_{n2j}(t, t_j, \psi_{n\,\mathrm{opt}}(t_j), \bar{Q}_{n\,\mathrm{opt}}(t_j)) \cdot \bar{Q}_{n\,\mathrm{opt}}(t), \quad n = \overline{1, N_1^*}; \\ t_{j-1} \leqslant t \leqslant t_j, \quad j = 1, 3; \quad t_0 = 0; \\ T_{n1j} = [\bar{Q}_{n\,\mathrm{opt}}(t_j)A_{n11}(t_j - t) - \psi_{n\,\mathrm{opt}}(t_j)A_{n21}(t_j - t)]^{-1}; \\ T_{n2j} = \psi_{n\,\mathrm{opt}}(t_j)A_{n22}(t_j - t) - \bar{Q}_{n\,\mathrm{opt}}(t_j)A_{n12}(t_j - t). \end{gathered} \tag{81}$$

Подстановка (81) в выражение (33) определяет, подобно (69), линейный закон синтеза оптимального регулятора на указанных стадиях процесса управления:

$$\begin{gathered} u_j^*(\bar{Q}(t), X, t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N_1^*} T_{n1j}T_{n2j}\bar{Q}_n(t)\hat{\Phi}_{1n}(X), \\ t_{j-1} \leqslant t \leqslant t_j; \quad j = 1, 3; \quad t_0 = 0. \end{gathered} \tag{82}$$

Точное решение задачи синтеза для ограниченного программного управления (64) связано с серьезными затруднениями [31]. В то же время в большинстве случаев с приемлемой в приложениях точностью такой алгоритм $\widetilde{u}^*(\bar{Q}, t)$ может быть построен дополнением уравнения регулятора (82) характеристикой усилительного звена с ограничениями [30, 31]:

$$\widetilde{u}^*(\bar{Q}, X, t) = \begin{cases} u_{\max}, & u_j^*(\bar{Q}, X, t) > u_{\max}; \\ u_j^*(\bar{Q}, X, t), & u_{\min} \leqslant u_j^*(\bar{Q}, X, t) \leqslant u_{\max}; \\ u_{\min}, & u_j^*(\bar{Q}, X, t) < u_{\min}. \end{cases} \tag{83}$$

Аналогично (70)–(72) может быть осуществлен переход от $\bar{Q}(t)$ к измеряемому выходу объекта $Q_u(X_u, t)$, который приводит при $N_1^* = N^* = N = r$ в (70) к уравнению регулятора вида (72) вместо (82):

$$u_j^*(Q_u, X, t) = \tfrac{1}{2}\Lambda_u^{-1}Q_u(X_u, t)\Phi_j(X, t);$$

$$\Phi_j(X, t) = (T_{n1j}T_{n2j}\hat{\Phi}_{1n}(X)), \quad n = \overline{1, N},$$

с последующей заменой $u_j^*(\bar{Q}, X, t)$ на $u_j^*(Q_u, X, t)$ в алгоритме (83).

Ряд представляющих самостоятельный интерес решений задач синтеза оптимального управления предлагаемым методом в области технологической теплофизики приведен в [22–24].

7. Заключение

В статье разработан алгоритмически точный метод решения параметризуемых задач оптимального управления многомерными системами с распределенными параметрами параболического типа при оценках целевых множеств конечных состояний объекта в равномерной метрике. Метод базируется на специальных альтернансных свойствах конечной точки оптимального процесса, позволяющих идентифицировать ее координаты в процессе поиска программных управляющих воздействий.

Предлагаемый подход к решению задачи синтеза оптимальных регуляторов сводится к замене классических условий трансверсальности на негладкой границе целевого множества найденными при определении программных управлений оптимальными конечными значениями сопряженных переменных и модальных составляющих управляемой величины.

Вычислительные алгоритмы конкретизированы применительно к типовым линейно-квадратичным задачам оптимизации.

Разработанная технология может быть использована для решения широкого круга прикладных задач оптимального управления техническими системами с распределенными параметрами.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22–29–00180, Самарский государственный технический университет.

Библиографический список

1. Рапопорт Э. Я. *Оптимальное управление системами с распределенными параметрами.* М.: Высш. шк., 2009. 677 с. EDN: QMTFRZ.
2. Рапопорт Э. Я. *Анализ и синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами.* М.: Высш. шк., 2005. 292 с. EDN: QMOYRB.
3. Рапопорт Э. Я. *Альтернансный метод в прикладных задачах оптимизации.* М.: Наука, 2000. 336 с. EDN: TTRVMB.
4. Рапопорт Э. Я. *Оптимизация процессов индукционного нагрева металла.* М.: Металлургия, 1993. 279 с.
5. Рапопорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э. *Методы полубесконечной оптимизации в прикладных задачах управления системами с распределенными параметрами.* М.: Наука, 2021. 286 с. EDN: QADDYA.
6. Владимиров В. С. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1981. 512 с.
7. Ладыженская О. А. *Краевые задачи математической физики.* М.: Наука, 1973. 407 с.
8. Полянин А. Д. *Справочник по линейным уравнениям математической физики.* М.: Физматлит, 2001. 576 с. EDN: MVANPN.
9. Рапопорт Э. Я. Программная управляемость линейных многомерных систем с распределенными параметрами // *Изв. РАН. Теор. сист. управл.*, 2015. №2. С. 22–39. EDN: TLOQQN. DOI: https://doi.org/10.7868/S0002338815020110.

10. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. *Уравнения в частных производных математической физики.* М.: Высш. шк., 1970. 712 с.
11. Валеев Г. К., Жаутыков О. А. *Бесконечные системы дифференциальных уравнений.* Алма–Ата: Наука, 1974. 415 с.
12. Коваль В. А. *Спектральный метод анализа и синтеза распределенных управляемых систем.* Саратов: Саратов. гос. техн. ун-т, 1997. 192 с.
13. Егоров Ю. В. Необходимые условия оптимальности управления в банаховых пространствах // *Матем. сб.*, 1964. Т. 64(106), № 1. С. 79–101.
14. Федоренко Р. П. *Приближенное решение задач оптимального управления.* М.: Наука, 1978. 488 с.
15. Моисеев Н. Н. *Элементы теории оптимальных систем.* М.: Наука, 1975. 526 с.
16. Васильев Ф. П. *Методы оптимизации.* М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
17. Плешивцева Ю. Э., Рапопорт Э. Я. Метод последовательной параметризации управляющих воздействий в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами // *Изв. РАН. Теор. сист. управл.*, 2009. № 3. С. 22–33. EDN: KFPCXJ.
18. Rapoport E. Ya., Pleshivtseva Yu. E. *Optimal Control of Induction Heating Processes.* Boca Raton: CRC Press, 2007. 349 pp. EDN: UIEQHJ. DOI: https://doi.org/10.1201/9781420019490.
19. Рапопорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э. *Оптимальное управление температурными режимами индукционного нагрева.* М.: Наука, 2012. 309 с. EDN: QNDGWJ.
20. Rapoport E. Ya., Pleshivtseva Yu. E. Optimal control of induction heating of metals prior to warm and hot forming / *Induction Heating and Heat Treatment.* vol. 4C / AMS Handbook, 2014. pp. 366–401. DOI: https://doi.org/10.31399/asm.hb.v04c.a0005893.
21. Плешивцева Ю. Э., Рапопорт Э. Я. Программное управление с минимальным энергопотреблением в системах с распределенными параметрами // *Изв. РАН. Теор. сист. управл.*, 2020. № 4. С. 42–57. EDN: KSXGKJ. DOI: https://doi.org/10.31857/S0002338820030129.
22. Рапопорт Э. Я. Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов в линейно-квадратичных задачах управления системами с распределенными параметрами при равномерных оценках целевых множеств // *Изв. РАН. Теор. сист. управл.*, 2021. № 3. С. 23–38. EDN: NXVBOH. DOI: https://doi.org/10.31857/S0002338821030148.
23. Рапопорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э. Оптимальное по расходу энергии управление в системах с распределенными параметрами // *Автометрия*, 2021. Т. 57, № 4. С. 17–28. EDN: IVNYND. DOI: https://doi.org/10.15372/AUT20210403.
24. Плешивцева Ю. Э., Рапопорт Э. Я. Пространственно-временное управление системами с распределенными параметрами в линейно-квадратичных задачах оптимизации с равномерными оценками целевых множеств // *Изв. РАН. Теор. сист. управл.*, 2022. № 4. С. 49–65. EDN: ENOBZI. DOI: https://doi.org/10.31857/S0002338822030118.
25. Бутковский А. Г. *Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами.* М.: Наука, 1965. 474 с.
26. Егоров А. И. *Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами.* М.: Наука, 1978. 500 с.
27. Сиразетдинов Т. К. *Оптимизация систем с распределенными параметрами.* М.: Наука, 1977. 480 с.
28. Ray W. H. *Advanced Process Control.* New York: McGraw-Hill, 1981. xiii+376 pp.
29. Дегтярев Г. Л., Сиразетдинов Т. К. *Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами.* М.: Машиностроение, 1986. 214 с.
30. Летов А. М. *Математическая теория процессов управления.* М.: Наука, 1981. 255 с.
31. Летов А. М. *Динамика полета и управления.* М.: Наука, 1969. 360 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 3, pp. 419–445
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1943

MSC: 90C47, 65K10

Uniform optimization of controlled systems with distributed parameters

E. Ya. Rapoport

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

A constructive method is proposed for solving a spatiotemporal control problem in systems with distributed parabolic parameters under the conditions of the given accuracy of uniform approximation of the final state of a plant to the required spatial distribution of the controlled variable. The developed approach is based on the previously designed alternance method for constructing the parameterizable programmed control algorithms, which extended the results of the theory of nonlinear Chebyshev approximations to a wide range of optimization problems and uses the fundamental laws of the subject area. It is shown that in linear quadratic problem optimization the equations of optimal controllers with autonomous modal controls in the open domain of their definition and taking into account restrictions on the nature of the spatial distribution of the control actions specified by the conditions of technical implementation are reduced to linear feedback algorithms for the measured state of the plant with nonstationary transmission coefficients and the given dependence on the spatial arguments of the controlled value. The results obtained are extended to the problem of searching for time-invariant spatially distributed controls, considered as the desired design solutions for a plant.

Keywords: uniform metric, systems with distributed parameters, alternance method.

Received: 17th July, 2022 / Revised: 12th August, 2022 /
Accepted: 18th August, 2022 / First online: 19th September, 2022

Differential Equations and Mathematical Physics
Research Article

Please cite this article in press as:
Rapoport E. Ya. Uniform optimization of controlled systems with distributed parameters, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 3, pp. 419–445. EDN: WJCOQD. DOI: 10.14498/vsgtu1943 (In Russian).

Author's Details:
Edgar Ya. Rapoport https://orcid.org/0000-0002-0604-8801
Dr. Techn. Sci., Professor; Dept. of Automation and Control in Technical Systems;
e-mail: edgar.rapoport@mail.ru

Competing interests. I have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. I take full responsibility for submit the final manuscript to print. I approved the final version of the manuscript.

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Science Foundation (RSF 22–29–00180, Samara State Technical University).

References

1. Rapoport E. Ya. *Optimal'noe upravlenie sistemami s raspredelennymi parametrami* [Optimal Control of Systems with Distributed Parameters]. Moscow, Vyssh. shk., 2009, 677 pp. (In Russian). EDN: QMTFRZ.
2. Rapoport E. Ya. *Analiz i sintez sistem avtomaticheskogo upravleniya s raspredelennymi parametrami* [Analysis and Synthesis of Automatic Control Systems with Distributed Parameters]. Moscow, Vyssh. shk., 2005, 292 pp. (In Russian). EDN: QMOYRB.
3. Rapoport E. Ya. *Al'ternansnyi metod v prikladnykh zadachakh optimizatsii* [Alternance Method in Applied Optimization Problems]. Moscow, Nauka, 2000, 336 pp. (In Russian). EDN: TTRVMB.
4. Rapoport E. Ya. *Optimizatsiia protsessov induktsionnogo nagreva metalla* [Optimization of the Induction Heating of Metal Process]. Moscow, Metallurgiia, 1993, 279 pp. (In Russian)
5. Rapoport E. Ya., Pleshivceva Yu. E. *Metody polubeskonechnoi optimizatsii v prikladnykh zadachakh upravleniia sistemami s raspredelennymi parametrami* Methods of Semi-Infinite Optimization in Applied Problems of Control of Systems with Distributed Parameters. Moscow, Nauka, 2021, 286 pp. (In Russian). EDN: QADDYA.
6. Vladimirov V. S. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1981, 512 pp. (In Russian)
7. Ladyzhenskaya O. A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* [Boundary Value Problems of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1973, 407 pp. (In Russian)
8. Polyanin A. D. *Spravochnik po lineinym uravneniiam matematicheskoi fiziki* [Handbook on Linear Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Fizmatlit, 2001, 576 pp. (In Russian). EDN: MVANPN.
9. Rapoport E. Ya. Open-loop controllability of multidimensional linear systems with distributed parameters, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2015, vol. 54, no. 2, pp. 184–201. EDN: UFSRQX. DOI: https://doi.org/10.1134/S1064230715020112.
10. Koshlyakov N. S., Smirnov M. M., Gliner E. B. *Differential Equations of Mathematical Physics*. Amsterdam, North-Holland Publ., 1964, xvi+701 pp.
11. Valeev G. K., Zhautykov O. A. *Beskonecnye sistemy differencial'nyh uravnenii* [Infinite Systems of Differential Equations]. Alma–Ata, Nauka, 1974, 415 pp. (In Russian)
12. Koval' V. A. *Spektral'nyi metod analiza i sinteza raspredelennykh upravliaemykh sistem* Spectral Method of Analysis and Synthesis of Distributed Control Systems. Saratov, Saratov State Techn. Univ., 1997, 192 pp. (In Russian)
13. Egorov Yu. V. Necessary conditions for optimal control in Banach spaces, *Mat. Sb. (N.S.)*, 1964, vol. 64(106), no. 1, pp. 79–101 (In Russian).
14. Fedorenko R. P. *Priblizhennoe reshenie zadach optimal'nogo upravleniia* [Approximate Solution of Optimal Control Problems]. Moscow, Nauka, 1978, 488 pp. (In Russian)
15. Moiseev N. N. *Elementy teorii optimal'nykh sistem* [Elements of the Theory of Optimal Systems]. Moscow, Nauka, 1975, 526 pp. (In Russian)
16. Vasil'ev F. P. *Metody optimizatsii* [Optimization Methods]. Moscow, Faktorial Press, 2002, 824 pp. (In Russian)
17. Pleshivtseva Yu. E., Rapoport E. Ya. The successive parameterization method of control actions in boundary value optimal control problems for distributed parameter systems, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2009, vol. 48, no. 3, pp. 351–362. EDN: LLQZJH. DOI: https://doi.org/10.1134/S1064230709030034.

18. Rapoport E. Ya., Pleshivtseva Yu. E. *Optimal Control of Induction Heating Processes*. Boca Raton, CRC Press, 2007, 349 pp. EDN: UIEQHJ. DOI: https://doi.org/10.1201/9781420019490.
19. Rapoport E. Ya., Pleshivceva Yu. E. *Optimal'noe upravlenie temperaturnymi rezhimami induktsionnogo nagreva* [Optimal Control of Induction Heating Temperature]. Moscow, Nauka, 2012, 309 pp. (In Russian). EDN: QNDGWJ.
20. Rapoport E. Ya., Pleshivtseva Yu. E. Optimal control of induction heating of metals prior to warm and hot forming, In: *Induction Heating and Heat Treatment*, vol. 4C, AMS Handbook, 2014, pp. 366–401. DOI: https://doi.org/10.31399/asm.hb.v04c.a0005893.
21. Pleshivtseva Yu. E., Rapoport E. Yu. Optimal energy-efficient programmed control of distributed parameter systems, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2020, vol. 59, no. 4, pp. 518–532. EDN: ELZAQT. DOI: https://doi.org/10.1134/S1064230720030120.
22. Rapoport E. Ya. Analytical design of the optimal controllers in linear-quadratic problems of controlling systems with distributed parameters under uniform estimates of target sets, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2021, vol. 60, no. 3, pp. 364–378. EDN: BBXAQM. DOI: https://doi.org/10.1134/S1064230721030138.
23. Rapoport E. Ya., Pleshivtseva Yu. E. Optimal energy-efficient control in distributed parameter systems, *Optoelectron. Instrument. Proc.*, 2021, vol. 57, no. 4, pp. 345–355. EDN: ITJLZZ. DOI: https://doi.org/10.3103/S8756699021040105.
24. Pleshivtseva Yu. E., Rapoport E. Yu. Spatiotemporal control of systems with distributed parameters in linear-quadratic optimization problems with uniform estimates of target sets, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2022, vol. 61, no. 4, pp. 523–538. DOI: https://doi.org/10.1134/S106423072203011X.
25. Butkovskii A. G. *Teoriia optimal'nogo upravleniia sistemami s raspredelennymi parametrami* [Optimal Control Theory for Systems with Distributed Parameters]. Moscow, Nauka, 1965, 474 pp. (In Russian)
26. Egorov A. I. *Optimal'noe upravlenie teplovymi i diffuzionnymi protsessami* [Optimal Control of Thermal and Diffusion Processes]. Moscow, Nauka, 1978, 500 pp. (In Russian)
27. Sirazetdinov T. K. *Optimizatsiia sistem s raspredelennymi parametrami* [Optimization Systems with Distributed Parameters]. Moscow, Nauka, 1977, 480 pp. (In Russian)
28. Ray W. H. *Advanced Process Control*. New York, McGraw-Hill, 1981, xiii+376 pp.
29. Degtiarev G. L., Sirazetdinov T. K. *Teoreticheskie osnovy optimal'nogo upravleniia uprugimi kosmicheskimi apparatami* [Theoretical Foundations of Optimal Control of Elastic Space Vehicles]. Moscow, Mashinostroenie, 1986, 214 pp. (In Russian)
30. Letov A. M. *Matematicheskaia teoriia protsessov upravleniia* [Mathematical Theory of Control Processes]. Moscow, Nauka, 1981, 255 pp. (In Russian)
31. Letov A. M. *Dinamika poleta i upravleniia* [Flight and Control Dynamics]. Moscow, Nauka, 1969, 360 pp. (In Russian)