



УДК 517.958:531–133

Упругая составная плоскость с частично оторванным от матрицы межфазным абсолютно жестким тонким включением с учетом проскальзывания на концах

Акопян В. Н., Амирджанян А. А.,
Даштоян Л. Л., Саакян А. В.

Институт механики НАН Республики Армения,
Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24Б.

Аннотация



Рассмотрено плоско-деформированное состояние базовой плоскости упругого составного пространства с трещиной конечной длины на линии соединения составляющих полуплоскостей. В один из берегов межфазной трещины под действием сосредоточенной силы вдавливаются абсолютно жесткое тонкое включение такой же длины. Для контактирующей стороны включения полагается, что в средней ее части имеет место сцепление с матрицей, а по краям происходит проскальзывание, описываемое законом сухого трения. Задача сформулирована в виде системы сингулярных интегральных уравнений. Исследовано поведение искомым функций в окрестности концов включения-трещины и в точках раздела зон сцепления и проскальзывания. Определяющая система интегральных уравнений решается методом механических квадратур. Найдены законы распределения контактных напряжений, а также длины зон сцепления и проскальзывания в зависимости от коэффициента трения, коэффициентов Пуассона и отношения модулей Юнга материалов полуплоскостей, а также угла наклона внешней силы.

Механика деформируемого твердого тела

Научная статья

© Коллектив авторов, 2023


© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)

  Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)


Образец для цитирования

Акопян В. Н., Амирджанян А. А., Даштоян Л. Л., Саакян А. В. Упругая составная плоскость с частично оторванным от матрицы межфазным абсолютно жестким тонким включением с учетом проскальзывания на концах // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 3. С. 462–475. EDN: CXHXMY. DOI: 10.14498/vsgtu1966.

Сведения об авторах

Ваграм Наслетникович Акопян  <https://orcid.org/0000-0003-3684-9471>

доктор физико-математических наук; главный научный сотрудник; отд. механики упругих и вязкоупругих тел; e-mail: vhakobyan@sci.am

Арутюн Арменович Амирджанян  <https://orcid.org/0009-0008-8417-7319>

кандидат физико-математических наук; ведущий научный сотрудник; отд. механики упругих и вязкоупругих тел; e-mail: amirjanyan@gmail.com

Лилит Леоновна Даштоян  <https://orcid.org/0009-0008-4737-4524>

кандидат физико-математических наук; ученый секретарь; e-mail: lilit.dashtoyan@sci.am

Аветик Вараздатович Саакян  <https://orcid.org/0000-0002-5904-6201>

доктор физико-математических наук; ведущий научный сотрудник; отд. механики упругих и вязкоупругих тел; e-mail: avetik.sahakyan@sci.am

Ключевые слова: контактная задача, межфазная трещина, включение, составная плоскость.

Получение: 25 ноября 2022 г. / Исправление: 23 августа 2023 г. /

Принятие: 18 сентября 2023 г. / Публикация онлайн: 23 сентября 2023 г.

Введение. Вопросы исследования поля напряжений вокруг концентраторов напряжений типа трещин, штампов, накладок, включений и др. всегда находились и продолжают находиться в центре внимания специалистов, занимающихся прочностью, надежностью и долговечностью конструкций и сооружений. Эти задачи, смоделированные как взаимодействие указанных концентраторов напряжений с массивными телами в виде пространства, полупространства, слоя и др., которые в рамках плоской задачи теории упругости вырождаются в плоскость, полуплоскость, полосу и др., составляют одно из важнейших направлений контактных и смешанных задач теории упругости и механики разрушения. Среди очень многих работ в этом направлении отметим известные монографии [1–5], содержащие достаточно много фундаментальных результатов. В отдельных случаях удается получить замкнутые или точные решения, позволяющие более глубоко изучить особенности поведения локальных полей разрушающих напряжений вблизи концевых точек концентраторов напряжений. В этой связи укажем на монографию [6] и на работы [7–9], в которых получены точные решения ряда задач для однородной ортотропной плоскости, составной плоскости и пространства с межфазными трещинами. В указанных работах предполагалось, что в один или в оба берега трещины вдавливаются абсолютно жесткий штамп при различных условиях контакта: либо штамп полностью сцеплен с берегом трещины, либо между ними имеет место гладкий контакт, либо во всей зоне контакта имеет место сухое трение.

Л. А. Галиным [9] была предложена модель контакта штампа с упругой полуплоскостью, когда в средней части зоны контакта имеет место сцепление, а по ее краям происходит проскальзывание, подчиняющееся закону сухого трения Кулона. При помощи конформного отображения Л. А. Галиным было построено приближенное решение в замкнутом виде. Интерес к такой модели контактной задачи проявляли многие исследователи, используя разные подходы и методы для ее решения [10–15]. В частности, в работе [14] контактная задача Галина решена методом механических квадратур, показано совпадение численных результатов с результатами других авторов. В работе [16] в рамках плоского деформирования упругого пространства и модели задачи Галина было рассмотрено напряженное состояние упругой однородной плоскости с трещиной конечной длины, в один из берегов которой вдавливается абсолютно жесткий тонкий штамп такой же длины.

В настоящей работе с опорой на результаты работы [7] расширяется круг применения контактной модели Галина и рассматривается задача работы [16], но уже для кусочно-однородного пространства, составленного из двух различных полупространств и содержащего частично оторванное от матрицы, тонкое абсолютно жесткое межфазное включение в виде бесконечной полосы. Проводится анализ влияния неоднородности на напряженное состояние под включением.

Поскольку рассматриваемая здесь задача отличается от задачи, рассмотренной в [16], лишь тем, что однородная плоскость заменена на составную, очевидно, что текстовая часть постановки задачи в основном повторяет такую в работе [16]. Тем не менее она здесь приводится для полноты описания поставленной задачи.

1. Постановка задачи и вывод определяющей системы интегральных уравнений. Пусть имеем упругое пространство, составленное из двух разнородных полупространств, которое в плоскости их соединения содержит сквозную трещину конечной ширины. Полагая, что пространство находится в условиях плоской деформации, сформулируем задачу для ее базовой плоскости $z = 0$ декартовой системы координат xyz , ось ординат которой находится в плоскости раздела материалов, а ось абсцисс направлена вдоль срединной линии трещины. Итак, имеем упругую составную плоскость, которая составлена из двух разнородных полуплоскостей и на интервале $(-a, a)$ линии раздела материалов содержит трещину. Полагаем, что внутри трещины имеется абсолютно жесткое тонкое включение такой же длины, которое предварительно не сцеплено с матрицей и под воздействием сосредоточенной силы P_0 , приложенной к средней точке верхней грани, вдавливается в берег трещины. Контакт включения с матрицей описывается моделью контактной задачи Л. А. Галина [9], т.е. считается, что на некотором интервале (b, c) средней части нижней стороны включения имеет место сцепление с матрицей, а на концевых интервалах $(-a, b)$ и (c, a) происходит проскальзывание, подчиняющееся закону сухого трения (см. рис. 1).

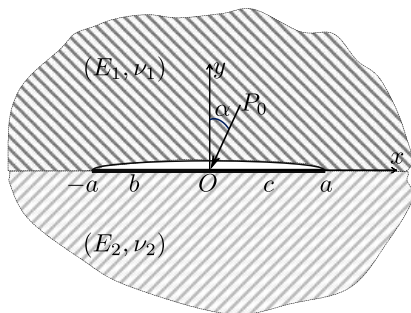


Рис. 1. Схематическое представление задачи
 [Figure 1. Schematic representation of the problem]

Необходимо определить размеры зон сцепления и скольжения, контактные напряжения, возникающие под включением, и коэффициенты концентрации разрушающих напряжений в концевых точках концентратора напряжений смешанного типа — включение-трещина.

Рассматривая каждую из составляющих полуплоскостей отдельно и снабдив компоненты напряжений и смещений, относящиеся к точкам верхней и нижней полуплоскостей, верхними индексами (1) и (2) соответственно, на интервалах $(-a, a)$ каждой полуплоскости будем иметь следующие условия:

$$\sigma_y^{(1)}(x, 0) = 0, \quad \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = 0, \quad x \in (-a, a); \quad (1)$$

$$u_2'(x, 0) = 0, \quad x \in (b, c); \quad (2)$$

$$v'_2(x, 0) = 0, \quad x \in (-a, a); \quad (3)$$

$$\tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = -f \operatorname{sgn}(x) \sigma_y^{(2)}(x, 0), \quad x \in (-a, b) \cup (c, a), \quad (4)$$

где $u_j(x, y)$ и $v_j(x, y)$ — компоненты смещения; $\sigma_y^{(j)}(x, y)$, $\tau_{xy}^{(j)}(x, y)$ — компоненты напряжений соответствующих полуплоскостей; $j = 1, 2$; f — коэффициент трения между включением и матрицей.

Пользуясь разрывными решениями для кусочно-однородной упругой плоскости с разрезом [6], позволяющими выразить все компоненты вектора перемещений и тензора напряжений через скачки напряжений и перемещений на интервале $(-a, a)$, выпишем выражения, необходимые для удовлетворения (1)–(3):

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(1)}(x, 0) &= \frac{1}{\pi\Delta} \left[\pi\theta_1\sigma(x) + \theta_2 \int_{-a}^a \frac{\tau(s)}{s-x} ds + \pi\mu_2\theta_3 u'(x) - \mu_2\theta_4 \int_{-a}^a \frac{v'(s)}{s-x} ds \right]; \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) &= \frac{1}{\pi\Delta} \left[\pi\theta_1\tau(x) - \theta_2 \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds - \pi\mu_2\theta_3 v'(x) - \mu_2\theta_4 \int_{-a}^a \frac{u'(s)}{s-x} ds \right]; \\ v'_2(x, 0) &= -\frac{1}{\pi\Delta} \left[\pi\theta_1 v'(x) + \theta_2 \int_{-a}^a \frac{u'(s)}{s-x} ds + \pi \frac{\theta_5}{\mu_2} \tau(x) + \frac{\theta_6}{\mu_2} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds \right]; \\ u'_2(x, 0) &= \frac{1}{\pi\Delta} \left[-\pi\theta_1 u'(x) + \theta_2 \int_{-a}^a \frac{v'(s)}{s-x} ds + \pi \frac{\theta_5}{\mu_2} \sigma(x) - \frac{\theta_6}{\mu_2} \int_{-a}^a \frac{\tau(s)}{s-x} ds \right]. \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \sigma_y^{(1)}(x, 0) - \sigma_y^{(2)}(x, 0); \quad \tau(x) = \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) - \tau_{xy}^{(2)}(x, 0); \\ u(x) &= u^{(1)}(x, 0) - u^{(2)}(x, 0); \quad v(x) = v^{(1)}(x, 0) - v^{(2)}(x, 0); \\ \Delta &= (\mu + \kappa_1)(1 + \mu\kappa_2); \quad \mu = \mu_1/\mu_2; \quad \kappa_i = 3 - 4\nu_i; \\ \theta_1 &= \mu[\kappa_2\mu + 4(1 - \nu_2)(1 - \nu_1) + (1 - 2\nu_2)(1 - 2\nu_1)]; \\ \theta_2 &= 2\mu[(1 - 2\nu_1)(1 - \nu_2) + (1 - 2\nu_2)(1 - \nu_1)]; \\ \theta_3 &= 2\mu[\mu(1 - 2\nu_2) - (1 - 2\nu_1)]; \quad \theta_4 = -4\mu[\mu(1 - \nu_2) + (1 - \nu_1)]; \\ \theta_5 &= \frac{1}{2}[\kappa_2(1 - 2\nu_1)\mu - \kappa_1(1 - 2\nu_2)]; \quad \theta_6 = \kappa_2(1 - \nu_1)\mu + \kappa_1(1 - \nu_2); \end{aligned} \quad (5)$$

μ — отношение модулей сдвига μ_1 и μ_2 материалов полуплоскостей, а ν_1 и ν_2 — соответствующие коэффициенты Пуассона.

Удовлетворяя условиям граничной задачи (1)–(3) с учетом условия (4), приходим к разрешающей системе сингулярных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \pi \frac{\theta_1}{\mu_2} \sigma(x) + \frac{\theta_2}{\mu_2} \left(f \int_{-a}^b \frac{\sigma(s)}{s-x} ds + \int_b^c \frac{\tau(s)}{s-x} ds - f \int_c^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds \right) + \\ + \pi\theta_3 u'(x) - \theta_4 \int_{-a}^a \frac{v'(s)}{s-x} ds = 0, \quad x \in (-a, a); \end{aligned}$$

$$\pi \frac{\theta_1}{\mu_2} \tau(x) - \frac{\theta_2}{\mu_2} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds - \pi\theta_3 v'(x) - \theta_4 \int_{-a}^a \frac{u'(s)}{s-x} ds = 0, \quad x \in (-a, a);$$

$$\pi\theta_1 v'(x) + \theta_2 \int_{-a}^a \frac{u'(s)}{s-x} ds + \pi \frac{\theta_5}{\mu_2} \tau(x) + \frac{\theta_6}{\mu_2} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds = 0, \quad x \in (-a, a); \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & - \pi\theta_1 u'(x) + \theta_2 \int_{-a}^a \frac{v'(s)}{s-x} ds + \pi \frac{\theta_5}{\mu_2} \sigma(x) - \\ & - \frac{\theta_6}{\mu_2} \left(-f \int_{-a}^b \frac{\sigma(s)}{s-x} ds + \int_b^c \frac{\tau(s)}{s-x} ds + f \int_c^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds \right) = 0, \quad x \in (b, c) \end{aligned}$$

при условиях смыкания концов трещины и равновесия штампа, которые в обозначениях (5) имеют вид

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^a v'(s) ds = 0; \quad \int_{-a}^a u'(s) ds = 0; \quad \int_{-a}^a \sigma(s) ds = P \cos \alpha; \\ & -f \int_{-a}^b \frac{\sigma(s)}{s-x} ds + \int_b^c \frac{\tau(s)}{s-x} ds + f \int_c^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds = P \sin \alpha. \end{aligned} \quad (7)$$

В полученной системе (6) уравнения имеют различные области определения, что приводит к необходимости рассматривать искомые функции как самостоятельные неизвестные на каждом из интервалов $(-a, b)$, (b, c) и (c, a) . Поскольку тангенциальное контактное напряжение $\tau(s)$ неизвестно только на среднем из указанных интервалов, а остальные три $u'(s)$, $v'(s)$, $\sigma(s)$ — на всех трех интервалах, придем к определению десяти неизвестных функций. Аналогично, рассматривая первые три уравнения системы (6) на каждом из указанных интервалов отдельно, получим новую систему из десяти уравнений относительно десяти неизвестных функций.

Решение полученной системы найдем при помощи метода механических квадратур [17]. Для этого, отнеся компоненты напряжений к модулю сдвига μ_2 нижней полуплоскости и сведя каждый из интервалов определения уравнений к интервалу $(-1, 1)$, перейдем к безразмерным величинам. Новыми неизвестными будут

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}^{(ol,i,or)} = \{u', v', \sigma/\mu_2\}, \quad \varphi_4^{(i)} = \tau/\mu_2, \quad (8)$$

которые определены на интервале $(-1, 1)$ и отмечены верхними индексами (ol) (outer-left), (i) (internal) и (or) (outer-right) в соответствии с интервалами $(-a, b)$, (b, c) и (c, a) .

В итоге получим систему из десяти сингулярных интегральных уравнений второго рода, структурно похожих на следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \pi\theta_1 \varphi_3^{(ol)}(\eta) + \theta_2 \left[f \int_{-1}^1 \frac{\varphi_3^{(ol)}(\xi)}{\xi - \eta} d\xi + \int_{-1}^1 \frac{\varphi_4^{(i)}(\xi)}{\xi - z_0} d\xi - f \int_{-1}^1 \frac{\varphi_3^{(or)}(\xi)}{\xi - z_1} d\xi \right] + \\ & + \pi\theta_3 \varphi_1^{(ol)}(\eta) + \theta_4 \left[\int_{-1}^1 \frac{\varphi_2^{(ol)}(\xi)}{\xi - \eta} d\xi + \int_{-1}^1 \frac{\varphi_2^{(i)}(\xi)}{\xi - z_0} d\xi + \int_{-1}^1 \frac{\varphi_2^{(or)}(\xi)}{\xi - z_1} d\xi \right] = 0, \quad \eta \in (-1, 1), \end{aligned}$$

где $b^* = b/a < 1$, $c^* = c/a < 1$;

$$z_0 = \frac{b^* + 1}{c^* - b^*} \eta - \frac{1 + c^*}{c^* - b^*}, \quad z_1 = \frac{b^* + 1}{1 - c^*} \eta - \frac{2 + c^* - b^*}{1 - c^*}.$$

Решение системы будем искать в классе функций, имеющих степенное поведение в окрестности концов интервала интегрирования и представимых в виде

$$\Phi(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta\Phi_*(x), \quad \alpha, \beta > -1,$$

где функция $\Phi_*(x)$ удовлетворяет условию Гельдера на отрезке $[-1, 1]$.

Подставляя эти представления в определяющую систему уравнений и исследуя поведение уравнений в окрестности точек ± 1 , с учетом известных результатов Н. И. Мухелишвили о поведении интеграла типа Коши у концов линии интегрирования [18], получаем систему уравнений для определения показателей α и β . Учитывая большое число уравнений, считаем нецелесообразным представлять здесь эти уравнения. Отметим лишь, что поведение искомых функций в окрестности точек раздела зон сцепления и скольжения определяется однозначно и повторяет, как и следовало ожидать, их поведение в случае аналогичной задачи для однородной плоскости [16], а для определения показателей особенности искомых функций в концевых точках включения получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \alpha^{(\text{or})3}(1-\alpha_D) + \alpha^{(\text{or})2}f(\beta_D + \alpha_D\beta_D - \vartheta_2) - \\ - \alpha^{(\text{or})}(1 + \alpha_D - 2\beta_D^2) + \beta_D f(1 + \alpha_D - \beta_D\vartheta_2) = 0, \\ \beta^{(\text{ol})3}(1-\alpha_D) - \beta^{(\text{ol})2}f(\beta_D + \alpha_D\beta_D - \vartheta_2) - \\ - \beta^{(\text{ol})}(1 + \alpha_D - 2\beta_D^2) - \beta_D f(1 + \alpha_D - \beta_D\vartheta_2) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь для упрощения записи использовались известные параметры Дандерса [19]:

$$\alpha_D = \frac{\mu(1-\nu_2) - (1-\nu_1)}{\mu(1-\nu_2) + (1-\nu_1)}, \quad \beta_D = \frac{1}{2} \frac{\mu(1-2\nu_2) - (1-2\nu_1)}{\mu(1-\nu_2) + (1-\nu_1)}$$

и обозначение

$$\vartheta_2 = \frac{1-2\nu_2}{1-\nu_2}.$$

Уравнения (9), в отличие от случая однородной плоскости [16], могут в зависимости от упругих характеристик полуплоскостей иметь как три различных вещественных корня, так и один вещественный и два комплексно-сопряженных корня. Последний случай означает, что, несмотря на рассмотрение задачи в рамках модели контакта Галина, осцилляция напряжений в концевых точках будет сохраняться. В первом же случае осцилляции напряжений на концах удастся избежать. В отличие от однородного случая [16] корни уравнений (9) не выписываются аналитически, а вычисляются численно и поэтому здесь не приводятся. С дальнейшей процедурой введения новых искомых функций, поведение которых на концах интервала $(-1, 1)$ определяется однозначно, можно ознакомиться в работе [16].

В итоге решение поставленной задачи сводится к системе из десяти сингулярных интегральных уравнений относительно десяти искомых функций с определенными весовыми функциями и шести постоянных, представляющих собой конечные значения искомых функций на концах внутреннего

участка зоны контакта. Для определения последних, а также координат концов зоны сцепления b^* и c^* используются трансформированные соответствующим образом условия (7). Наличие в определяющей системе отличных друг от друга весовых функций предполагает использование метода механических квадратур [17] с различными узлами и разным числом точек коллокации в зависимости от того, обращается ли весовая функция под сингулярным интегралом в бесконечность на одном конце или ни на одном.

2. Численный анализ. Решение разрешающей системы построим методом механических квадратур. При одинаковом для всех функций порядке аппроксимации n будем иметь $10n + 6$ неизвестных: $10n$ значений регулярных частей искомых функций в соответствующих узловых точках и шесть постоянных, описанных выше. Шесть весовых функций, соответствующих зонам скольжения, на одном из концов обращаются в бесконечность, на другом в ноль, а четыре функции, соответствующие зоне сцепления, на обоих концах обращаются в ноль. Следовательно, выбрав для шести уравнений n точек коллокации, а для четырех — $n + 1$ точку коллокации, получаем $10n + 4$ уравнений. Для замыкания полученной системы линейных алгебраических уравнений к ней следует добавить два из дискретизированных условий (7), соответствующих условиям равновесия включения. Два других из условий (7) необходимы для определения координат точек раздела зон сцепления и проскальзывания b^* и c^* , которые нелинейным образом входят в матрицу полученной системы линейных алгебраических уравнений.

Анализ результатов, полученных при различных порядках аппроксимации, показал, что уже при $n = 6$ для функций $\psi_{k*}^{(ol)}$ и $\psi_{k*}^{(or)}$ ($k = 1, 2, 3$) и $n = 10$ для функций $\varphi_{k*}^{(i)}$ ($k = 1, 2, 3, 4$) достигается точность порядка 10^{-4} , которой вполне достаточно для графического представления результатов, поэтому дальнейшие расчеты проводились при этих значениях порядков аппроксимации. Указанные функции являются регулярными функциями соответствующих неизвестных функций (8) согласно представлению решения определяющей системы из 10 сингулярных интегральных уравнений в виде произведения выделенной особенности на регулярную функцию.

Проведен численный анализ распределения контактных напряжений, когда угол наклона приложенной силы принят $\alpha = 0.02$, коэффициент трения — $f = 0.075$, коэффициент Пуассона верхней полуплоскости — $\nu_1 = 0.2$. На рис. 2 представлены кривые распределения контактного давления для разных значений отношения модулей сдвига полуплоскостей $\mu = 0.9, 1.25, 1.5$ при $\nu_2 = 0.25$ и коэффициента Пуассона $\nu_2 = 0.2, 0.25, 0.3$ при $\mu = 1.5$, на рис. 3 — соответствующие кривые распределения тангенциальных напряжений.

Также были рассчитаны контактные напряжения при разных коэффициентах Пуассона верхней полуплоскости $\nu_1 = 0.2, 0.3$, но их влияние оказалось намного меньше и сказывалось, главным образом, на координате левого конца зоны сцепления b^* и величине контактных напряжений в его окрестности.

Следует отметить, что кривые распределения контактных напряжений под включением качественно повторяют кривые их распределения для однородной плоскости [16]. Как видно из рис. 2 и 3, изменение упругих характеристик составной плоскости не приводит к качественному изменению кривых,

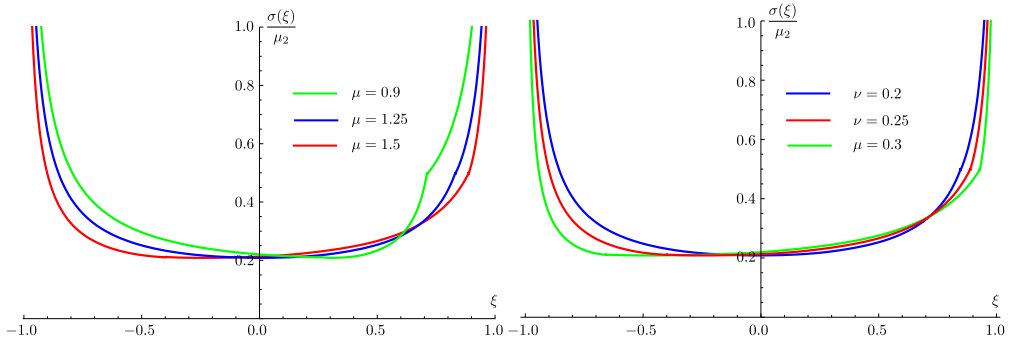


Рис. 2. Распределение безразмерных нормальных контактных напряжений для разных значений отношения $\mu = \mu_1/\mu_2$ и коэффициента Пуассона ν_2 (онлайн в цвете)
 [Figure 2 (color online). Distribution of dimensionless normal contact stresses for different values of the ratio $\mu = \mu_1/\mu_2$ and Poisson's ratio ν_2]

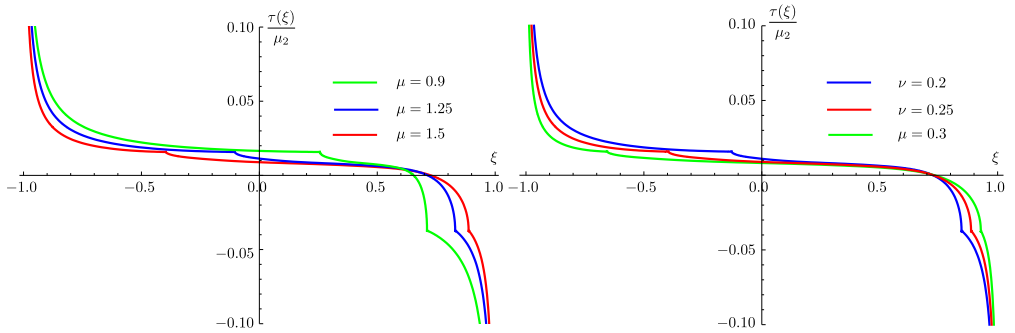


Рис. 3. Распределение безразмерных тангенциальных контактных напряжений для разных значений отношения $\mu = \mu_1/\mu_2$ и коэффициента Пуассона ν_2 (онлайн в цвете)
 [Figure 3 (color online). Distribution of dimensionless tangential contact stresses for different values of the ratio $\mu = \mu_1/\mu_2$ and Poisson's ratio ν_2]

а влияет на них, главным образом, посредством величин b^* и c^* , являющихся причиной их трансформации. Следовательно, имея эти значения, можно легко представить и кривые распределения напряжений, конечно, только качественно.

На рис. 4 представлены кривые зависимости b^* и c^* от отношения модулей сдвига $\mu = \mu_1/\mu_2$ для трех значений коэффициента трения f и двух значений коэффициента Пуассона ν_1 . Здесь представлен симметричный случай нагружения ($\alpha = 0$) с целью показать, что при $\mu \rightarrow 0$ задача сводится к контактной задаче Галина для полуплоскости. Точками на оси ординат показаны значения $b^* = -c^*$ для задачи Галина при $\nu_2 = 0.3$, которые имеются в работе [15].

На рис. 4 приведены также кривые коричневого цвета, которые соответствуют значению $\nu_1 = 0.35$. Заметное различие между кривыми, соответствующими разным коэффициентам Пуассона верхней полуплоскости, проявляется только при малых коэффициентах трения и близких друг к другу значениях модулей сдвига полуплоскостей.

На рис. 5 представлены кривые зависимости b^* и c^* от угла α приложения внешней силы при следующих значениях параметров $\nu_2 = 0.3$, $\nu_1 = 0.23$, $mi = 0.5$ для разных значений коэффициента трения f .

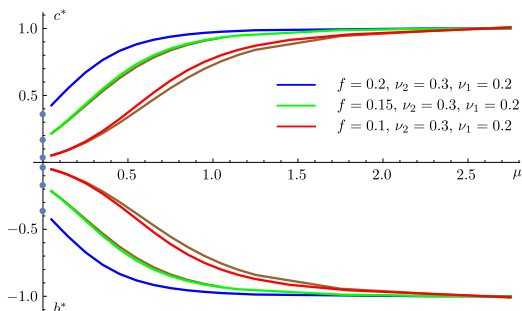


Рис. 4. Зависимость b^* и c^* от отношения $\mu = \mu_1/\mu_2$ (онлайн в цвете)
 [Figure 4 (color online). Dependence of b^* and c^* on the ratio $\mu = \mu_1/\mu_2$]

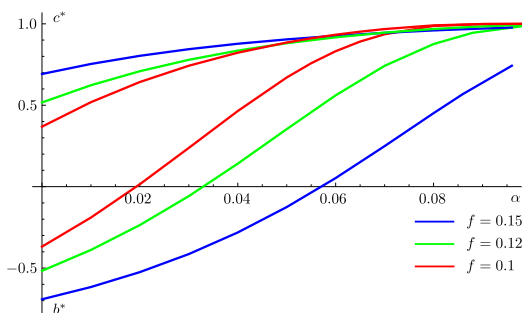


Рис. 5. Зависимость b^* и c^* от угла наклона внешней силы (онлайн в цвете)
 [Figure 5 (color online). Dependence of b^* and c^* on the angle of inclination of the external force]

Как показывают графики, наклон силы приводит к уменьшению зоны сцепления и смещению ее в сторону наклона силы, что, в конечном итоге, приводит к вырождению зоны сцепления и происходит это тем раньше, чем меньше коэффициент трения.

Численный анализ зависимости b^* и c^* от коэффициентов Пуассона показал, что зависимость их от коэффициента Пуассона верхней полуплоскости мала, в то время как зависимость от коэффициента Пуассона нижней полуплоскости, как и в случае однородной плоскости, очень существенна. Расчеты показали, что при коэффициенте Пуассона ν_2 , очень близком к значению 0.5, зона сцепления занимает всю зону контакта, в то время как при малых его значениях возможно даже вырождение этой зоны при том же коэффициенте трения.

Закключение. Выведена система определяющих уравнений достаточно сложной контактной задачи о вдавливании тонкого жесткого включения конечной длины в берег трещины такой же длины, находящейся в кусочно-однородной упругой плоскости, составленной из двух разнородных полуплоскостей. Задача рассматривается в рамках контактной задачи Галина, т.е. при наличии зон сцепления и проскальзывания. Определяющая система уравнений состоит из десяти сингулярных интегральных уравнений при четырех дополнительных условиях. Выделены особенности поведения искомых функций на концах интервала интегрирования. На основе метода механических квадратур разработана программа расчета в среде пакета Wolfram Mathematica,

которая позволяет как найти законы распределения контактных напряжений, так и построить форму раскрытия трещины над включением. При помощи этой программы проведен подробный численный анализ зависимости координат концов зоны сцепления от всех параметров поставленной задачи.

Конкурирующие интересы. Конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи нет.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена в рамках проекта 21Т-2С209 (Комитет по науке, Министерство образования, науки, культуры и спорта Республики Армения).

Библиографический список

1. Галин Л. А. *Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости*. М.: Наука, 1980. 304 с.
2. Попов Г. Я. *Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений*. М.: Наука, 1982. 344 с.
3. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. *Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках*. Киев: Наукова думка, 1976. 443 с.
4. Мухелишвили Н. И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости*. М.: Наука, 1966. 708 с.
5. Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Стащук Н. Г. *Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле*. Киев: Наукова думка, 1983. 288 с.
6. Nakobyan V. N. *Stress Concentrators in Continuous Deformable Bodies / Advanced Structured Materials*. vol. 181. Cham: Springer, 2022. xx+380 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-031-16023-3>.
7. Nakobyan V. N., Nakobyan L. V., Dashtoyan L. L. Contact problem for a piecewise-homogeneous plane with an interfacial crack under dry friction // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2022. vol. 2231, 012024. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2231/1/012024>.
8. Ильина И. И., Сильвестров В. В. Задача о тонком жестком межфазном включении, отсоединившемся вдоль одной стороны от среды // *Изв. РАН. МТТ*, 2005. № 3. С. 153–166. EDN: HSIWCR.
9. Галин Л. А. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления // *ПММ*, 1945. Т. 9, № 5. С. 413–424.
10. Моссаковский В. И., Бискуп А. Г. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления // *Докл. АН СССР*, 1972. Т. 206, № 5. С. 1068–1070.
11. Антипов Ю. А., Арутюнян Н. Х. Контактные задачи теории упругости при наличии трения и сцепления // *ПММ*, 1991. Т. 55, № 6. С. 1005–1017.
12. Wayne Chen W., Jane Wang Q. A numerical model for the point contact of dissimilar materials considering tangential tractions // *Mech. Mater.*, 2008. vol. 40, no. 11. pp. 936–948. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2008.06.002>.
13. Острик В. И. Вдавливание штампа в упругую полосу при наличии трения и сцепления // *Изв. РАН. МТТ*, 2011. № 5. С. 118–129. EDN: OJMYEL.
14. Саакян А. В. Решение контактной задачи с зонами трения и сцепления (задача Галина) методом дискретных особенностей / *Развитие идей Л. А. Галина в механике: Сб. науч. тр.* М.–Ижевск, 2013. С. 103–120 http://www.mechins.sci.am/publ/avetik_sahakyan/ColGalini100.pdf.
15. Кротов С. В., Кононов Д. П., Пакулина Е. В. Напряженное состояние в контакте колеса и рельса при наличии скольжения и сцепления // *Известия Петербургского универси-*

тема путей сообщения, 2021. Т. 18, №2. С. 177–187. EDN: LRITHA. DOI: <https://doi.org/10.20295/1815-588X-2021-2-177-187>.

16. Hakobyan V. N., Amirjanyan H. A., Dashtoyan L. L., Sahakyan A. V. Indentation of an absolutely rigid thin inclusion into one of the crack faces in an elastic plane under slippage at the ends / H. Altenbach, S. M. Bauer, A. K. Belyaev, et al. (eds) *Advances in Solid and Fracture Mechanics* / Advanced Structured Materials, 180. Cham: Springer, 2022. pp. 85–96. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-18393-5_6.
17. Sahakyan A. V., Amirjanyan H. A. Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2018. vol. 991, 012070. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/991/1/012070>.
18. Мухелишвили Н. И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике*. М.: Наука, 1968. 510 с.
19. Dundurs J. Discussion: “Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading” (Bogy, D. B., 1968, ASME J. Appl. Mech., 35, pp. 460–466) // *J. Appl. Mech.*, 1969. vol. 36, no. 3. pp. 650–652. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3564739>.

MSC: 74A45

Elastic compound plane with an interfacial absolutely rigid thin inclusion partially detached from the matrix subject to slippage at the ends

*Hakobyan V. N., Amirjanyan H. A.,
Dashtoyan L. L., Sahakyan A. V.*

Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of the Republic of Armenia,
24B, Marshal Baghramyan ave., Yerevan, 0019, Armenia.

Abstract


This article discusses the stress state of an elastic composite plane with a crack of finite length on the joining line of the half-planes. An absolutely rigid thin inclusion of the same length is indented into one of the edges of an interfacial crack under the action of a concentrated force. It is assumed that for the contacting side of the inclusion, there is adhesion to the matrix in its middle part, and slippage occurs along the edges, which is described by the law of dry friction. The problem is mathematically formulated as a system of singular integral equations. The behavior of the unknown functions in the vicinity of the ends of the inclusion-crack and at the separation points of the adhesion and slip zones is studied. The governing system of integral equations is solved by the method of mechanical quadratures. The laws of distribution of contact stresses, as well as the lengths of the adhesion and slip zones, depending on the coefficient of friction, Poisson's ratios and the ratio of Young's moduli of the materials of half-planes, as well as the inclination angle of the external force, are found.

Mechanics of Solids

Research Article

© Authors, 2023

© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Hakobyan V. N., Amirjanyan H. A., Dashtoyan L. L., Sahakyan A. V. Elastic compound plane with an interfacial absolutely rigid thin inclusion partially detached from the matrix subject to slippage at the ends, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 3, pp. 462–475. EDN: CXHXY. DOI: [10.14498/vsgtu1966](https://doi.org/10.14498/vsgtu1966) (In Russian).

Authors' Details:

Vahram N. Hakobyan  <https://orcid.org/0000-0003-3684-9471>


Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Main Researcher; Dep. of Elastic and Visco-Elastic Bodies;
e-mail: vhakobyan@sci.am

Harutyun A. Amirjanyan  <https://orcid.org/0009-0008-8417-7319>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Leading Researcher; Dep. of Elastic and Visco-Elastic Bodies;
e-mail: amirjanyan@gmail.com

Lilit L. Dashtoyan  <https://orcid.org/0009-0008-4737-4524>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Scientific Secretary; e-mail: lilit.dashtoyan@sci.am

Avetik V. Sahakyan  <https://orcid.org/0000-0002-5904-6201>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Leading Researcher; Dep. of Elastic and Visco-Elastic Bodies;
e-mail: avetik.sahakyan@sci.am

Keywords: contact problem, interfacial crack, inclusion, compound plane.

Received: 25th November, 2022 / Revised: 23rd August, 2023 /

Accepted: 18th September, 2023 / First online: 23rd September, 2023

Competing interests. We do not have any conflict of interest regarding the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. All authors participated in the development of the article's concept and in writing the manuscript. Authors bear full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The work was carried out within the framework of project no. 21T-2C209 (Science Committee, Ministry of Education, Science, Culture and Sport of the Republic of Armenia).

References

1. Galin L. A. *Kontaktnye zadachi teorii uprugosti i viazkouprugosti* [Contact Problems in the Theory of Elasticity and Viscoelasticity]. Moscow, Nauka, 1980, 304 pp. (In Russian)
2. Popov G. Ya. *Kontsentratsiia uprugikh napriazhenii voze shtampov, razrezov, tonkikh vkluchenii i podkrepleni* [Concentration of Elastic Stress around Stamps, Cuts, Thin Inclusions, and Reinforcements]. Moscow, Nauka, 1982, 344 pp. (In Russian)
3. Panasyuk V. V., Savruk M. P., Datsyshin A. P. *Raspredezenie napriazhenii okolo treshchin v plastinakh i obolochkakh* [Stress Distribution Around Cracks in Plates and Shells]. Kiev, Naukova Dumka, 1976, 443 pp. (In Russian)
4. Muskhelishvili N. I. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Netherlands, Springer, 1977, xxxi+732 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-017-3034-1>.
5. Berezhnitskii L. T., Panasyuk V. V., Stashchuk N. G. *Vzaimodeistvie zhestkikh lineynykh vkluchenii i treshchin v deformiruemom tele* [The Interaction of Rigid Linear Inclusions and Cracks in a Deformable Body]. Kiev, Naukova Dumka, 1983, 288 pp. (In Russian)
6. Hakobyan V. N. *Stress Concentrators in Continuous Deformable Bodies*, Advanced Structured Materials, vol. 181. Cham, Springer, 2022, xx+380 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-031-16023-3>.
7. Hakobyan V. N., Hakobyan L. V., Dashtoyan L. L. Contact problem for a piecewise-homogeneous plane with an interfacial crack under dry friction, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2022, vol. 2231, 012024. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2231/1/012024>.
8. Il'ina I. I., Sil'vestrov V. V. The problem of a thin interfacial inclusion detached from the medium along one side, *Mech. Solids.*, 2005, vol. 40, no. 3, pp. 123–133. EDN: XWSPZL.
9. Galin L. A. Indentation of a punch in the presence of friction and adhesion, *Prikl. Mat. Mekh.* [J. Appl. Math. Mech.], 1945, vol. 9, no. 5, pp. 413–424.
10. Mossakovskii V. I., Biskup A. G. Impression of a stamp with friction and adhesion present, *Sov. Phys., Dokl.*, 1972, vol. 17, no. 10, pp. 984–986.
11. Antipov Yu. A., Arutyunyan N. Kh. Contact problems of the theory of elasticity with friction and adhesion, *J. Appl. Math. Mech.*, 1991, vol. 55, no. 6, pp. 887–901. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(91\)90142-H](https://doi.org/10.1016/0021-8928(91)90142-H).
12. Wayne Chen W., Jane Wang Q. A numerical model for the point contact of dissimilar materials considering tangential tractions, *Mech. Mater.*, 2008, vol. 40, no. 11, pp. 936–948. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2008.06.002>.
13. Ostriuk V. I. Indentation of a punch into an elastic strip with friction and adhesion, *Mech. Solids*, 2011, vol. 46, no. 5, pp. 755–765. EDN: XKMKHH. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654411050098>.

14. http://www.mechins.sci.am/publ/avetik_sahakyan/ColGalina100.pdf Sahakyan A. V. Solution of a contact problem with contact and adhesion regions (Galina's problem) by the method of discrete singularities, In: *Razvitie idei L. A. Galina v mekhanike* [Development of L. A. Galin's Ideas in Mechanics. Collection of Research Papers]. Moscow, Izhevsk, 2013, pp. 103–120 (In Russian).
15. Krotov S. V., Kononov D. P., Pakulina E. V. Stress state in contact between wheel and rail in the presence of slip and adhesion, *Proceedings of Petersburg Transport University*, 2021, vol. 18, no. 2, pp. 177–187 (In Russian). EDN: LRITHA. DOI: <https://doi.org/10.20295/1815-588X-2021-2-177-187>.
16. Hakobyan V. N., Amirjanyan H. A., Dashtoyan L. L., Sahakyan A. V. Indentation of an absolutely rigid thin inclusion into one of the crack faces in an elastic plane under slippage at the ends, In: *H. Altenbach, S. M. Bauer, A. K. Belyaev, et al. (eds) Advances in Solid and Fracture Mechanics*, Advanced Structured Materials, 180. Cham, Springer, 2022, pp. 85–96. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-18393-5_6.
17. Sahakyan A. V., Amirjanyan H. A. Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2018, vol. 991, 012070. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/991/1/012070>.
18. Muskhelishvili N. I. *Singuliarnye integral'nye uravneniia. Granichnye zadachi teorii funktsii i nekotorye ikh prilozheniia k matematicheskoi fizike* [Singular Integral Equations. Boundary Value Problems in the Theory of Functions and Some Applications of them to Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1968, 510 pp. (In Russian)
19. Dundurs J. Discussion: "Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading" (Bogy, D. B., 1968, ASME J. Appl. Mech., 35, pp. 460–466), *J. Appl. Mech.*, 1969, vol. 36, no. 3, pp. 650–652. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3564739>.