



УДК 517.958:533.6.011.5

Решение задачи Дородницына–Ладыженского

Г. Б. Сизых

Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Россия, 141700, Долгопрудный, Институтский пер., 9.

Аннотация

Статья посвящена строгому доказательству утверждения, что энтропия принимает максимальное значение на поверхности тела с затупленной носовой частью, обтекаемого сверхзвуковым потоком, при наличии плоскости симметрии течения. Это очевидно для тел вращения при нулевом угле атаки, а численными расчетами и экспериментально установлено при ненулевых углах атаки. Доказательство сводится к обоснованию того, что лидирующая линия тока (линия тока, пересекающая скачок по нормали) заканчивается на теле. Иными словами, лидирующая линия тока и линия торможения совпадают. Такое доказательство получено Г. Б. Сизых в 2019 году для общего пространственного случая (не только для течений с плоскостью симметрии). Это достаточно сложное доказательство основано на критерии Зоравского, опыт использования которого имеет лишь узкий круг специалистов, и опирается на предположение о непрерывности вторых производных плотности и давления. В настоящей статье для практически важного случая течений с плоскостью симметрии (в частности, обтекание тел вращения при ненулевом угле атаки) предлагается оригинальное простое доказательство, для которого достаточно непрерывности только первых производных полей плотности и давления и не требуется использования критерия Зоравского.

Ключевые слова: уравнения Эйлера, изоэнтальпийные течения, завихренность, линия торможения, лидирующая линия тока, отошедший скачок уплотнения.

Получение: 29 августа 2022 г. / Исправление: 10 ноября 2022 г. /

Принятие: 17 ноября 2022 г. / Публикация онлайн: 30 ноября 2022 г.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)**Образец для цитирования**

Сизых Г. Б. Решение задачи Дородницына–Ладыженского // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 4. С. 764–776. EDN: DWXCOH. DOI: [10.14498/vsgtu1951](https://doi.org/10.14498/vsgtu1951).

Сведения об авторе

Григорий Борисович Сизых  <https://orcid.org/0000-0001-5821-8596>

кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. высшей математики;
e-mail: ol2o3@yandex.ru

Введение. В сборнике статей [1], посвященном сверхзвуковым течениям газа, опубликовано сообщение, в котором академик А. А. Дородницын пишет: «При нулевом угле атаки на поверхности тела вращения энтропия принимает максимальное значение. Многие расчеты и эксперименты показывают, что и при углах атаки, отличных от нуля, энтропия сохраняет свое максимальное значение с точностью, которая получена в этих расчетах или эксперименте. Однако никакого строгого доказательства этого факта нет». Тем самым была поставлена задача найти доказательство для обтекания тел вращения под углом атаки. В настоящей статье она называется задачей Дородницына—Ладыженского, так как в этом же сообщении А. А. Дородницын приводит одно доказательство, которое в разговоре ему сообщил М. Д. Ладыженский. Доказательство основано на двух предположениях:

- завихренность на поверхности тела непрерывно зависит от угла атаки;
- завихренность на поверхности тела вращения под нулевым углом атаки отлична от нуля (кроме точки торможения).

С использованием этих двух предположений выкладки М. Д. Ладыженского приводят к выводу о существовании некоторого ненулевого диапазона углов атаки, при которых энтропия на поверхности тела вращения будет оставаться максимальной. Предположение о непрерывной зависимости завихренности на поверхности тела вращения от угла атаки и отсутствие не только точного значения, но и каких-либо оценок упомянутого диапазона углов атаки означает, что вопрос был решен лишь частично.

При сверхзвуковом (число Маха $M > 1$) обтекании тел с гладкой выпуклой носовой частью возникает отошедший головной скачок. Если тело вращения расположено так, что ось симметрии параллельна скорости набегающего потока (нулевой угол атаки), то линия торможения AB , лежащая на этой оси (рис. 1, а), заканчивается на теле в точке торможения B (которую также называют передней критической точкой). При этом точка A расположена на скачке там, где касательная к скачку перпендикулярна скорости набегающего потока (такая точка называется лидирующей точкой скачка, а проходящая через нее линия тока — лидирующей линией тока или, для краткости, лидирующей линией). Поэтому параметры течения в точке B можно рассчитывать по параметрам набегающего потока. Для это-

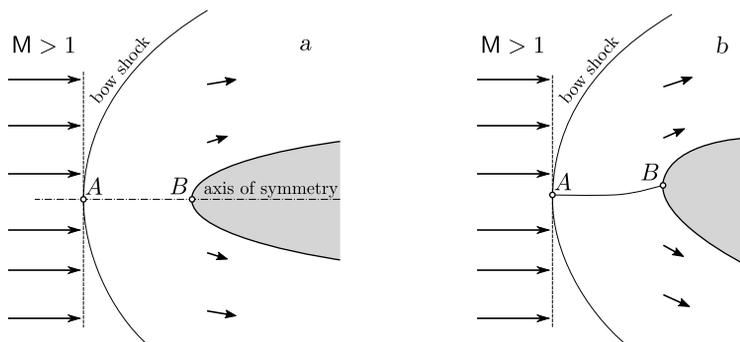


Рис. 1. Гладкая выпуклая носовая часть в сверхзвуковом потоке: а — осесимметричное обтекание; б — неосесимметричное обтекание

[Figure 1. Smooth convex nose in supersonic flow: a — axisymmetric flow; b — non-axisymmetric flow]

го достаточно использовать условия Ренкина—Гюгио на прямом скачке [2] в точке A и условие сохранения энтропии на линии торможения (энтропия сохраняется на любой линии тока в области, где нет скачков и разрывов). Хорошо известно [3, 4], что при одинаковых параметрах набегающего потока энтропия сразу за прямым скачком выше, чем за косым. Поскольку лидирующая точка есть единственная точка, где скачок является прямым, энтропия в течении за скачком принимает максимальное значение на линии торможения и на поверхности тела (последнее следует из того, что линия торможения растекается из точки B по поверхности тела).

Если угол атаки не нулевой, то энтропия сразу за скачком также максимальна в лидирующей точке. Поэтому в течении за скачком энтропия принимает максимальное значение на лидирующей линии тока. Следовательно, задача Дородницына—Ладыженского сводится к обоснованию того, что лидирующая линия заканчивается на теле. Другими словами, требуется доказать, что при углах атаки, отличных от нуля, при обтекании тел вращения лидирующая линия тока и линия торможения совпадают (рис. 1, b).

В. В. Сычев в 1968 году в предисловии к [1] замечает, что «проблема величины энтропии на поверхности тела вращения под углом атаки . . . вызывала в последние годы оживленные дискуссии». Несмотря на это, задача была решена в [5] только спустя пятьдесят лет, в 2019 году, причем не только для тел вращения, но и для тел с несимметричной, гладкой и выпуклой носовой частью.

Однако доказательство [5] изложено настолько кратко, что обоснованность в тексте некоторых шагов оказалась сложна для понимания. Поэтому позже автор [5] повторил в статье [6] это доказательство в развернутом виде с подробным обоснованием всех шагов. В итоге доказательство оказалось громоздким и, по существу, представляет собой некоторую теорию, состоящую из нескольких теорем. Кроме того, в этом доказательстве используется критерий Зоравского [7–9], который известен только узкому кругу специалистов. Поэтому возникла идея предложить более короткое и более простое доказательство без использования критерия Зоравского.

Большинство летательных аппаратов имеют вертикальную плоскость симметрии. При нулевом угле скольжения плоскостью симметрии обладает и поле течения. В частном случае обтекания тел вращения (случай задачи Дородницына—Ладыженского) течение обладает плоскостью симметрии (не обязательно вертикальной) при любых углах атаки и скольжения. Таким образом, течения с плоскостью симметрии представляют собой важный практический случай. Для таких течений удалось найти простое и короткое (по сравнению с [5, 6]) решение задачи о совпадении лидирующей линии тока и линии торможения, что, в частности, означает решение задачи Дородницына—Ладыженского. Ниже в настоящей статье приводится это решение. С теоретической точки зрения новизна состоит в том, что применение нового доказательства позволило ослабить требования к гладкости полей плотности и давления. Если в [5, 6] требовалась непрерывность вторых производных этих параметров, то для нового доказательства достаточно непрерывности первых производных.

Идеи, применяемые при доказательстве некоторых теорем, зачастую позволяют решать такие задачи, которые не решаются применением самих этих

теорем. Примером такой идеи служит преобразование Абеля, применяемое при доказательстве признака Дирихле сходимости рядов. Поэтому и в механике сплошной среды некоторые новые доказательства считаются новыми результатами. Например, в середине прошлого века в США были опубликованы новые, более простые доказательства [7] известных теорем Гельмгольца о вихрях и критерия Зоравского. Следуя этому примеру, автор настоящей статьи решил опубликовать новое, более простое решение задачи Дородницына–Ладыженского.

1. Обозначения и уравнения движения. Рассмотрим стационарное обтекание тела с гладкой выпуклой носовой частью, имеющего плоскость симметрии, однородным сверхзвуковым потоком идеального совершенного газа, скорость которого параллельна плоскости симметрии. Поскольку носовая часть гладкая и выпуклая, отошедший головной скачок уплотнения также будет иметь гладкую выпуклую форму. При этом ниже по течению могут находиться другие скачки уплотнения и тангенциальные разрывы.

Будем считать, что в течении существует ограниченная область G , замыкание \bar{G} которой расположено между головным скачком и носовой частью, обладающая следующими свойствами. Линия торможения AB , за исключением точки A на скачке и точки торможения B на теле, лежит внутри замкнутой области \bar{G} (рис. 2). При этом часть границы \bar{G} , лежащая на поверхности тела, представляет собой замыкание двумерной окрестности точки B , а часть границы, лежащая на скачке, представляет собой замыкание двумерной окрестности точки A . Оставшаяся же часть границы вместе с внутренними точками \bar{G} находится внутри зоны течения, в которой отсутствуют скачки, разрывы и другие точки торможения (кроме точки торможения B).

Введем следующие обозначения: \mathbf{V} – вектор скорости, ρ – плотность, p – давление, $\mathbf{\Omega} = \text{rot } \mathbf{V}$ – вектор завихренности. Для совершенного газа давление p и плотность ρ в замкнутой области \bar{G} связаны соотношением $p\rho^{-k} = \sigma$, где k – показатель адиабаты, σ – энтропийная функция. В силу отсутствия теплопередачи энтропийная функция не меняется вдоль линий тока, но может быть различной на различных линиях тока. Это свойство выражается уравнением $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\sigma = 0$.

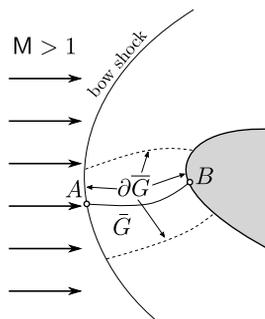


Рис. 2. Замкнутая область \bar{G} и ее граница $\partial\bar{G}$. Линия торможения, за исключением точек A и B , лежит внутри \bar{G}
 [Figure 2. Closed area \bar{G} and its boundary $\partial\bar{G}$. The stagnation line with the exception of points A and B lies inside \bar{G}]

2. Требования к гладкости параметров течения. Поскольку точки замкнутой области \bar{G} , за исключением граничных точек на скачке и на теле, являются внутренними точками зоны течения, в которой отсутствуют скачки и разрывы, будем считать, что в этих точках компоненты скорости \mathbf{V} являются дважды непрерывно дифференцируемыми, а ρ и p — непрерывно дифференцируемыми функциями пространственных координат. Кроме того, поскольку поверхности скачка и тела являются дважды непрерывно дифференцируемыми поверхностями, будем считать, что все параметры течения (\mathbf{V} , ρ и p) и их первые производные, а для компонент скорости — и вторые производные допускают непрерывное продолжение из внутренних точек замкнутой области \bar{G} как на поверхность скачка, так и на поверхность тела. Под значениями производных¹ на упомянутых поверхностях будем понимать их непрерывные продолжения из внутренних точек \bar{G} . Содержательность рассмотрения случая непрерывности вторых производных \mathbf{V} , в том числе в невыколотой окрестности точки B , подробно обоснована в [6].

3. Уравнения движения. Течение газа в замкнутой области \bar{G} подчиняется уравнению неразрывности $\operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) = 0$. Полная энтальпия $i_0 = k(k-1)^{-1}(p/\rho) + \mathbf{V}^2/2$ не меняется при переходе через скачок. Набегающий поток однороден. Поэтому поле i_0 однородно ($\nabla i_0 = 0$) во всех точках течения, т.е. оно однородно до и после скачка. Такое течение называется изоэнергетическим. В этом случае стационарное уравнение Эйлера в форме Крокко [4, 10] записывается следующим образом:²

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = (k-1)^{-1} p \rho^{-1} \nabla \ln \sigma. \quad (1)$$

4. Скоростная альтернатива. Докажем следующее утверждение, которое верно без предположения о какой-либо симметрии.

СКОРОСТНАЯ АЛЬТЕРНАТИВА. Если на некотором отрезке (включая граничные точки отрезка) вихревой линии стационарного изоэнергетического течения идеального совершенного газа с дважды непрерывно дифференцируемыми компонентами скорости и с непрерывно дифференцируемыми плотностью и давлением завихренность не обращается в нуль, то либо весь отрезок вихревой линии состоит из точек торможения, либо во всех точках этого отрезка скорость газа отлична от нуля.

Доказательство. Представим уравнение (1) в виде

$$(p^{-1}\boldsymbol{\Omega}) \times (\rho\mathbf{V}) = (k-1)^{-1} \nabla \ln \sigma.$$

Применение операции ротора к этому уравнению с использованием двух известных векторных тождеств $\operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \equiv (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a}$ и $\operatorname{rot}(\nabla\phi) \equiv 0$ и уравнения неразрывности $\operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) = 0$ дает

$$\rho(\mathbf{V} \cdot \nabla)(p^{-1}\boldsymbol{\Omega}) - ((p^{-1}\boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla)(\rho\mathbf{V}) - \rho\mathbf{V} \operatorname{div}(p^{-1}\boldsymbol{\Omega}) = 0.$$

¹Таким образом, предполагается непрерывность производных во всех точках замкнутой области \bar{G} , в том числе в точке B .

²См. приложение в конце статьи.

Поскольку $\operatorname{div} \boldsymbol{\Omega} \equiv 0$, последнее слагаемое этого уравнения преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{V} \operatorname{div}(p^{-1} \boldsymbol{\Omega}) &= \rho \mathbf{V}(p^{-1} \operatorname{div} \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla p^{-1}) = -\rho p^{-2} \mathbf{V}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla p) = \\ &= -\rho p^{-1} \mathbf{V}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \ln p) = -\rho \mathbf{V}((p^{-1} \boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla \ln p), \end{aligned}$$

а само уравнение — к виду

$$\rho(\mathbf{V} \cdot \nabla)(p^{-1} \boldsymbol{\Omega}) - ((p^{-1} \boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla)(\rho \mathbf{V}) + \rho \mathbf{V}((p^{-1} \boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla \ln p) = 0. \quad (2)$$

Во втором слагаемом представим завихренность в виде $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}$, где $\mathbf{e} = \boldsymbol{\Omega}/|\boldsymbol{\Omega}|$, $|\mathbf{e}| = 1$, $\Omega = |\boldsymbol{\Omega}| > 0$, и запишем уравнение (2) следующим образом:

$$(\mathbf{e} \cdot \nabla)(\rho \mathbf{V}) = \frac{p}{\Omega} [(\rho \mathbf{V} \cdot \nabla)(p^{-1} \boldsymbol{\Omega}) + \rho \mathbf{V}((p^{-1} \boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla \ln p)]. \quad (3)$$

Пусть l — переменная длина дуги на рассматриваемом отрезке вихревой линии. Тогда на этой вихревой линии все параметры течения и их производные есть функции от l . Поэтому $(\mathbf{e} \cdot \nabla)(\rho \mathbf{V}) = \frac{d}{dl}(\rho \mathbf{V})$, а уравнение (3) представляется в виде линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (для компонент вектора $\rho \mathbf{V}$) с коэффициентами, зависящими от l :

$$\frac{d}{dl} \begin{pmatrix} \rho V_x \\ \rho V_y \\ \rho V_z \end{pmatrix} = \frac{p}{\Omega} \begin{pmatrix} f + \partial(p^{-1} \Omega_x)/dx & \partial(p^{-1} \Omega_x)/dy & \partial(p^{-1} \Omega_x)/dz \\ \partial(p^{-1} \Omega_y)/dx & f + \partial(p^{-1} \Omega_y)/dy & \partial(p^{-1} \Omega_y)/dz \\ \partial(p^{-1} \Omega_z)/dx & \partial(p^{-1} \Omega_z)/dy & f + \partial(p^{-1} \Omega_z)/dz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho V_x \\ \rho V_y \\ \rho V_z \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где $f = p^{-1}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \ln p$, а нижние индексы обозначают компоненты векторов в произвольно выбранной прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$.

Коэффициенты матрицы зависят как от самих газодинамических функций, так и от их первых производных, и являются непрерывными (и ограниченными) функциями пространственных координат на рассматриваемом отрезке вихревой линии (поскольку из непрерывности $\boldsymbol{\Omega}$ и из условия $\Omega = |\boldsymbol{\Omega}| > 0$ следует ограниченность p/Ω на этом отрезке). Если считать коэффициенты матрицы заданными функциями переменной l , то матричное уравнение (4) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений для компонент вектора $\rho \mathbf{V}$, рассматриваемых как функции переменной l . Эта система линейна, а ее коэффициенты зависят от l , непрерывны по l и ограничены в ограниченной области (поскольку они непрерывны и ограничены как функции пространственных координат, которые в свою очередь непрерывны и ограничены как функции переменной l). Поэтому из теоремы существования и единственности для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [11–13] следует, что на всем рассматриваемом отрезке линии тока либо $\rho \mathbf{V} \equiv 0$, либо $\rho \mathbf{V} \neq 0$. Скоростная альтернатива доказана. \square

Замечание 1. Рассмотрение в скоростной альтернативе именно отрезков вихревых линий существенно. Это связано с тем, что из условия $\Omega = |\boldsymbol{\Omega}| > 0$ для (открытого) интервала вихревой линии не следует ограниченность p/Ω на этом интервале.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Сформулированные выше «требования к гладкости параметров течения» обосновывают векторные тождества, использованные выше при доказательстве. Кроме того, непрерывность вторых производных скорости означает непрерывность первых производных завихренности Ω , что в свою очередь позволяет так параметризовать векторную линию Ω , что пространственные координаты точек на этой линии будут непрерывно зависеть от параметра (в доказательстве это параметр l).

5. Завихренность в точке торможения. Точка торможения B (см. рис. 1) есть точка растекания газа. Поэтому энтропийная функция на поверхности тела равна своему значению в точке B и вектор $\nabla \ln \sigma$ ортогонален поверхности тела. Вместе с уравнением (1) это означает, что в точках поверхности тела, где $\mathbf{V} \neq 0$ (то есть всюду, кроме точки B), вектор Ω лежит в касательной к поверхности тела плоскости. Из непрерывности Ω следует, что в точке B вектор Ω также лежит в касательной к поверхности тела плоскости. Поэтому если предположить, что $\Omega(B) \neq 0$, то через точку B должен проходить отрезок вихревой линии (завихренность Ω на этом отрезке отлична от нуля), лежащий на поверхности тела. Но на такой линии есть точка торможения и точки со скоростью, отличной от нуля (все остальные точки отрезка), что противоречит скоростной альтернативе (см. предыдущий раздел). Поэтому предположение $\Omega(B) \neq 0$ приводит к противоречию. Следовательно, $\Omega(B) = 0$. Вывод о нулевой завихренности в точке торможения получен без использования свойств течения, вытекающих из существования плоскости симметрии. Этот промежуточный результат сам по себе представляет важное свойство трехмерных течений в окрестности точки торможения.

6. Течение с плоскостью симметрии. Далее будем рассматривать течение, в котором обтекаемое тело симметрично относительно некоторой плоскости, которая параллельна скорости однородного сверхзвукового набегающего потока \mathbf{V}_0 . Расположим прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ так, чтобы плоскость симметрии течения совпала с плоскостью Oxy , то есть с плоскостью $z = 0$. Введем обозначения: u , v и w — компоненты скорости газа \mathbf{V} в системе $Oxyz$; \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} — единичные базисные векторы этой системы (\mathbf{k} направлен в положительном направлении оси z , а $\mathbf{V}_0 = u_0 \mathbf{i}$). В силу симметрии течение за скачком будет симметричным:

$$p(x, y, -z) = p(x, y, z), \quad \rho(x, y, -z) = \rho(x, y, z), \quad (5)$$

$$u(x, y, -z) = u(x, y, z), \quad v(x, y, -z) = v(x, y, z), \quad (6)$$

$$w(x, y, -z) = -w(x, y, z) \quad (\Rightarrow w(x, y, 0) = 0). \quad (7)$$

7. Завихренность на линии торможения. В силу симметрии линия торможения и точка торможения лежат на плоскости симметрии $z = 0$. Упростим уравнение (2) для точек на плоскости симметрии (и для точек на линии торможения).

Из равенств (5)–(7) следует, что на плоскости симметрии выполняются шесть равенств: $\partial \rho / \partial z = \partial p / \partial z = \partial u / \partial z = \partial v / \partial z = \partial w / \partial x = \partial w / \partial y = 0$. Поэтому на плоскости симметрии

$$\Omega(x, y, 0) = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k} =$$

$$= (0 - 0)\mathbf{i} + (0 - 0)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Следовательно, на плоскости симметрии и на линии торможения $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\mathbf{k}$, где $\Omega = |\boldsymbol{\Omega}|$, и

$$(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) = \Omega(\mathbf{k} \cdot \nabla) = \Omega \frac{\partial}{\partial z}.$$

Поэтому

$$(p^{-1}\boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla \ln p = p^{-1}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \ln p = p^{-1}\Omega \frac{\partial}{\partial z} \ln p = 0,$$

что означает равенство нулю последнего слагаемого (2).

Учитывая, что $\partial\rho/\partial z = \partial u/\partial z = \partial v/\partial z = 0$, упростим второе слагаемое (2):

$$\begin{aligned} ((p^{-1}\boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla)(\rho\mathbf{V}) &= p^{-1}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)(\rho\mathbf{V}) = p^{-1}\Omega \frac{\partial}{\partial z}(\rho\mathbf{V}) = \\ &= p^{-1}\rho\Omega \frac{\partial}{\partial z}(u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}) = \left(p^{-1}\rho\Omega \frac{\partial w}{\partial z}\right)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Поскольку на плоскости симметрии $w(x, y, 0) = 0$, оператор

$$\mathbf{V} \cdot \nabla = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y},$$

примененный на плоскости симметрии (где $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\mathbf{k}$) к вектору $p^{-1}\boldsymbol{\Omega}$, дает

$$\left(u \frac{\partial}{\partial x}(p^{-1}\Omega) + v \frac{\partial}{\partial y}(p^{-1}\Omega)\right)\mathbf{k}.$$

Следовательно, первое слагаемое (2) на плоскости симметрии имеет вид

$$\rho(\mathbf{V} \cdot \nabla)(p^{-1}\boldsymbol{\Omega}) = [\rho(\mathbf{V} \cdot \nabla)(p^{-1}\Omega)]\mathbf{k}.$$

В итоге получается, что векторное уравнение (2) на плоскости симметрии равносильно скалярному уравнению

$$\rho(\mathbf{V} \cdot \nabla)(p^{-1}\Omega) - p^{-1}\rho\Omega \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

или

$$\rho p^{-1}(\mathbf{V} \cdot \nabla)\Omega - \Omega \rho p^{-2}(\mathbf{V} \cdot \nabla p) - \Omega \rho p^{-1} \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Во всех точках линии AB , кроме точки B , скорость \mathbf{V} отлична от нуля, и, следовательно, $\mathbf{V} = V\mathbf{e}$, где $\mathbf{e} = \mathbf{V}/|\mathbf{V}|$, $V = |\mathbf{V}|$, $|\mathbf{e}| = 1$ (не путать с вектором \mathbf{e} в доказательстве скоростной альтернативы). В этих точках последнее уравнение равносильно уравнению $(\mathbf{e} \cdot \nabla)\Omega = \Omega(p^{-1}(\mathbf{e} \cdot \nabla p) + V^{-1}\partial w/\partial z)$.

Если l — переменная длина дуги на линии AB (величина l отсчитывается от точки A), то последнее уравнение суть обыкновенное дифференциальное

уравнение для величины завихренности Ω , рассматриваемой как функция от l :

$$\frac{d}{dl}\Omega = \Omega(p^{-1}(\mathbf{e} \cdot \nabla p) + V^{-1}\partial w/\partial z),$$

где множитель $(p^{-1}(\mathbf{e} \cdot \nabla p) + V^{-1}\partial w/\partial z)$ можно считать некоторой заданной функцией переменной l . Следовательно, для любой точки $C \neq B$, лежащей на линии AB ,

$$\Omega(C) = \Omega(A) \exp \{I(C)\}, \quad (8)$$

где $I(C) = \int_{AC} (p^{-1}(\mathbf{e} \cdot \nabla p) + V^{-1}\partial w/\partial z) dl$ — криволинейный интеграл вдоль линии AB от точки A до точки C . Подынтегральная функция есть сумма двух слагаемых. Первое слагаемое $p^{-1}(\mathbf{e} \cdot \nabla p)$ ограничено, т.к. давление ограничено от нуля. При этом второе слагаемое $V^{-1}\partial w/\partial z$ может быть не ограничено в окрестности точки B , где $V = 0$. Передняя точка торможения B является точкой растекания. В некоторой пространственной окрестности точки B линии тока, проходящие рядом с линией торможения и находящиеся вне плоскости симметрии, также растекаются вблизи поверхности тела, удаляясь от плоскости симметрии. Поэтому из симметрии следует, что в некоторой пространственной окрестности точки B выполняются неравенства $w \leq 0$ при $z \leq 0$ и $w \geq 0$ при $z \geq 0$. Таким образом, в этой окрестности на линии AB выполняется неравенство $V^{-1}\partial w/\partial z \geq 0$. Это значит, что несобственный интеграл $I(B) = \int_{AB} (p^{-1}(\mathbf{e} \cdot \nabla p) + V^{-1}\partial w/\partial z) dl$ или сходится, или расходится к $+\infty$. Если предположить, что $\Omega(A) \neq 0$, то, согласно (8), случаю $I(B) = +\infty$ соответствует бесконечная завихренность в точке B (уравнение (8) верно на всей линии торможения, исключая точку B , но завихренность, как и остальные параметры течения, непрерывна на всей линии торможения без исключения). Это противоречит полученному выше выводу о нулевой завихренности в точке B . Поэтому или $\Omega(A) = 0$, или интеграл $I(B)$ сходится. В первом случае из (8) следует, что завихренность $\Omega = 0$ на всей линии торможения. Во втором случае $\Omega(B) = \lim_{C \rightarrow B} \Omega(C)$, где C приближается к B по линии торможения. То есть $\Omega(B) = \Omega(A) \exp I(B)$, где $0 < \exp I(B) < +\infty$. С учетом $\Omega(B) = 0$ снова приходим к выводу, что $\Omega(A) = 0$ и, согласно (8), завихренность $\Omega = 0$ на всей линии торможения. Это значит (см. уравнение (1)), что на всей линии торможения $\nabla\sigma \equiv 0$. Таким образом, получен следующий результат.

Завихренность Ω и градиент энтропийной функции $\nabla\sigma$ в течении с плоскостью симметрии равны нулю во всех точках линии торможения, включая точку ее начала на скачке ($\nabla\sigma(A) = 0$).

8. Завершение доказательства. Пусть A' — точка на скачке, в которой касательная к скачку плоскость перпендикулярна направлению набегающего потока (начало лидирующей линии тока за скачком, лидирующая точка скачка). Параметры течения на разных сторонах скачка связаны условиями на косом скачке уплотнения [3, 4]. Из этих условий и из того, что скачок имеет искривленную выпуклую форму, следует известное свойство, состоящее в том, что $\nabla\sigma$ на поверхности скачка (в течении за скачком) равен нулю только в точке A' . Итак, A' — единственная точка на скачке, где $\nabla\sigma = 0$,

а энтропия максимальна на линии тока, начинающейся в этой точке. Выше было показано, что $\nabla\sigma(A) = 0$. Поэтому точка A совпадает с точкой A' . Таким образом, приходим к основному результату (в формулировке опущены требования к гладкости, сформулированные в начале статьи).

В течениях идеального совершенного газа с отошедшим головным скачком при обтекании тел с гладкой выпуклой носовой частью при наличии плоскости симметрии течения линия торможения совпадает с лидирующей линией (то есть начинается там, где касательная к скачку плоскость перпендикулярна скорости набегающего потока (см. рис. 1)), а энтропия принимает максимальное значение на линии торможения и на поверхности тела. При этом завихренность на всей линии торможения равна нулю.

Заключение. Строго установлено, что при обтекании с отошедшим головным скачком тел с гладкой выпуклой носовой частью при наличии плоскости симметрии течения линия торможения совпадает с лидирующей линией, то есть начинается там, где касательная к скачку плоскость перпендикулярна скорости набегающего потока, а энтропия принимает максимальное значение на линии торможения и на поверхности тела. При этом завихренность на всей линии торможения равна нулю.

Доказательство проведено без использования критерия Зоравского и с минимальным требованием непрерывности только первых производных полей плотности и давления.

Приложение. Докажем, что векторное уравнение (1) в частном случае изоэнергетических ($\nabla i_0 = 0$) течений эквивалентно векторному уравнению Эйлера, записанному в классической форме

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = -\rho^{-1}\nabla p. \quad (9)$$

Используя известное векторное тождество $\nabla(\mathbf{a}^2) \equiv 2(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{a} + 2\mathbf{a} \times \text{rot } \mathbf{a}$, запишем уравнение Эйлера (9) в форме Громеки–Ламба $\Omega \times \mathbf{V} = -\rho^{-1}\nabla p - \nabla(\mathbf{V}^2/2)$. Далее выразим $\mathbf{V}^2/2$ через формулу для полной энтальпии $\mathbf{V}^2/2 = i_0 - k(k-1)^{-1}(p/\rho)$ и получим

$$\Omega \times \mathbf{V} = -\rho^{-1}\nabla p - \nabla(i_0 - k(k-1)^{-1}(p/\rho))$$

или (поскольку $\nabla i_0 = 0$)

$$\Omega \times \mathbf{V} = -\rho^{-1}\nabla p + k(k-1)^{-1}\nabla(p\rho^{-1}). \quad (10)$$

Таким образом, уравнение (10) есть уравнение Эйлера для изоэнергетических (постоянная полная энтальпия i_0) течений. Покажем эквивалентность уравнений (1) и (10). Для этого покажем, что правые части (1) и (10) равны.

Используя выражение для энтропийной функции $\sigma = p\rho^{-k}$ для правой части (1), имеем

$$\begin{aligned} k(k-1)^{-1}p\rho^{-1}\nabla \ln \sigma &= k(k-1)^{-1}p\rho^{-1}\nabla \ln(p\rho^{-k}) = \\ &= (k-1)^{-1}p\rho^{-1}(\nabla \ln p - k\nabla \ln \rho) = (k-1)^{-1}p\rho^{-1}(p^{-1}\nabla p - k\rho^{-1}\nabla \rho) = \\ &= (k-1)^{-1}\rho^{-1}\nabla p - k(k-1)^{-1}p\rho^{-2}\nabla \rho = \\ &= (-1 + 1 + (k-1)^{-1})\rho^{-1}\nabla p - k(k-1)^{-1}p\rho^{-2}\nabla \rho = \\ &= (-1 + k(k-1)^{-1})\rho^{-1}\nabla p - k(k-1)^{-1}p\rho^{-2}\nabla \rho = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\rho^{-1}\nabla p + k(k-1)^{-1}(\rho^{-1}\nabla p - p\rho^{-2}\nabla\rho) = \\
&= -\rho^{-1}\nabla p + k(k-1)^{-1}(\rho^{-1}\nabla p + p\nabla(\rho^{-1})) = \\
&= -\rho^{-1}\nabla p + k(k-1)^{-1}\nabla(p\rho^{-1}).
\end{aligned}$$

В начале этой цепочки равенств находится правая часть уравнения (1), в конце — правая часть уравнения (10). Поэтому уравнение (1) есть уравнение Эйлера для изоэнергетических ($\nabla i_0 = 0$) стационарных течений идеального совершенного газа.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Автор несет полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарность. Автор благодарен рецензенту за тщательное прочтение статьи и ценные предложения и комментарии.

Библиографический список

1. Ладыженский М. Д. *Пространственные гиперзвуковые течения газа*. М.: Машиностроение, 1968. 120 с.
2. Крайко А. Н. *Краткий курс теоретической газовой динамики*. М.: МФТИ, 2007. 300 с. EDN: QJUNYN.
3. Седов Л. И. *Механика сплошной среды*. Т. 1. М.: Наука, 1973. 536 с.
4. Mises R. *Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow / Applied Mathematics and Mechanics*. vol. 3. New York, London: Academic Press, 1958. xiii+514 pp.
5. Сизых Г. Б. Значение энтропии на поверхности несимметричной выпуклой головной части при сверхзвуковом обтекании // *ПММ*, 2019. Т. 83, № 3. С. 377–383. EDN: YGUKSX. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0032823519030135>.
6. Сизых Г. Б. Решение задачи Дородницына // *Труды МФТИ*, 2022. Т. 14, № 4. С. 95–107. EDN: TNNYSF.
7. Prim R., Truesdell C. A derivation of Zorawski's criterion for permanent vector-lines // *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1950. vol. 1, no. 1. pp. 32–34. DOI: <https://doi.org/10.2307/2032429>.
8. Truesdell C. *The Kinematics of Vorticity / Indiana University Publications Science Series*. vol. 14. Bloomington: Indiana University Press, 1954. xvii+232 pp.
9. Фридман А. А. *Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости*. Л.–М.: ОНТИ, 1934. 368 с.
10. Batchelor G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge: University Press, 1970. xviii+615 pp.
11. Бибииков Ю. Н. *Курс обыкновенных дифференциальных уравнений*. М.: Высш. шк., 1991. 303 с. EDN: QJYUZF.
12. Петровский И. Г. *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений*. М.: Москов. унив., 1984. 296 с. EDN: QJLPYJ.
13. Понтрягин Л. С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М.: Наука, 1982. 332 с.

MSC: 76N15

Solution of the Dorodnitsin–Ladyzhensky problem

G. B. Sizykh

Moscow Institute of Physics and Technology

(National Research University),

9, Institutskiy per., Dolgoprudny, 141700, Russian Federation.

Abstract

The article is devoted to a rigorous proof of the statement that entropy takes the maximum value on the surface of a body with a blunted nose, streamlined by a supersonic flow, in the presence of a plane of symmetry of the flow. This is obvious for bodies of rotation at zero angle of attack, and it is established by numerical calculations and experimentally at non-zero angles of attack. The proof boils down to the justification that the leading streamline (the current line crossing the shock along the normal) ends on the body. In other words, that the leading streamline and the stagnation line are coincide. Such a proof was obtained by G. B. Sizykh in 2019 for the general spatial case (not only for flows with a plane of symmetry). This rather complicated proof is based on the Zoravsky criterion, which only a narrow circle of specialists has experience using, and is based on the assumption of the continuity of the second derivatives of density and pressure. In this paper, for the practically important case of flows with a plane of symmetry (in particular, the flow around bodies of rotation at a non-zero angle of attack), an original simple proof is proposed, for which the continuity of only the first derivatives of the density and pressure fields is sufficient and it is not necessary to use the Zoravsky criterion.

Keywords: Euler equations, isenthalpic flows, vorticity, stagnation streamline, leading streamline, detached bow shock.

Received: 29th August, 2022 / Revised: 10th November, 2022 /Accepted: 17th November, 2022 / First online: 30th November, 2022

Competing interests. I have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. The author assumes full responsibility for the submission of the final manuscript in print. I approve the final version of the manuscript.

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes

Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Sizykh G. B. Solution of the Dorodnitsin–Ladyzhensky problem, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 4, pp. 764–776. EDN: DWXCOH. DOI: [10.14498/vsgtu1951](https://doi.org/10.14498/vsgtu1951) (In Russian).

Author's Details:

Grigory B. Sizykh  <https://orcid.org/0000-0001-5821-8596>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Higher Mathematics;

e-mail: o1o2o3@yandex.ru

Funding. The research has not received funding.

Acknowledgments. The author thanks the referee for careful reading of the paper and for valuable suggestions and comments.

References

1. Ladyzhenskii M. D. *Prostranstvennyye giperzvukovyye techeniya gaza* [Spatial Hypersonic Gas Flows]. Moscow, Mashinostroenie, 1968, 120 pp. (In Russian)
2. Kraiko A. N. *Kratkii kurs teoreticheskoi gazovoi dinamiki* [Short Course of Theoretical Gas Dynamics]. Moscow, MIPT, 2007, 300 pp. (In Russian). EDN: QJUHYN.
3. Sedov L. I. *A Course in Continuum Mechanics*, vol. 1, Basic Equations and Analytical Techniques. Groningen, The Netherlands, Wolters-Noordhoff Publ., 1971, xix+242 pp.
4. Mises R. *Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow*, Applied Mathematics and Mechanics, vol. 3. New York, London, Academic Press, 1958, xiii+514 pp.
5. Sizykh G. B. Entropy value on the surface of a non-symmetric convex bow part of a body in the supersonic flow, *Fluid Dyn.*, 2019, vol. 54, no. 7, pp. 907–911. EDN: ZULUWJ. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462819070139>.
6. Sizykh G. B. Solution of the Dorodnitsin problem, *Proc. of MIPT*, 2022, vol. 14, no. 4, pp. 95–107 (In Russian). EDN: TNNYSF.
7. Prim R., Truesdell C. A derivation of Zorawski's criterion for permanent vector-lines, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1950, vol. 1, no. 1, pp. 32–34. DOI: <https://doi.org/10.2307/2032429>.
8. Truesdell C. *The Kinematics of Vorticity*, Indiana University Publications Science Series, vol. 14. Bloomington, Indiana University Press, 1954, xvii+232 pp.
9. Friedman A. A. *Opyt gidromekhaniki szhimaemoi zhidkosti* [Experience of Hydromechanics of Compressible Fluid]. Leningrad, Moscow, ONTI, 1934, 368 pp. (In Russian)
10. Batchelor G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge, University Press, 1970, xviii+615 pp.
11. Bibikov Yu. N. *Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii* [A Course in Ordinary Differential Equations]. Moscow, Vyssh. Shk., 1991, 303 pp. (In Russian). EDN: QJYUZF.
12. Petrovsky I. G. *Lektsii po teorii obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii* [Lectures on the Theory of Ordinary Differential Equations]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1984, 296 pp. (In Russian). EDN: QJLPYJ.
13. Pontryagin L. S. *Ordinary Differential Equations*, Adiwes International Series in Mathematics. London, Paris, Pergamon Press, 1962, vi+298 pp.