Е. К. Башкиров, Динамика точно решаемой нелинейной модели квантовой электродинамики резонаторов, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023, номер 2, 250–269

DOI: 10.14498/vsgtu1992

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 27, № 2. С. 250–269
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1992
EDN: TXGRQG

УДК 517.958:530.145

Динамика точно решаемой нелинейной модели квантовой электродинамики резонаторов

Е. К. Башкиров

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева,
Россия, 443086, Самара, Московское ш., 34.

Аннотация

Рассмотрена система, состоящая из двух идентичных искусственных атомов (кубитов), нерезонансно взаимодействующих посредством вырожденных двухфотонных переходов с модой теплового квантового поля идеального микроволнового резонатора при наличии керровской нелинейности. Для рассматриваемой модели получено точное решение квантового уравнения Лиувилля для полной матрицы плотности системы «два кубита + мода поля резонатора». Для решения квантового уравнения эволюции использовано представление «одетых» состояний, то есть собственных функций гамильтониана.

Найден полный набор «одетых» состояний рассматриваемой модели. С его помощью первоначально найдено решение уравнения эволюции для перепутанных начальных состояний кубитов и фоковских состояний поля резонатора, то есть состояний с определенным числом фотонов в резонаторной моде. Указанное решение использовано для построения точного решения квантового уравнения Лиувилля в случае теплового состояния поля резонатора.

Усреднением полной матрицы плотности по переменным поля резонатора найдена редуцированная матрица плотности двух кубитов. Двухкубитная матрица плотности использована для вычисления параметра перепутывания кубитов в аналитическом виде для двух типов начальных перепутанных состояний кубитов белловского типа. В качестве количественного критерия перепутывания кубитов выбран параметр Переса–Хородецких, или отрицательность.

Проведено численное моделирование временной зависимости параметра перепутывания кубитов для различных параметров модели и начальных состояний кубитов. Наиболее интересным представляется результат, заключающийся в том, что для некоторых параметров модели

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Научная статья

Образец для цитирования
Башкиров Е. К. Динамика точно решаемой нелинейной модели квантовой электродинамики резонаторов // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 2. С. 250–269. EDN: TXGRQG. DOI: 10.14498/vsgtu1992.

Сведения об авторе
Евгений Константинович Башкиров https://orcid.org/0000-0001-8682-4956
доктор физико-математических наук, профессор; профессор; каф. общей и теоретической физики; e-mail: bashkirov.ek@ssau.ru

учет керровской нелинейности приводит к существенной стабилизации начального перепутывания кубитов, а также к исчезновению эффекта мгновенной смерти перепутывания.

Ключевые слова: кубиты, квантовое уравнение Лиувилля, точное решение в представлении «одетых» состояний, тепловое поле, перепутывание, мгновенная смерть перепутывания.

Получение: 17 января 2023 г. / Исправление: 15 мая 2023 г. / Принятие: 25 мая 2023 г. / Публикация онлайн: 19 июня 2023 г.

Введение. Перепутанные состояния являются основным ресурсом современных квантовых технологий и устройств квантовой информатики, таких как квантовые компьютеры и квантовые сети [1]. Поэтому крайне важно не только детально изучать природу и свойства перепутанных состояний, но и уметь управлять и манипулировать перепутанными состояниями кубитов различной физической природы. Таким образом, исследование наиболее эффективных схем генерации, механизмов контроля и сохранения перепутанных состояний кубитов является одной из основных задач в физике квантовых вычислений и квантовой обработки информации. Для квантовых вычислений и квантовых коммуникаций требуются максимально перепутанные кубит-кубитные стабильные состояния с большими временами декогеренции. Для генерации таких состояний можно использовать взаимодействие естественных и искусственных атомов (нейтральных ридберговских атомов и ионов в резонаторах и ловушках, примесных спинов, квантовых точек, сверхпроводящих колец с джозефсоновскими контактами, гибридных и оптомеханических систем, азотозамещенных вакансий в алмазе и др.) с электромагнитными полями [2–8]. Обычно для теоретического исследования динамики кубитов, взаимодействующих с электромагнитными полями, используются модели квантовой электродинамики резонаторов [2]. Кубиты в квантовых устройствах всегда взаимодействуют с окружающей их средой. Хорошо известно, что это взаимодействие обычно приводит к декогерентности и исчезновению перепутанности кубитов. Однако в ряде случаев взаимодействие с окружающей средой может, наоборот, являться источником перепутывания. В частности, перепутывание кубитов может быть вызвано тепловым шумом резонатора. Возможность перепутывания двух двухуровневых атомов (кубитов) в рамках простейшей двухчастичной однофотонной модели квантовой электродинамики резонаторов с тепловым полем была показана П. Найтом (P. Knight) и др. [9]. Перепутывание, индуцированное тепловыми шумами в двухкубитных моделях с двухфотонными переходами, исследовано в работах [10–14]. При этом было установлено, что двухфотонное взаимодействие может значительно увеличить степень перепутывания кубитов, индуцированного тепловым шумом, в сравнении с однофотонным взаимодействием. В работах [15–17] было также показано, что наличие расстройки частот переходов в кубитах и тепловой моды резонатора и диполь-дипольного взаимодействия кубитов может существенно увеличить максимальную степень теплового перепутывания кубитов.

Одним из препятствий на пути реализации эффективных и надежных протоколов физики квантовых вычислений и квантовых коммуникаций является также эффект внезапной смерти перепутывания кубитов, заключающийся в исчезновении перепутывания кубитов на временах, меньших времени декогеренции системы, за счет взаимодействия кубитов с полями резонаторов. Такой эффект теоретически впервые был предсказан Ю (T. Yu) и Эберли (J. Eberly) [18, 19] при изучении унитарной динамики двух кубитов в резонаторе. Позднее указанный эффект наблюдался экспериментально для кубитов различной физической природы [20–23].

Таким образом, изучение механизмов, способствующих исчезновению или ослаблению эффекта мгновенной смерти перепутывания кубитов, становится одной из приоритетных задач квантовой информатики. В настоящее время экспериментально получены перепутанные состояния кубитов различной физической природы в резонаторах при различных температурах [4–6]. Это означает наличие тепловых фотонов в резонаторах таких квантовых устройств. Поэтому представляет значительный интерес исследование механизмов, позволяющих предотвратить внезапную смерть перепутывания, индуцированного тепловыми полями резонаторов. В настоящее время предложены различные способы устранения эффекта мгновенной смерти перепутывания, индуцированного тепловым шумом, такие как включение расстройки частот кубитов и поля, прямого диполь-дипольного и изинговского взаимодействия кубитов, штарковского сдвига и др. (см. ссылки в [22]). В последнее время большое количество работ было посвящено исследованию динамики кубитов в моделях квантовой электродинамики резонаторов со средой Керра [24–29]. Указанные исследования были стимулированы экспериментальной работой, в которой был впервые реализован однофотонный режим для сверхпроводящего кубита-трансмона в резонаторе со средой Керра [30]. В нашей работе [31] была показана возможность исчезновения эффекта мгновенной смерти перепутывания кубитов, взаимодействующих с модой теплового поля резонатора посредством однофотонных переходов, за счет использования керровской среды в резонаторе. Представляет большой интерес изучение возможности подавления эффекта мгновенной смерти теплового перепутывания в нелинейной двухфотонной модели со средой Керра. Заметим, что результаты исследования динамики перепутывания кубитов в нелинейной двухфотонной модели, индуцированного тепловым шумом, для случая слабых тепловых полей представлены в тезисе [32]. При этом основное внимание было уделено изучению влияния нелинейности на перепутывание кубитов, индуцированного тепловым шумом, в случае начального сепарабельного состояния кубитов.

В настоящей работе нами найдено в представлении «одетых» состояний точное решение квантового уравнения Лиувилля для матрицы плотности двухфотонной модели квантовой электродинамики резонаторов, состоящей из двух идентичных кубитов, взаимодействующих с одномодовым тепловым полем идеального резонатора со средой Керра посредством вырожденных двухфотонных переходов. В качестве начальных состояний кубитов выбраны перепутанные состояния белловского типа. На основе точного решения нам удалось получить выражение для критерия перепутывания двух кубитов — парметра Переса—Хородецких, или отрицательности, и исследовать влияние керровской нелинейности на динамику кубит-кубитного перепутывания. При этом показано, что внедрение керровской среды в резонатор приводит к исчезновению эффекта мгновенной смерти перепутывания.

1. Модель и точное решение временного уравнения Шредигера для фоковского состояния поля. Рассмотрим систему, состоящую из двух идентичных кубитов Q_1 и Q_2 с энергетической щелью $\hbar\omega_0$, нерезонансно взаимодействующих посредством двухфотонных вырожденных переходов с полем одномодового резонатора частоты ω. Положим, что константы связи между кубитами и полем резонатора равны. Предположим также, что в резонаторе имеется дополнительная среда Керра. Тогда гамильтониан взаимодействия для рассматриваемой модели в системе отсчета, вращающейся с удвоенной частотой моды поля 2ω, можно записать в виде

$$H = \sum_{i=1}^{2} \hbar\Delta\sigma_i^z/2 + \sum_{i=1}^{2} \hbar g(\sigma_i^+ a^2 + \sigma_i^- a^{\dagger 2}) + \hbar X a^{\dagger 2} a^2, \tag{1}$$

где σ_i^z — операторы разности населенностей для возбужденного $|+\rangle_i$ и основного $|-\rangle_i$ состояний в i-том кубите $(i = 1, 2)$, $\sigma_i^+ = |+\rangle_{ii}\langle -|$ и $\hat{\sigma}_i^- = |-\rangle_{ii}\langle +|$ — повышающий и понижающий операторы в i-том кубите, $a^\dagger$ и a — операторы рождения и уничтожения фотонов резонаторной моды, g — константа двухфотонного взаимодействия между кубитами и полем резонатора, $\Delta = \omega_0 - 2\omega$ — параметр расстройки и X — константа нелинейности Керра.

Будем полагать, что в начальный момент времени кубиты приготовлены в одном из перепутанных состояний белловского типа:

$$|\Psi(0)\rangle^{(1)}_{Q_1 Q_2} = \cos\theta|+,-\rangle + \sin\theta|-,+\rangle, \tag{2}$$

или

$$|\Psi(0)\rangle^{(2)}_{Q_1 Q_2} = \cos\theta|+,+\rangle + \sin\theta|-,-\rangle, \tag{3}$$

где θ — параметр, определяющий степень начального перепутывания кубитов Q_1 и Q_2. Максимальной степени перепутывания кубитов соответствует значение $\theta = \pi/4$. Такие начальные состояния для кубитов в резонаторах можно получить с помощью микроволновых импульсов определенной длительности [33].

В качестве начального состояния поля выберем одномодовое тепловое состояние с матрицей плотности вида

$$\rho_F(0) = \sum_n p_n |n\rangle\langle n|\,. \tag{4}$$

Здесь весовые функции p_n в формуле (4) имеют вид

$$p_n = \frac{\bar{n}^n}{(1+\bar{n})^{n+1}},$$

где $\bar{n}$ — среднее число тепловых фотонов, определяемое формулой Бозе—Эйнштейна

$$\bar{n} = \left(\exp\left[\hbar\omega/k_B T\right] - 1\right)^{-1},$$

k_B — постоянная Больцмана и T — температура микроволнового резонатора. В зависимости от физической природы кубитов, взаимодействующих с полями резонаторов, температура резонатора может меняться от комнатных температур для азотозамещенных вакансий в алмазе до нК в случае нейтральных атомов и ионов в магнитных ловушках [4]. Поэтому в резонаторе всегда имеются тепловые фотоны.

Поставим перед собой задачу найти точную динамику рассматриваемой модели. Для решения поставленной задачи будем следовать общей схеме, предложенной в работе [17]. Начнем решение задачи для случая фоковского начального состояния электромагнитного поля резонатора, а затем обобщим эти результаты на случай теплового поля.

В случае фоковского начального состояния поля волновая функция есть

$$|\Psi(0)\rangle_F = |n\rangle \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Состояние полной системы, включающей кубиты и моду поля резонатора, мы можем в произвольный момент времени t задать с помощью волновой функции $|\Psi(t)\rangle_n$, удовлетворяющей временному уравнению Шредингера вида

$$\imath\hbar\frac{\partial|\Psi(t)\rangle_n}{\partial t} = H|\Psi(t)\rangle_n \tag{5}$$

с начальным условием

$$|\Psi(0)\rangle_n = |\Psi(0)\rangle_{Q_1\,Q_2} \otimes |\Psi(0)\rangle_F = |\Psi(0)\rangle_{Q_1\,Q_2} \otimes |n\rangle$$

и стандартными для квантовой механики граничными условиями.

Формальное решение уравнения (5) можно представить в виде

$$|\Psi(t)\rangle_n = e^{-\imath Ht/\hbar}|\Psi(0)\rangle_n. \tag{6}$$

Эволюция волнового вектора $|\Psi(t)\rangle_n$ происходит в 4-мерном гильбертовом пространтсве. Предположим, в начальный момент времени волновая функция системы имеет вид $|+,+,n\rangle$, $|+,-,n+2\rangle$, $|-,+,n+2\rangle$, $|-,-,n+4\rangle$ или их суперпозиции, где $n = 0, 1, 2, \dots$. Тогда в качестве базиса гильбертова пространства, в котором эволюционирует волновая функция системы, мы можем выбрать векторы вида

$$|-,-,n+4\rangle, \quad |+,-,n+2\rangle, \quad |-,+,n+2\rangle, \quad |+,+,n\rangle. \tag{7}$$

Для нахождения явного вида вектора состояния $|\Psi(t)\rangle_n$ удобно использовать так называемые «одетые» состояния, т.е. собственные функции гамильтониана (1). В базисе (7) собственные функции имеют вид

$$\begin{aligned}|\Phi_{in}\rangle = w_{in}\big(C_{i1n}|-,-,n+4\rangle + C_{i2n}|+,-,n+2\rangle +{}\\ + C_{i3n}|-,+,n+2\rangle + C_{i4n}|+,+,n\rangle\big) \quad (i = 1, 2, 3, 4),\end{aligned} \tag{8}$$

где

$$w_{in} = 1/\sqrt{|C_{i1n}|^2 + |C_{i2n}|^2 + |C_{i3n}|^2 + |C_{i4n}|^2},$$

$$C_{11,n} = 0, \quad C_{12,n} = -1, \quad C_{13,n} = 1, \quad C_{14,n} = 0,$$

$$C_{i1,n} = \frac{-12\delta - 7n\delta - n^2\delta + 12n\chi - 5n^2\chi - 6n^3\chi - n^4\chi + 12E_{in} + 7nE_{in} + n^2E_{in}}{\sqrt{2+3n+n^2}\sqrt{12+7n+n^2}(-\delta + 12\chi + 7n\chi + n^2\chi - E_{in})},$$

$$C_{i2,n} = \frac{\alpha_{in}\gamma_{in}}{(-12-7n-n^2)\beta_{in}}, \quad C_{i3,n} = -\frac{\alpha_{in}}{\beta_{in}}, \quad C_{i4,n} = 1,$$

$$\alpha_{in}=(-12-7n-n^2)\big(\delta+(-1+n)n\chi-E_{in}\big)-(1+n)(2+n)\big(-\delta+(3+n)(4+n)\chi-E_{2n}\big),$$

$$\beta_{in} = \sqrt{(1+n)(2+n)}(-12-7n-n^2) - \sqrt{(1+n)(2+n)}\gamma_{in},$$

$$\gamma_{in} = -(3+n)(4+n) + \big((1+n)(2+n)\chi - E_{in}\big)\big(-\delta + (3+n)(4+n)\chi - E_{in}\big),$$

и $\chi = X/\hbar g$, $\delta = \Delta/g$.

Соответствующие собственные значения энергии есть

$$E_{1n} = (2+3n+n^2)\chi, \qquad E_{2n} = \frac{1}{3}\left(A_n + B_n/G_n + G_n\right),$$

$$E_{3n} = \frac{1}{12}\,\mathrm{Re}\big[4A_n - 2i(-i+\sqrt{3})B_n/G_n + 2i(i+\sqrt{3})G_n\big],$$

$$E_{4n} = \frac{1}{12}\,\mathrm{Re}\big[4A_n + 2i(-i+\sqrt{3})B_n/G_n - 2i(i+\sqrt{3})G_n\big],$$

где

$$G_n = \left(C_n + \frac{1}{2}\sqrt{D_n + S_n}\right)^{1/3}, \quad A_n = (14+9n+3n^2)\chi,$$

$$B_n = 3\left(28+4n(5+n)+\delta^2\right) - 12(3+2n)\delta\chi + 4(31+12n(3+n))\chi^2,$$

$$C_n = 36(31+2n(19+5n))\chi + 36\delta^2\chi + \\ + 16(7+6n)(11+6n)\chi^3 - 18\delta(15+6n+8(3+2n)\chi^2),$$

$$D_n = -4(3(28+4n(5+n)+\delta^2) - 12(3+2n)\delta\chi + 4(31+12n(3+n))\chi^2)^3,$$

$$S_n = 16(27(5+2n)\delta - 18(31+2n(19+5n)+\delta^2)\chi + \\ + 72(3+2n)\delta\chi^2 - 8(7+6n)(11+6n)\chi^3)^2.$$

Теперь для нахождения явного вида временной волновой функции достаточно выразить начальный вектор состояния через собственные функции гамильтониана (8). Выполним это действие для начального состояния вида $|\Psi(0)\rangle = |+,-,n+2\rangle$. Имеем

$$|+,-,n+2\rangle = C^*_{12n}|\Phi_{1n}\rangle + C^*_{22n}|\Phi_{2n}\rangle + C^*_{32n}|\Phi_{3n}\rangle + C^*_{42n}|\Phi_{4n}\rangle. \tag{9}$$

Подставляя представление (9) в правую часть формулы (6), получаем окончательно явный вид временной волновой функции в случае начального состояния $|+,-,n+2\rangle$:

$$|\Psi(t)\rangle_n^{(+-)} = Z_{12,n}|-,-,n+4\rangle + Z_{22,n}|+,-,n+2\rangle + \\ + Z_{32,n}|-,+,n+2\rangle + Z_{42,n}|+,+,n\rangle,$$

где

$$Z_{i2,n} = e^{-\imath E_{1n}t/\hbar}\, w_{1n}\, C^*_{i2n}\, C_{1in} + e^{-\imath E_{2n}t/\hbar}\, w_{2n}\, C^*_{i2n}\, C_{2in} + \\ + e^{-\imath E_{3n}t/\hbar}\, w_{3n}\, C^*_{i2n}\, C_{3in} + e^{-\imath E_{4n}t/\hbar}\, w_{4n}\, C^*_{i2n}\, C_{4in} \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (10)$$

Для начального состояния $|-, +, n+2\rangle$ для временной волновой функции можно получить выражения вида

$$|\Psi(t)\rangle_n^{(-+)} = Z_{13,n}|-, -, n+4\rangle + Z_{23,n}|+, -, n+2\rangle + \\ + Z_{33,n}|-, +, n+2\rangle + Z_{43,n}|+, +, n\rangle,$$

где коэффициенты $Z_{i3,n}$ имеют вид (10) при замене C^*_{i2n} на C^*_{i3n}. Аналогично для начальных состояний $|+, +, n\rangle$ и $|-, -, n+4$ получаем

$$|\Psi(t)\rangle_n^{(++)} = Z_{14,n}|-, -, n+4\rangle + Z_{24,n}|+, -, n+2\rangle + \\ + Z_{34,n}|-, +, n+2\rangle + Z_{44,n}|+, +, n\rangle,$$

$$|\Psi(t)\rangle_n^{(--)} = Z_{13,n}|-, -, n+4\rangle + Z_{23,n}|+, -, n+2\rangle + \\ + Z_{33,n}|-, +, n+2\rangle + Z_{43,n}|+, +, n\rangle$$

соответственно. Коэффициенты $Z_{i4,n}$ и $Z_{i1,n}$ имеют вид (10) при замене C^*_{i2n} на C^*_{i4n} или C^*_{i1n} соответственно.

Для начальных состояний изучаемой системы $|+, -, 0\rangle$ и $|+, -, 1\rangle$ временные волновые функции могут быть записаны как

$$|\Psi(t)\rangle_0^{(+-)} = G_{12}|-, -, 2\rangle + G_{22}|+, -, 0\rangle + G_{32,n}|-, +, 0\rangle,$$

где

$$G_{12} = -\frac{2\sqrt{2}e^{\frac{1}{2}it(\delta-2\chi)}\sin\left(\frac{1}{2}\Omega_1 t\right)}{\Omega_1^2},$$

$$G_{22} = \frac{ie^{-\frac{1}{2}it(\Omega_1+2\chi)}\left(2e^{\frac{1}{2}it(\Omega_1+2\chi)}\Omega_1^2 + e^{\frac{1}{2}it(\delta+2\Omega_1)}(16+\zeta_1) + e^{\frac{1}{2}it\delta}(16+\zeta_2)\right)}{4\Omega_1^2},$$

$$G_{32} = \frac{e^{-\frac{1}{2}it(\Omega_1+2\chi)}\left(-2e^{\frac{1}{2}it(\Omega_1+2\chi)}\Omega_1^2 + e^{\frac{1}{2}it(\delta+2\Omega_1)}(16+\zeta_1) + e^{\frac{1}{2}it\delta}(16+\zeta_2)\right)}{4\Omega_1^2},$$

$$\Omega_1 = \sqrt{16 + (\delta - 2\chi)^2}, \quad \zeta_1 = (\delta - 2\chi)(\delta + \Omega_1 - 2\chi), \\ \zeta_2 = (\delta - 2\chi)(\delta - \Omega_1 - 2\chi)$$

и

$$|\Psi(t)\rangle_1^{(+-)} = F_{12}|-, -, 3\rangle + F_{22}|+, -, 1\rangle + F_{32,n}|-, +, 1\rangle,$$

где

$$F_{12} = -\frac{2i\sqrt{6}e^{\frac{1}{2}it(\delta-6\chi)}\sin(\frac{1}{2}\Omega_2 t)}{\Omega_2},$$

$$F_{22} = \frac{e^{-\frac{1}{2}it(\Omega_2+6\chi)}\left(2e^{\frac{1}{2}it(\Omega_2+6i\chi)}\Omega_2^2 + e^{\frac{1}{2}it\delta}(48+\xi_1) + e^{\frac{1}{2}it(\delta+2\Omega_2)}(48+\xi_2)\right)}{4\Omega_2^2},$$

$$F_{32} = \frac{e^{-\frac{1}{2}it(\Omega_2+6\chi)}\big(-2e^{\frac{1}{2}it(\Omega_2+6i\chi)}\Omega_2^2 + e^{\frac{1}{2}it\delta}(48+\xi_1) + e^{\frac{1}{2}it(\delta+2\Omega_2)}(48+\xi_2)\big)}{4\Omega_2^2},$$

$$\Omega_2 = \sqrt{48+(\delta-6\chi)^2}, \quad \xi_1 = (\delta-6\chi)(\delta+\Omega_2-6\chi),$$
$$\xi_2 = (\delta-6\chi)(\delta-\Omega_2-6\chi)$$

соответственно.

Для начальных состояний изучаемой системы $|-,+,0\rangle$ и $|-,+,1\rangle$ временные волновые функции могут быть записаны как

$$|\Psi(t)\rangle_0^{(-+)} = G_{13}|-,-,2\rangle + G_{23}|+,-,0\rangle + G_{33,n}|-,+,0\rangle,$$

где $G_{13} = G_{12}$, $G_{23} = G_{22}$, $G_{33} = G_{32}$;

$$|\Psi(t)\rangle_1^{(-+)} = F_{13}|-,-,2\rangle + F_{23}|+,-,0\rangle + F_{33,n}|-,+,0\rangle,$$

где $F_{13} = F_{12}$, $F_{23} = F_{22}$, $F_{33} = F_{32}$.

Наконец, для начальных состояний системы $|-,-,0\rangle$, $|-,-,1\rangle$, $|-,-2\rangle$ и $|-,-,3\rangle$ временные волновые функции есть

$$|\Psi(t)\rangle_0^{(--)} = e^{-it\delta}|-,-,0\rangle, \quad |\Psi(t)\rangle_1^{(--)} = e^{-it\delta}|-,-,1\rangle,$$

$$|\Psi(t)\rangle_2^{(--)} = P_1|-,-,2\rangle + P_2|+,-,0\rangle + P_3|-,+,0\rangle,$$

где

$$P_1 = \frac{e^{-\frac{1}{2}it(-\delta+\Omega_1+2\chi)}\big(16+\zeta_2+e^{it\Omega_1}(16+\zeta_1)\big)}{2\Omega_1^2},$$

$$P_2 = P_3 = -\frac{2i\sqrt{2}e^{\frac{1}{2}it(\delta-2\chi)}\sin(\frac{1}{2}\Omega_1 t)}{\Omega_1};$$

$$|\Psi(t)\rangle_3^{(--)} = Q_1|-,-,1\rangle + Q_2|+,-,1\rangle + Q_3|-,+,1\rangle,$$

где

$$Q_1 = \frac{e^{-\frac{1}{2}it(-\delta+\Omega_2+6\chi)}\big(48+\xi_2+e^{it\Omega_2}(48+\xi_1)\big)}{2\Omega_2^2},$$

$$Q_2 = Q_3 = -\frac{2i\sqrt{6}e^{\frac{1}{2}it(\delta-6\chi)}\sin(\frac{1}{2}\Omega_2 t)}{\Omega_2}.$$

Используя полный набор собственных функций гамильтониана (8), мы можем найти явный вид временной волновой функции для начального состояния (2):

$$\begin{aligned}
|\Psi(t)\rangle_n^{(1)} &= \cos\theta|\Psi\rangle_{n-2}^{(+-)} + \sin\theta|\Psi\rangle_{n-2}^{(-+)} \text{ для } n \geqslant 2,\\
|\Psi(t)\rangle_1^{(1)} &= \cos\theta|\Psi\rangle_1^{(+-)} + \sin\theta|\Psi\rangle_1^{(-+)},\\
|\Psi(t)\rangle_0^{(1)} &= \cos\theta|\Psi\rangle_0^{(+-)} + \sin\theta|\Psi\rangle_0^{(-+)}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Аналогично для состояния (3) получаем

$$
\begin{aligned}
&|\Psi(t)\rangle_n^{(2)} = \cos\theta|\Psi\rangle_n^{(++)} + \sin\theta|\Psi\rangle_{n-4}^{(--)} \text{ для } n \geqslant 4,\\
&|\Psi(t)\rangle_3^{(2)} = \cos\theta|\Psi\rangle_3^{(++)} + \sin\theta|\Psi\rangle_3^{(--)},\\
&|\Psi(t)\rangle_2^{(2)} = \cos\theta|\Psi\rangle_2^{(++)} + \sin\theta|\Psi\rangle_2^{(--)},\\
&|\Psi(t)\rangle_1^{(2)} = \cos\theta|\Psi\rangle_1^{(++)} + \sin\theta|\Psi\rangle_1^{(--)},\\
&|\Psi(t)\rangle_0^{(1)} = \cos\theta|\Psi\rangle_0^{(++)} + \sin\theta|\Psi\rangle_0^{(--)}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

2. Точное решение квантового уравнения Лиувилля для теплового состояния поля. Имея явные выражения для временных волновых функций системы (11) и (12), мы можем найти временную матрицу плотности, являющуюся решением уравнения Лиувилля

$$
\imath\hbar\frac{\partial\rho(t)}{\partial t} = [H, \rho(t)]
$$

с начальными условиями

$$
\rho(0)\rangle_n = |\Psi(0)\rangle_{Q_1\,Q_2}^{(i)}\ {}_{Q_1\,Q_2}\langle\Psi(0)|^{(i)} \otimes \rho(0)_F \qquad (i = 1, 2).
$$

Решение квантового уравнения Лиувилля для начальных состояний (2) и (3) и теплового состояния поля (4) можно записать в виде

$$
\rho(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n |\Psi(t)\rangle_n^{(1)}\,{}_n\langle\Psi(t)|^{(1)}, \tag{13}
$$

$$
\rho(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n |\Psi(t)\rangle_n^{(2)}\,{}_n\langle\Psi(t)|^{(2)} \tag{14}
$$

соответственно.

Полученные точные решения (13) и (14) могут быть использованы для получения временных зависимостей любых наблюдаемых для подсистемы кубитов и резонаторного поля. В настоящей работе мы воспользуемся точными решениями для полной матрицы плотности для нахождения временной зависимости параметра перепутывания кубитов. Для этого нам необходимо получить из полной матрицы плотности $\rho(t)$ редуцированную двухкубитную матрицу плотности путем усреднения полной матрицы плотности по переменным поля

$$
\rho_{Q_1\,Q_2}(t) = \mathrm{Tr}_F\,\rho(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle n|\rho(t)|n\rangle.
$$

Удобно записать редуцированную матрицу плотности $\rho_{Q_1\,Q_2}(t)$ в матричной форме, используя двухкубитный базис

$$
|-,-\rangle, \quad |+,-\rangle, \quad |-,+\rangle, \quad |+,+\rangle.
$$

Для начальных состояний (2) и (3) редуцированные двухкубитные матрицы плотности имеют вид

$$\rho_{Q_1\,Q_2}(t)=\begin{pmatrix}\rho_{11}^{(1)} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \rho_{22}^{(1)} & \rho_{23}^{(1)} & 0\\ 0 & (\rho_{23}^{(1)})^* & \rho_{33}^{(1)} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \rho_{44}^{(1)}\end{pmatrix} \tag{15}$$

и

$$\rho_{Q_1\,Q_2}(t)=\begin{pmatrix}\rho_{11}^{(2)} & 0 & 0 & \rho_{14}^{(2)}\\ 0 & \rho_{22}^{(2)} & \rho_{23}^{(2)} & 0\\ 0* & (\rho_{23}^{(2)})^* & \rho_{33}^{(2)} & 0\\ (\rho_{14}^{(2)})^* & 0 & 0 & \rho_{44}^{(2)}\end{pmatrix} \tag{16}$$

соответственно.

Нами найдены явные выражения для элементов редуцированных матриц плотности (15) и (16), однако здесь они не приводятся ввиду их чрезвычайно громоздкого вида.

3. Вычисление отрицательности. Для двухкубитной системы, описываемой редуцированной двухкубитной матрицей плотности $\rho_{Q_1\,Q_2}(t)$, в качестве критерия перепутывания кубитов может быть выбран параметр Переса—Хородецких, или отрицательность [34, 35], которая может быть определена через отрицательные собственные значения μ_i^- частичной транспонированной по переменным одного кубита редуцированной двухкубитной матрицы плотности $\rho_{Q_1\,Q_2}^{T_1}$:

$$\varepsilon=-2\sum_i \mu_i^- . \tag{17}$$

Для начальных состояний кубитов (2) и (3) и теплового состояния поля частично транспонированные по переменным одного кубита редуцированные двухкубитные матрицы плотности имеют вид

$$\rho_{Q_1\,Q_2}^{T_1}(t)=\begin{pmatrix}\rho_{11}^{(1)} & 0 & 0 & (\rho_{23}^{(1)})^*\\ 0 & \rho_{22}^{(1)} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \rho_{33}^{(1)} & 0\\ \rho_{23}^{(1)} & 0 & 0 & \rho_{44}^{(1)}\end{pmatrix} \tag{18}$$

и

$$\rho_{Q_1\,Q_2}^{T_1}(t)=\begin{pmatrix}\rho_{11}^{(2)} & 0 & 0 & (\rho_{23}^{(2)})^*\\ 0 & \rho_{22}^{(2)} & (\rho_{14}^{(2)})^* & 0\\ 0 & \rho_{14}^{(2)} & \rho_{33}^{(2)} & 0\\ \rho_{23}^{(2)} & 0 & 0 & \rho_{44}^{(2)}\end{pmatrix} \tag{19}$$

соответственно.

Матрица (18) имеет всего одно собственное значение, которое может принимать отрицательные значения. Соответственно, отрицательность (17) для начального состояния кубитов (2) и начальной полевой матрицы плотности (4) может быть записана в виде

$$\varepsilon(t) = \sqrt{(\rho_{11}^{(1)} - \rho_{44}^{(1)})^2 + 4|\rho_{23}^{(1)}|^2} - \rho_{11}^{(1)} - \rho_{44}^{(1)}. \tag{20}$$

Матрица (19) имеет два собственных значения, которые могут принимать отрицательные значения. Соответственно, отрицательность (17) для начального состояния (3) и начальной полевой матрицы плотности (4) может быть записана в виде

$$\varepsilon(t) = \sqrt{(\rho_{11}^{(2)} - \rho_{44}^{(2)})^2 + 4|\rho_{23}^{(2)}|^2} - \rho_{11}^{(2)} - \rho_{44}^{(2)} + \\ + \sqrt{(\rho_{22}^{(2)} - \rho_{33}^{(2)})^2 + 4|\rho_{14}^{(2)}|^2} - \rho_{22}^{(2)} - \rho_{33}^{(2)}. \tag{21}$$

4. Результаты и обсуждение. Результаты численного моделирования отрицательности (20) и (21) представлены на рис. 1 и 2. На рис. 1 показана временная зависимость отрицательности (20) для начального перепутывания кубитов (2) и различных значений расстройки и среднего числа тепловых фотонов в моде резонатора. На рисунках сплошные линии показывают поведение параметра перепутывания для резонаторов со средой Керра, а штриховые линии соответствуют модели в отсутствие керровской нелинейности. При этом представлено поведение отрицательности как для слабого теплового поля (a, b), так и для интенсивного теплового поля резонатора (c, d). Наконец, представлено поведение параметра перепутывания как для резонансного (a, c), так и для нерезонансного взаимодействия кубитов с тепловым полем (b, d). Из рисунков видно, что для слабых тепловых полей нет эффекта мгновенной смерти перепутывания как в отсутствие, так и в присутствии керровской нелинейности. При этом наличие керровской нелинейности в резонансом случае приводит к существенному уменьшению амплитуд осцилляций Раби параметра перепутывания, т.е. способствует стабилизации наведенного начального перепутывания кубитов. При этом для нерезонансного случая эффект стабилизации начального перепутывания кубитов не наблюдается. По мере увеличения расстройки указанный эффект постепенно исчезает. Для интенсивных тепловых полей резонатора, напротив, имеет место эффект мгновенной смерти перепутывания в случае как резонансного, так и для нерезонансного взаимодействия кубитов. Керровская нелинейность приводит не только к исчезновению указанного эффекта, но и к стабилизации начального перепутывания кубитов. При этом влияние керровской нелинейности на поведение параметра перепутывания схоже как для резонансного, так и для нерезонансного кубит-полевого взаимодействия.

На рис. 2 показана временная зависимость отрицательности (21) для начального перепутывания кубитов (3) и различных значений расстройки и среднего числа тепловых фотонов в моде резонатора. Как и в предыдущем случае, сплошные линии показывают поведение параметра перепутывания для резонаторов со средой Керра, а штриховые линии соответствуют модели без

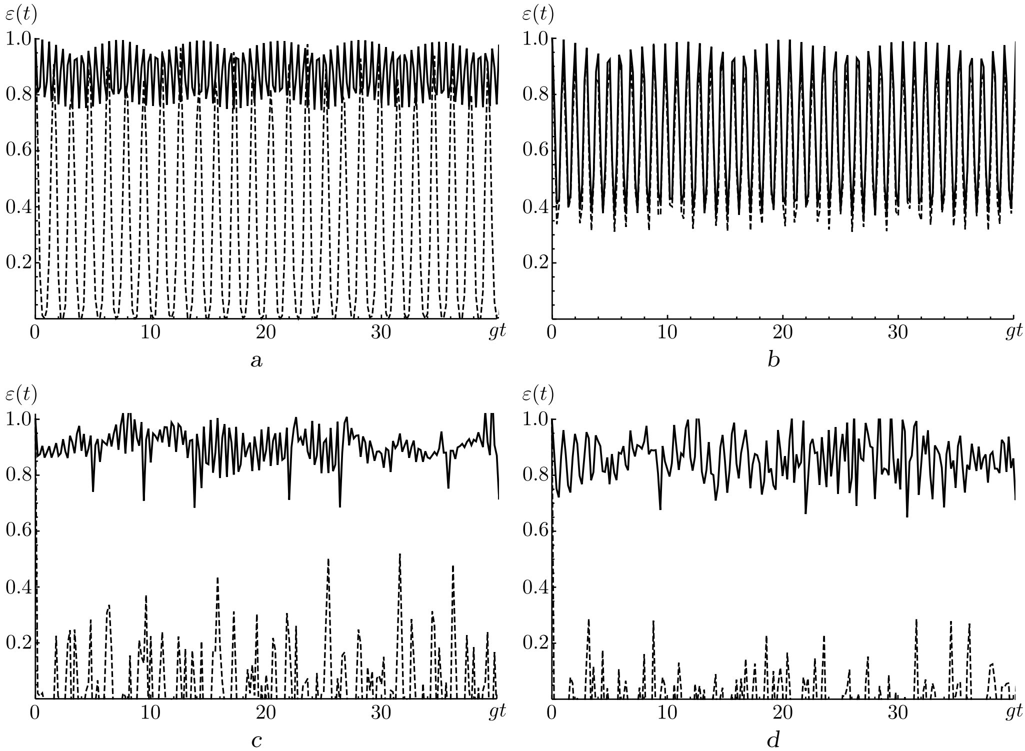

Рис. 1. Отрицательность как функция безразмерного времени gt для начального перепутанного состояния кубитов (2). Сплошные линии соответствуют модели с керровской нелинейностью $\chi = 5$, штриховые линии соответствуют модели с $\chi = 0$. Среднее число тепловых фотонов $\bar{n} = 0.1$ (a, b) и $\bar{n} = 5$ (c, d). Безразмерный параметр расстройки $\delta = 0$ (a, c) и $\delta = 5$ (b, d)

[Figure 1. Negativity vs scaled time gt for initial entangled qubits state (2). The solid lines correspond to the model with the Kerr nonlinearity $\chi = 5$, the dashed lines correspond to the model with $\chi = 0$. The mean thermal photon numbers are $\bar{n} = 0.1$ (a, b) and $\bar{n} = 5$ (c, d). Scaled detuning parameter $\delta = 0$ (a, c) and $\delta = 5$ (b, d)]

керровской нелинейности. При этом представлено поведение отрицательности как для слабого теплового поля (a, b), так и для интенсивного теплового поля резонатора (c, d). Наконец, представлено поведение параметра перепутывания как для резонансного (a, c), так и для нерезонансого взаимодействия кубитов с тепловым полем (b, d). Для рассматриваемого начального состояния наличие керровской нелинейности не приводит, в отличие от предыдущего случая, к существенному уменьшению амплитуд осцилляций Раби параметра перепутывания в случае как слабых, так и интенсивных тепловых полей резонатора. Наиболее интересным является результат, состоящий в исчезновении эффекта мгновенной смерти перепутывания при включении керровской нелинейности в случае интенсивного теплового поля резонатора и нерезонансого взаимодействия кубитов и поля.

Заключение. Таким образом, в настоящей работе мы нашли точное решение квантового уравнения эволюции для матрицы плотности системы двух кубитов, взаимодействующих посредством вырожденных двухфотонных переходов с тепловым полем резонатора со средой Керра. Полученное точное решение использовано для анализа временной динамики перепутывания ку-

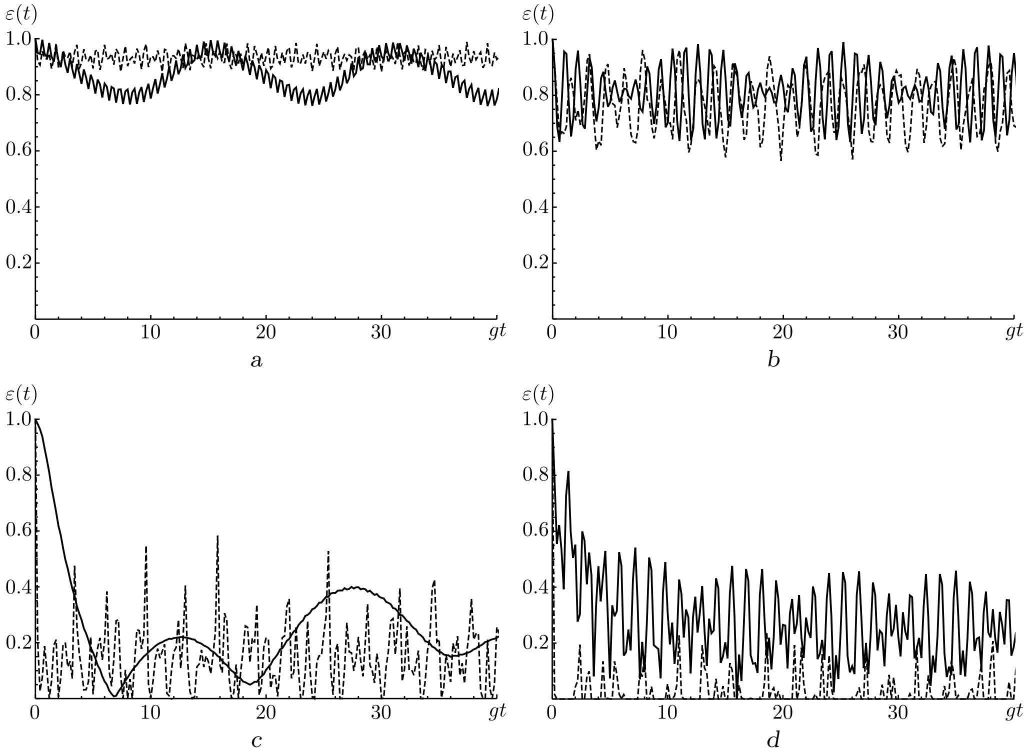

Рис. 2. Отрицательность как функция безразмерного времени gt для начального перепутанного состояния кубитов (3). Сплошные линии соответствуют модели с керровской нелинейностью $\chi = 5$, штриховые линии сооответствуют модели с $\chi = 0$. Среднее число тепловых фотонов $\bar{n} = 0.1$ (a, b) и $\bar{n} = 5$ (c, d). Безразмерный параметр расстройки $\delta = 0$ (a, c) и $\delta = 5$ (b, d)

[Figure 2. Negativity vs scaled time gt for initial entangled qubits state (3). The solid lines correspond to the model with the Kerr nonlinearity $\chi = 5$, the dashed lines correspond to the model with $\chi = 0$. The mean thermal photon numbers are $\bar{n} = 0.1$ (a, b) and $\bar{n} = 5$ (c, d). Scaled detuning parameter $\delta = 0$ (a, c) and $\delta = 5$ (b, d)]

битов, индуцированного тепловым полем резонатора, для перепутанных начальных состояний кубитов белловского типа. Показано, что наличие среды Керра в случае интенсивных тепловых полей резонатора приводит к исчезновению эффекта мгновенной смерти перепутывания. Для некоторых типов начальных перепутанных состояний кубитов керровская нелинейность приводит также к существенной стабилизации начального перепутывания кубитов. Полученные результаты могут быть полезны при выборе оптимальных режимов функционирования квантовых устройств, таких как квантовые компьютеры и квантовые сети.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарность. Автор благодарен рецензенту за тщательное прочтение статьи и ценные предложения и комментарии.

Библиографический список

1. Buluta I., Ashhab S., Nori F. Natural and artificial atoms for quantum computation // *Rep. Prog. Phys.*, 2011. vol. 74, no. 10, 104401. pp. 1–34, arXiv: 1002.1871 [quant-ph]. EDN: PHMQQN. DOI: https://doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401.
2. Walther H., Varcoe B. T. H., Englert B.-G., Becker T. Cavity quantum electrodynamics // *Rep. Prog. Phys*, 2011. vol. 69, no. 5. pp. 1325–1382. EDN: WMZYEX. DOI: https://doi.org/10.1088/0034-4885/69/5/R02.
3. Leibfried D., Blatt R., Monroe C., Wineland D. Quantum dynamics of single trapped ions // *Rev. Mod. Phys.*, 2003. vol. 75, no. 1. pp. 281–324. EDN: YJDLXU. DOI: https://doi.org/10.1103/RevModPhys.75.281.
4. Xiang Z.-L., Ashhab S., You J. Q., Nori F. Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems // *Rev. Mod. Phys.*, 2013. vol. 85, no. 2. pp. 623–653. EDN: RJQAMF. DOI: https://doi.org/10.1103/RevModPhys.85.623.
5. Georgescu I. M., Ashhab S., Nori F. Quantum simulation // *Rev. Mod. Phys.*, 2014. vol. 88, no. 1. pp. 153–185. EDN: SQCURV. DOI: https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153.
6. Gu X., Kockum A.F., Miranowicz A., et al. Microwave photonics with superconducting quantum circuits // *Phys. Repts.*, 2017. vol. 718–719. pp. 1–102. EDN: TECRZL. DOI: https://doi.org/10.1016/j.physrep.2017.10.002.
7. Wendin G. Quantum information processing with super-conducting circuits: a review // *Rep. Prog. Phys.*, 2017. vol. 80, no. 10, 106001. DOI: https://doi.org/10.1088/1361-6633/aa7e1a.
8. Li G.-Q., Pan X.-Y. Quantum information processing with nitrogen–vacancy centers in diamond // *Chinese Phys. B*, 2018. vol. 27, no. 2. pp. 1–13, 020304. DOI: https://doi.org/10.1088/1674-1056/27/2/020304.
9. Kim M. S., Lee J., Ahn D., Knight P. L. Entanglement induced by a single-mode heat environment // *Phys. Rev. A*, 2002. vol. 65, no. 4, 040101(R). EDN: YIXDNM. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.040101.
10. Zhou L., Song H. S. Entanglement induced by a single-mode thermal field and criteria for entanglement // *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, 2002. vol. 4, no. 6. pp. 425–429. EDN: BFJLSP. DOI: https://doi.org/10.1088/1464-4266/4/6/310.
11. Bashkirov E. K. Entanglement induced by the two-mode thermal noise // *Laser Phys. Lett.*, 2006. vol. 3, no. 3. pp. 145–150. EDN: LJNXSZ. DOI: https://doi.org/10.1002/lapl.200510081.
12. Bashkirov E. K., Stupatskaya M. P. The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms induced by nondegenerate two-mode thermal noise // *Laser Phys.*, 2009. vol. 19, no. 3. pp. 525–530. EDN: LLXFEF. DOI: https://doi.org/10.1134/S1054660X09030281.
13. Bashkirov E. K., Mastyugin M. S. The influence of the dipole-dipole interaction and atomic coherence on the entanglement of two atoms with degenerate two-photon transitions // *Opt. Spectrosc.*, 2014. vol. 116, no. 4. pp. 630–634. EDN: SKTKWP. DOI: https://doi.org/10.1134/S0030400X14040067.
14. Башкиров Е. К., Мангулова Е. Г. Перепутывание атомов, индуцированное двухмодовым тепловым шумом, при наличии диполь-дипольного взаимодействия и атомной когерентности // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. №2(31). С. 177–184. EDN: RAVQJB. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1160.
15. Zhang B. Entanglement between two qubits interacting with a slightly detuned thermal field // *Opt. Commun.*, 2010. vol. 283, no. 23. pp. 4676–4679. DOI: https://doi.org/10.1016/j.optcom.2010.06.094.
16. Aguiar L. S., Munhoz P. P., Vidiella-Barranco A., Roversi J. The entanglement of two dipole-dipole coupled in a cavity interacting with a thermal field // *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, 2005. vol. 7, no. 12. pp. S769–S771. DOI: https://doi.org/0.1088/1464-4266/7/12/049.
17. Башкиров Е. К., Мастюгинн М. С. Перепутывание двух кубитов, взаимодействующих с одномодовым квантовым полем // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, №2. С. 205–220. EDN: UGXNVL. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1377.

18. Yu T., Eberly J. H. Finite-time disentanglement via spontaneous emission // *Phys. Rev. Lett.*, 2004. vol. 93, no. 14, 140404, arXiv: quant-ph/0404161. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.140404.
19. Yu T., Eberly J. H. Sudden death of entanglement // *Science*, 2009. vol. 323, no. 5914. pp. 598–601, arXiv: 0910.1396 [quant-ph]. DOI: https://doi.org/10.1126/science.1167343.
20. Wang F., Hou P.-Y., Huang Y. Y., et al. Observation of entanglement sudden death and rebirth by controlling a solid-state spin bath // *Phys. Rev. B*, 2018. vol. 98, no. 6, 064306, arXiv: 1801.02729 [quant-ph]. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevB.98.064306.
21. Sun G., Zhou Z., Mao B., et al. Entanglement dynamics of a superonducting phase qubit coupled to a two-level system // *Phys. Rev. B*, 2012. vol. 86, no. 6, 064502, arXiv: 1111.3016 [cond-mat.mes-hall]. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevB.86.064502.
22. Bashkirov E. K. Entanglement in Tavis-Cummings model with Kerr nonlinearity induced by a thermal noise / *Saratov Fall Meeting 2020: Laser Physics, Photonic Technologies, and Molecular Modeling* (Saratov, Russia) / Proc. SPIE, 11846, 2021. 118460W. DOI: https://doi.org/10.1117/12.2588673.
23. Salles A., de Melo F., Almeida M. P., et al. Experimental investigation of the dynamics of entanglement: Sudden death, complementarity, and continuous monitoring of the environment // *Phys. Rev. A*, 2008. vol. 78, no. 2, 022322, arXiv: 0804.4556 [quant-ph]. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.78.022322.
24. Puri S, Boutin S., Blais A. Engineering the quantum states of light in a Kerr-nonlinear resonator by two-photon driving // *Quantum Inf.*, 2017. vol. 3, no. 1, 18. DOI: https://doi.org/10.1038/s41534-017-0019-1.
25. Manosh T. M., Ashefas M., Thayyullathil R. B. Effects of Kerr medium in coupled cavities on quantum state transfer // *J. Nonlinear Opt. Phys. Mater.*, 2018. vol. 27, no. 3, 1850035. EDN: LFUINC. DOI: https://doi.org/10.1142/S0218863518500352.
26. Al Naim A. F., Khan J. Y., Khalil E. M., Abdel-Khalek S. Effects of Kerr medium and Stark shift parameter on Wehrl entropy and the field puruty for two-photon Jaynes–Cummings model under dispersive approximation // *J. Russ. Laser Res.*, 2019. vol. 40, no. 1. pp. 20–29. DOI: https://doi.org/10.1007/s10946-019-09764-w.
27. Anwar S. J., Ramzan M., Khan M. K. Effect of Stark- and Kerr-like medium on the entanglement dynamics of two three-level atomic systems // *Quant. Inform. Proc.*, 2019. vol. 18, no. 192. pp. 1–14. EDN: YXEFGH. DOI: https://doi.org/10.1007/s11128-019-2277-7.
28. Аданмитонде А. Ж, Авосву Г. И. Ю., Доса Ф. А. О квантовании некоторых обобщенных моделей Джейнса–Каммингса в керроподобной среде // *ТМФ*, 2020. Т. 203, № 3. С. 451–466. EDN: UPAEUL. DOI: https://doi.org/10.4213/tmf9835.
29. Aldaghfag S. A., Berrada K., Abdel-Khalek S. Entanglement and photon statistics of two dipole-dipole coupled superconducting qubits with Kerr-like nonlinearities // *Results in Phys.*, 2020. vol. 16, 102978. EDN: DSKEYY. DOI: https://doi.org/10.1016/j.rinp.2020.102978.
30. Kirchmair G., Vlastakis B., Leghtas Z., et al. Observation of quantum state collapse and revival due to the single-photon Kerr effect // *Nature*, 2013. vol. 495, no. 7440. pp. 205–209. DOI: https://doi.org/10.1038/nature11902.
31. Evseev M. M., Bashkirov E. K. Thermal entanglement in Tavis–Cummings model with Kerr nonlinearity / *2020 International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT)* (26–29 May 2020, Samara, Russia), 2020. 9253347. EDN: YCMKXI. DOI: https://doi.org/10.1109/ITNT49337.2020.9253347.
32. Bashkirov E. K. Dynamics of two-photon Tavis–Cummings model with Kerr media / *2022 VIII International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT)* (23–27 May 2022, Samara, Russia), 2022. 9848606. EDN: ZAMPVK. DOI: https://doi.org/10.1109/ITNT55410.2022.9848606.
33. Mlynek J. A., Abdumalikov A. A., Fink J. M., et al. Demonstrating W-type entanglement of Dicke states in resonant cavity quantum electrodynamics // *Phys. Rev. A*, 2012. vol. 86, no. 5, 053838. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.86.053838.

34. Peres A. Separability criterion for density matrices // *Phys. Rev. Lett.*, 1996. vol. 77, no. 8. pp. 1413–1415. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413.
35. Horodecki M., Horodecki P., Horodecki R. Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions // *Phys. Lett. A*, 1996. vol. 223, no. 1–2. pp. 1–8. EDN: ANQBTF. DOI: https://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 2, pp. 250–269
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1992

MSC: 81Q05, 82C23, 81V80

Dynamics of an exactly solvable model of cavity quantum electrodynamics

E. K. Bashkirov

Samara National Research University,
34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Abstract

A system consisting of two identical qubits not-resonantly interacting with a thermal quantum field of a lossless resonator with a Kerr media via degenerate two-photon transition is considered. An exact solution of the quantum Liouville equation for the total density matrix of the considered system is obtained. To solve the quantum evolution equation we used the dressed states representation. The complete set of dressed states is found. The exact solution of the quantum Liouville equation is used to calculate the time dependencies of qubit-qubit entanglement parameter (negativity) for Bell type entangled qubits states. The results showed that Kerr nonlinearity can diminish the amplitudes of the Rabi oscillations of entanglement parameter and suppress the effect of sudden death of entanglement.

Keywords: qubits, quantum Liouville equation, exact solution in dressed-state representations, thermal field, entanglement, sudden death of entanglement.

Received: 17th January, 2023 / Revised: 15th May, 2023 /
Accepted: 25th May, 2023 / First online: 19th June, 2023

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final version of the manuscript for publication. The final version of the manuscript has been approved by me.

Funding. The research was conducted without funding.

Acknowledgments. The author expresses gratitude to the reviewer for carefully reading the article and providing valuable suggestions and comments.

Differential Equations and Mathematical Physics
Research Article

Please cite this article in press as:
Bashkirov E. K. Dynamics of an exactly solvable model of cavity quantum electrodynamics, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 2, pp. 250–269. EDN: TXGRQG. DOI: 10.14498/vsgtu1992 (In Russian).

Author's Details:
Eugene K. Bashkirov https://orcid.org/0000-0001-8682-4956
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Professor; Dept. of General and Theoretical Physics;
e-mail: bashkirov.ek@ssau.ru

References

1. Buluta I., Ashhab S., Nori F. Natural and artificial atoms for quantum computation, *Rep. Prog. Phys.*, 2011, vol. 74, no. 10, 104401, pp. 1–34, arXiv: 1002.1871 [quant-ph]. EDN: PHMQQN. DOI: https://doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401.
2. Walther H., Varcoe B. T. H., Englert B.-G., Becker T. Cavity quantum electrodynamics, *Rep. Prog. Phys*, 2011, vol. 69, no. 5, pp. 1325–1382. EDN: WMZYEX. DOI: https://doi.org/10.1088/0034-4885/69/5/R02.
3. Leibfried D., Blatt R., Monroe C., Wineland D. Quantum dynamics of single trapped ions, *Rev. Mod. Phys.*, 2003, vol. 75, no. 1, pp. 281–324. EDN: YJDLXU. DOI: https://doi.org/10.1103/RevModPhys.75.281.
4. Xiang Z.-L., Ashhab S., You J. Q., Nori F. Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems, *Rev. Mod. Phys.*, 2013, vol. 85, no. 2, pp. 623–653. EDN: RJQAMF. DOI: https://doi.org/10.1103/RevModPhys.85.623.
5. Georgescu I. M., Ashhab S., Nori F. Quantum simulation, *Rev. Mod. Phys.*, 2014, vol. 88, no. 1, pp. 153–185. EDN: SQCURV. DOI: https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153.
6. Gu X., Kockum A.F., Miranowicz A., et al. Microwave photonics with superconducting quantum circuits, *Phys. Repts.*, 2017, vol. 718–719, pp. 1–102. EDN: TECRZL. DOI: https://doi.org/10.1016/j.physrep.2017.10.002.
7. Wendin G. Quantum information processing with super-conducting circuits: a review, *Rep. Prog. Phys.*, 2017, vol. 80, no. 10, 106001. DOI: https://doi.org/10.1088/1361-6633/aa7e1a.
8. Li G.-Q., Pan X.-Y. Quantum information processing with nitrogen–vacancy centers in diamond, *Chinese Phys. B*, 2018, vol. 27, no. 2, pp. 1–13, 020304. DOI: https://doi.org/10.1088/1674-1056/27/2/020304.
9. Kim M. S., Lee J., Ahn D., Knight P. L. Entanglement induced by a single-mode heat environment, *Phys. Rev. A*, 2002, vol. 65, no. 4, 040101(R). EDN: YIXDNM. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.040101.
10. Zhou L., Song H. S. Entanglement induced by a single-mode thermal field and criteria for entanglement, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, 2002, vol. 4, no. 6, pp. 425–429. EDN: BFJLSP. DOI: https://doi.org/10.1088/1464-4266/4/6/310.
11. Bashkirov E. K. Entanglement induced by the two-mode thermal noise, *Laser Phys. Lett.*, 2006, vol. 3, no. 3, pp. 145–150. EDN: LJNXSZ. DOI: https://doi.org/10.1002/lapl.200510081.
12. Bashkirov E. K., Stupatskaya M. P. The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms induced by nondegenerate two-mode thermal noise, *Laser Phys.*, 2009, vol. 19, no. 3, pp. 525–530. EDN: LLXFEF. DOI: https://doi.org/10.1134/S1054660X09030281.
13. Bashkirov E. K., Mastyugin M. S. The influence of the dipole-dipole interaction and atomic coherence on the entanglement of two atoms with degenerate two-photon transitions, *Opt. Spectrosc.*, 2014, vol. 116, no. 4, pp. 630–634. EDN: SKTKWP. DOI: https://doi.org/10.1134/S0030400X14040067.
14. Bashkirov E. K., Mangulova E. G. Entanglement induced by two-mode thermal noise taking into account the dipole-dipole interaction and atomic coherence, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2013, no. 2(31), pp. 177–184 (In Russian). EDN: RAVQJB. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1160.
15. Zhang B. Entanglement between two qubits interacting with a slightly detuned thermal field, *Opt. Commun.*, 2010, vol. 283, no. 23, pp. 4676–4679. DOI: https://doi.org/10.1016/j.optcom.2010.06.094.
16. Aguiar L. S., Munhoz P. P., Vidiella-Barranco A., Roversi J. The entanglement of two dipole-dipole coupled in a cavity interacting with a thermal field, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, 2005, vol. 7, no. 12, pp. S769–S771. DOI: https://doi.org/0.1088/1464-4266/7/12/049.

17. Bashkirov E. K., Mastyugin M. S. Entanglement of two qubits interacting with one-mode quantum field, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 2, pp. 205–220 (In Russian). EDN: UGXNVL. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1377.
18. Yu T., Eberly J. H. Finite-time disentanglement via spontaneous emission, *Phys. Rev. Lett.*, 2004, vol. 93, no. 14, 140404, arXiv: quant-ph/0404161. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.140404.
19. Yu T., Eberly J. H. Sudden death of entanglement, *Science*, 2009, vol. 323, no. 5914, pp. 598–601, arXiv: 0910.1396 [quant-ph]. DOI: https://doi.org/10.1126/science.1167343.
20. Wang F., Hou P.-Y., Huang Y. Y., et al. Observation of entanglement sudden death and rebirth by controlling a solid-state spin bath, *Phys. Rev. B*, 2018, vol. 98, no. 6, 064306, arXiv: 1801.02729 [quant-ph]. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevB.98.064306.
21. Sun G., Zhou Z., Mao B., et al. Entanglement dynamics of a superonducting phase qubit coupled to a two-level system, *Phys. Rev. B*, 2012, vol. 86, no. 6, 064502, arXiv: 1111.3016 [cond-mat.mes-hall]. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevB.86.064502.
22. Bashkirov E. K. Entanglement in Tavis-Cummings model with Kerr nonlinearity induced by a thermal noise, In: *Saratov Fall Meeting 2020: Laser Physics, Photonic Technologies, and Molecular Modeling* (Saratov, Russia), Proc. SPIE, 11846, 2021, 118460W. DOI: https://doi.org/10.1117/12.2588673.
23. Salles A., de Melo F., Almeida M. P., et al. Experimental investigation of the dynamics of entanglement: Sudden death, complementarity, and continuous monitoring of the environment, *Phys. Rev. A*, 2008, vol. 78, no. 2, 022322, arXiv: 0804.4556 [quant-ph]. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.78.022322.
24. Puri S, Boutin S., Blais A. Engineering the quantum states of light in a Kerr-nonlinear resonator by two-photon driving, *Quantum Inf.*, 2017, vol. 3, no. 1, 18. DOI: https://doi.org/10.1038/s41534-017-0019-1.
25. Manosh T. M., Ashefas M., Thayyullathil R. B. Effects of Kerr medium in coupled cavities on quantum state transfer, *J. Nonlinear Opt. Phys. Mater.*, 2018, vol. 27, no. 3, 1850035. EDN: LFUINC. DOI: https://doi.org/10.1142/S0218863518500352.
26. Al Naim A. F., Khan J. Y., Khalil E. M., Abdel-Khalek S. Effects of Kerr medium and Stark shift parameter on Wehrl entropy and the field puruty for two-photon Jaynes–Cummings model under dispersive approximation, *J. Russ. Laser Res.*, 2019, vol. 40, no. 1, pp. 20–29. DOI: https://doi.org/10.1007/s10946-019-09764-w.
27. Anwar S. J., Ramzan M., Khan M. K. Effect of Stark- and Kerr-like medium on the entanglement dynamics of two three-level atomic systems, *Quant. Inform. Proc.*, 2019, vol. 18, no. 192, pp. 1–14. EDN: YXEFGH. DOI: https://doi.org/10.1007/s11128-019-2277-7.
28. Adanmitonde A. J., Avossevou G. Y. H., Dossa F. A. Quantization of some generalized Jaynes–Cummings models in a Kerr-like medium, *Theoret. and Math. Phys.*, 2020, vol. 203, no. 3, pp. 824–836. EDN: VQTJGW. DOI: https://doi.org/10.1134/S0040577920060082.
29. Aldaghfag S. A., Berrada K., Abdel-Khalek S. Entanglement and photon statistics of two dipole-dipole coupled superconducting qubits with Kerr-like nonlinearities, *Results in Phys.*, 2020, vol. 16, 102978. EDN: DSKEYY. DOI: https://doi.org/10.1016/j.rinp.2020.102978.
30. Kirchmair G., Vlastakis B., Leghtas Z., et al. Observation of quantum state collapse and revival due to the single-photon Kerr effect, *Nature*, 2013, vol. 495, no. 7440, pp. 205–209. DOI: https://doi.org/10.1038/nature11902.
31. Evseev M. M., Bashkirov E. K. Thermal entanglement in Tavis–Cummings model with Kerr nonlinearity, In: *2020 International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT)* (26–29 May 2020, Samara, Russia), 2020, 9253347. EDN: YCMKXI. DOI: https://doi.org/10.1109/ITNT49337.2020.9253347.
32. Bashkirov E. K. Dynamics of two-photon Tavis–Cummings model with Kerr media, In: *2022 VIII International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT)* (23–27 May 2022, Samara, Russia), 2022, 9848606. EDN: ZAMPVK. DOI: https://doi.org/10.1109/ITNT55410.2022.9848606.

33. Mlynek J. A., Abdumalikov A. A., Fink J. M., et al. Demonstrating W-type entanglement of Dicke states in resonant cavity quantum electrodynamics, *Phys. Rev. A*, 2012, vol. 86, no. 5, 053838. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.86.053838.
34. Peres A. Separability criterion for density matrices, *Phys. Rev. Lett.*, 1996, vol. 77, no. 8, pp. 1413–1415. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413.
35. Horodecki M., Horodecki P., Horodecki R. Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions, *Phys. Lett. A*, 1996, vol. 223, no. 1–2, pp. 1–8. EDN: ANQBTF. DOI: https://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2.