Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 28, № 1. С. 29–44
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1997
EDN: WSCTDR

УДК 517.958

Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа с дополнительной информацией специального вида в ограниченной области

Ж. Ш. Сафаров[1,2]

[1] Институт математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университетская, 9.
[2] Ташкентский университет информационных технологий, Узбекистан, 100202, Ташкент, ул. Амира Тимура, 108.

Аннотация

Рассматривается одномерная обратная задача определения ядра интегрального члена интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа в ограниченной по переменной x области. Сначала исследуется прямая задача, для регулярной части которой методом выделения особенностей получена задача Коши на оси $x = 0$. Далее с помощью формулы Даламбера получено интегральное уравнение относительно искомой функции.

Для прямой задачи изучается обратная задача определения ядра, входящего в интегральный член уравнения. Для его отыскания задается дополнительное условие в специальном виде. В итоге обратная задача сводится к эквивалентной системе интегральных уравнений относительно неизвестных функций. К полученной системе применяется принцип сжимающих отображений в пространстве непрерывных функций с весовыми нормами.

Для поставленной задачи доказана теорема глобальной однозначной разрешимости, которая является основным результатом статьи.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, обратная задача, ядро интеграла, принцип сжимающих отображений, теорема Банаха.

Получение: 27 января 2023 г. / Исправление: 16 января 2024 г. / Принятие: 4 марта 2024 г. / Публикация онлайн: 15 июля 2024 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Научная статья

Образец для цитирования
Сафаров Ж. Ш. Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа с дополнительной информацией специального вида в ограниченной области // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 1. С. 29–44. EDN: WSCTDR. DOI: 10.14498/vsgtu1997.

Сведения об авторе
Журабек Шакарович Сафаров https://orcid.org/0000-0001-9249-835X
доктор физико-математических наук, профессор; старший научный сотрудник; лаб. дифференциальных уравнений и их приложений[1]; профессор; каф. высшей математики[2]; e-mail: j.safarov65@mail.ru

Введение и постановка задачи. Обратные задачи возникают во многих областях прикладной науки, таких как электродинамика, акустика, квантовая теория рассеяния, геофизика, астрономия и др. К интегро-дифференциальным уравнениям приводят задачи распространения упругих электромагнитных волн в средах, где состояние среды в данный момент времени зависит от ее состояния во все предыдущие моменты времени. При этом такие интегро-дифференциальные уравнения строятся добавлением в правые части соответствующих классических уравнений интегралов типа свертки, которые описывают явление запаздывания.

Первые результаты в теории обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений представлены в работах итальянских математиков A. Lorenzi, E. Sinestrari, E. Paporonii [1–3]. В настоящее время изучением одномерных и многомерных обратных задач определения ядра интегрального члена интегро-дифференциальных уравнений занимаются многие исследователи.

В работах [4–8] рассматривались одномерные задачи нахождения ядра, входящего в интегро-дифференциальное уравнение с дельта-функцией в правой части либо на граничном условии. Для поставленных в этих работах задач доказаны теоремы существования, единственности и получены оценки устойчивости на основе принципа сжимающих отображений. Подобные задачи с распределенными источниками возмущений изучены в работах [9–11].

В работах [12–15] для многомерных обратных задач нахождения ядра в гиперболических интегро-дифференциальных уравнениях второго порядка доказаны теоремы однозначной локальной разрешимости в классе аналитических функций по пространственным переменным и непрерывных по временной переменной. В работах [16,17] доказаны теоремы глобальной однозначной разрешимости двумерных обратных задач, когда ядро интегрального члена слабо зависит от горизонтальной переменной. Глобальная однозначная разрешимость многомерной обратной задачи определения ядра доказана в работе [18].

В приложениях важны задачи с сосредоточенными источниками, локализованными в окрестности фиксированной точки или на поверхности рассматриваемой области. Именно к такому типу задач относится рассматриваемая в настоящей работе задача.

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения колебания струны с памятью в ограниченной по переменной x области $D = \{(x,t) : 0 < x < l,$ $t \in \mathbb{R}\}$:

$$u_{tt} - u_{xx} - \int_0^t k(\tau)u_{xx}(x,t-\tau)d\tau = 0, \quad (x,t) \in D, \tag{1}$$

с начальным

$$u\big|_{t<0} \equiv 0 \tag{2}$$

и граничными условиями

$$u\big|_{x=0} = \delta(t), \quad u_x\big|_{x=l} = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака.

Уравнение (1) возникает в теории вязкоупругих сред с постоянной плотностью и постоянными коэффициентами Ламе в одномерном случае [19].

Нахождение обобщенной функции $u(x,t) \in D'(D)$, удовлетворяющей уравнению (1) и условиям(2), (3) (в обобщенном смысле), назовем прямой задачей, при этом условие (2) является начальным условием в обобщенной постановке задачи (1)–(3) [23, с. 224–225].

Определение 1. *Решением прямой задачи* (1)–(3) называется функция $u(x,t) \in D'(D)$, которая удовлетворяет всем условиям задачи (1)–(3) в смысле обобщенных функций.

Обратная задача заключается в определении неизвестной функции $k(t)$, $t > 0$, если задано дополнительное условие

$$u_x(0,t) + \int_0^t k(\tau) u_x(0, t-\tau) d\tau = f(t), \tag{4}$$

где $f(t)$ — заданная при $t > 0$ функция.

Задание дополнительной информации в таком специальном виде использовалось в работах [11,20] для определения функции памяти среды, входящей в гиперболическое и параболическое уравнения. Прямая задача представлена начально-краевой задачей для уравнений с распределенными источниками в ограниченных областях.

Исследование задачи с сосредоточенным источником, локализованным в окрестности граничной точки, ограниченной по переменной x области, является отличительной чертой настоящей работы.

Определение 2. Функция $k(t) \in C^2[0,\infty)$ называется *решением обратной задачи* (1)–(4), если соответствующее ей решение задачи (1)–(3) $u(x,t) \in D'(D)$ (из класса обобщенных функций) удовлетворяет условию (4).

1. Исследование прямой задачи. Исследуем прямую задачу. Введем в рассмотрение новую функцию $v(x,t)$, определив ее равенством

$$v(x,t) = \left[u(x,t) + \int_0^t k(t-\tau) u(x,\tau) d\tau \right] \exp\bigl(-k(0)t/2\bigr).$$

Тогда, как нетрудно проверить [21], функция $u(x,t)$ через $v(x,t)$ выражается формулой

$$u(x,t) = \exp\bigl(k(0)t/2\bigr) v(x,t) + \int_0^t h(t-\tau) \exp\bigl(k(0)\tau/2\bigr) v(x,\tau) d\tau, \tag{5}$$

где $h(t)$ — решение следующего интегрального уравнения Вольтерра:

$$h(t) = -k(t) - \int_0^t k(t-\tau) h(\tau) d\tau, \quad t > 0. \tag{6}$$

Задача (1)–(3) относительно функции $v(x,t)$ примет вид

$$v_{tt} - v_{xx} + h_0 v + \int_0^t H(t-\tau) v(x,\tau) d\tau = 0, \tag{7}$$

$$v\big|_{x=0} = \delta(t) + k(t) \exp\bigl(h(0)t/2\bigr)\theta(t), \quad v_x\big|_{x=l} = 0, \tag{8}$$

$$v\big|_{t<0} \equiv 0, \tag{9}$$

а дополнительное условие (4) запишется в виде

$$v_x(0,t) = f(t)\exp\big(h(0)t/2\big), \tag{10}$$

где

$$H(t) = h''(t)\exp\big(h(0)t/2\big), \quad h_0 = h'(0) - h^2(0)/4. \tag{11}$$

Лемма 1. *Пусть* $k(t) \in C^2[0,\infty)$, $D_1 = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < x\}$. *Тогда*

$$v(x,t) \equiv 0 \tag{12}$$

для всех $(x,t) \in D_1$.

Доказательство. Рассмотрим пучок характеристик оператора $\partial/\partial t + \partial/\partial x$, проходящий через отрезок $[0,l]$ оси x. Он высекает на правой границе области D отрезок $[0,l]$. Представляя волновой оператор в виде $(\partial/\partial t + \partial/\partial x)(\partial/\partial t - \partial/\partial x)$ и интегрируя равенство (7) вдоль отрезка фиксированной характеристики пучка, заключенного в D, используя условие (9), получим

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\Big)v\Big|_{x=l} = \int_0^t \Big[h_0 v(\tau - t + l, \tau) - \\ - \int_0^\tau H(\tau-\alpha)v(\tau - t + l, \alpha)d\alpha\Big]d\tau, \quad t \in (0,l).$$

С учетом граничного условия (8) при $x = l$ из этого равенства найдем

$$v(l,t) = \int_0^t \int_0^\tau \Big[h_0 v(\tau_1 - \tau + l, \tau_1) - \\ - \int_0^{\tau_1} H(\tau_1 - \alpha)v(\tau_1 - \tau + l, \alpha)d\alpha\Big]d\tau_1 d\tau, \quad t \in (0,l).$$

Производя замену переменных во внутреннем интеграле τ на ξ по формуле $\tau_1 - \tau + l = \xi$, последнее уравнение перепишем в виде

$$v(l,t) = \int_0^t \int_{l-\tau}^l \Big[h_0 v(\xi, \tau - l + \xi) - \\ - \int_0^{\tau - l + \xi} H(\tau - l + \xi - \alpha)v(\xi,\alpha)d\alpha\Big]d\xi d\tau, \quad t \in (0,l). \tag{13}$$

Интегрируя уравнение (7) вдоль характеристики $dx/dt = 1$, получим

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\Big)v(x,t) = \int_{(l+x-t)/2}^x \Big[h_0 v(\xi, \xi + t - x) - \\ - \int_0^{\xi + t - x} H(\xi + t - x - \alpha)v(\xi,\alpha)d\alpha\Big]d\xi,$$

где $(x,t) \in D_1$.

Далее, применяя (13), находим уравнение для $v(x,t)$ в области D_1:

$$v(x,t) = \int_0^{t+x-l} \int_{l-\tau}^{l} \Big[h_0 v(\xi, \tau - l + \xi) - \\ - \int_0^{\tau-l+\xi} H(\tau - l + \xi - \alpha) v(\xi,\alpha) d\alpha \Big] d\xi d\tau + \\ + \int_{t+x-l}^{t} \int_{(l+t+x-2\tau)/2}^{t+x-\tau} \Big[h_0 v(\xi, \xi + 2\tau - t - x) - \\ - \int_0^{\xi+2\tau-t-x} H(\xi + 2\tau - t - x - \alpha) v(\xi,\alpha) d\alpha \Big] d\xi d\tau.$$

При выполнении условий леммы последнее уравнение является однородным уравнением вольтерровского типа с непрерывным ядром. Отсюда

$$v(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D_1,$$

и формула (12) установлена. □

Предположим, что функция $f(t)$ имеет структуру

$$f(t) = -\delta'(t) - h(0)\delta(t)/2 + \theta(t) f_0(t), \tag{14}$$

где $f_0(t)$ — регулярная функция.

Функцию $v(x,t)$ представим в виде

$$v(x,t) = \delta(t-x) + \theta(t-x)\overline{v}(x,t), \tag{15}$$

где $\overline{v}(x,t)$ — регулярная функция. Следуя методике работы [24], подставим выражения функций $f(t)$ и $v(x,t)$ в виде (14), (15) в задачу (7)–(10) и воспользуемся методом выделения особенностей, т.е. приравняем коэффициенты при особенностях к нулю. В результате для регулярной части решения прямой задачи в области $D_2 = \{(x,t) : 0 < x < l, x < t < 2l - x\}$ получим следующие равенства:

$$v_{tt} - v_{xx} + h_0 v + H(t-x) + \int_0^{t-x} H(\tau) v(x, t-\tau) d\tau = 0, \tag{16}$$

$$v\big|_{t=x+0} = -h(0) - h_0 x/2, \tag{17}$$

$$v(0,t) = k(t) \exp(h(0)t/2), \tag{18}$$

где $v(x,t) = \overline{v}(x,t)$ в области D_2. Дополнительное условие в терминах функции $v(x,t)$ с учетом (10) принимает вид

$$v_x(0,t) = f_0(t) \exp\big(h(0)t/2\big). \tag{19}$$

Заменим равенства (16)–(19) эквивалентной системой интегральных уравнений относительно неизвестных функций. Соотношения (16), (18), (19) в области D_2 представляют собой задачу Коши для уравнения колебания струны с данными на оси $x=0$. Применяя формулу Даламбера, получим интегральное уравнение относительно $v(x,t)$:

$$v(x,t)=\frac{1}{2}\big[\widetilde{k}(t+x)+\widetilde{k}(t-x)\big]+\frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x}\widetilde{f}_0(\tau)d\tau+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^x\int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}\left[h_0v(\xi,\tau)-H(\tau-\xi)+\int_0^{\tau-\xi}H(\alpha)v(\xi,\tau-\alpha)d\alpha\right]d\tau d\xi, \quad (20)$$

где $\widetilde{k}(t)=k(t)\exp\big(h(0)t/2\big)$, $\widetilde{f}_0(t)=f_0(t)\exp\big(h(0)t/2\big)$.

Из теории интегральных уравнений следует, что уравнение (20) как неоднородное интегральное уравнение Вольтерра второго рода имеет единственное решение, которое можно найти, например, методом последовательных приближений. Тогда, подставляя найденную функцию $\overline{v}(x,t)$ в (15), находим обобщенную функцию $v(x,t)$. Далее, воспользовавшись формулой (5), получим обобщенное решение задачи (1)–(3).

2. Сведение задачи к системе интегральных уравнений.

Лемма 2. *Пусть функция $f(t)$ имеет вид (14) и $f_0(t)\in C^1[0,2l]$, $l>0$. Тогда обратная задача (1)–(4) для $(x,t)\in D_2$ эквивалентна задаче нахождения вектор-функций $v(x,t)$, $v_t(x,t)$, $H(t)$, $\widetilde{k}(t)$, $\widetilde{k}'(t)$, $\widetilde{k}''(t)$ из следующей системы уравнений и равенства (20):*

$$v_t(x,t)=\frac{1}{2}\big[\widetilde{k}'(t+x)+\widetilde{k}'(t-x)\big]+\frac{1}{2}\big[\widetilde{f}_0(t+x)-\widetilde{f}_0(t-x)\big]+\frac{x}{2}H(t-x)+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^x\big[h_0\big(v(\xi,t+x-\xi)-v(\xi,t-x+\xi)\big)-H(t+x-2\xi)\big]d\xi+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^x\int_0^{t+x-2\xi}H(\alpha)v(\xi,t+x-\xi-\alpha)d\alpha d\xi-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^x\int_0^{t-x}H(\alpha)v(\xi,t-x+\xi-\alpha)d\alpha d\xi. \quad (21)$$

$$H(t)=2\widetilde{k}''(t)+2\widetilde{f}_0'(t)-h_0\big(h(0)+h_0t/4\big)+$$
$$+2\int_0^{t/2}\Big[h_0v_t(\xi,t-\xi)-\big(h(0)+h_0\xi/2\big)H(t-2\xi)+$$
$$+\int_0^{t-2\xi}H(\alpha)v_t(\xi,t-\xi-\alpha)d\alpha\Big]d\xi. \quad (22)$$

$$\widetilde{k}(t)=-h(0)+\big(h^2(0)/2-h'(0)\big)t+\int_0^t(t-\tau)\widetilde{k}''(\tau)d\tau, \quad (23)$$

$$\widetilde{k}'(t)=h^2(0)/2-h'(0)+\int_0^t\widetilde{k}''(\tau)d\tau, \quad (24)$$

$$\widetilde{k}''(t)=-H(t)+\big(h^2(0)/4-h'(0)\big)\widetilde{k}(t)-\int_0^tH(t-\tau)\widetilde{k}(\tau)d\tau. \quad (25)$$

Доказательство. Уравнение (21) получается непосредственным дифференцированием равенства (20). Далее в уравнении (20) полагаем $t = x + 0$ и используем равенство (17):

$$-h(0) - \frac{h_0 x}{2} = \frac{1}{2}\big[\widetilde{k}(2x) + \widetilde{k}(0)\big] + \frac{1}{2}\int_0^{2x} \widetilde{f}_0(\tau)d\tau + \\ + \frac{1}{2}\int_0^x \int_\xi^{2x-\xi} \left[h_0 v(\xi,\tau) - H(\tau-\xi) + \int_0^{\tau-\xi} H(\alpha)v(\xi,\tau-\alpha)d\alpha\right] d\tau d\xi.$$

Обозначая $t = 2x$ и дифференцируя полученное уравнение по t, получаем

$$-\frac{h_0}{4} = \frac{1}{2}\widetilde{k}'(t) + \frac{1}{2}\widetilde{f}_0(t) + \\ + \frac{1}{2}\int_0^{t/2} \left[h_0 v(\xi,t-\xi) + \int_0^{t-2\xi} H(\alpha)v(\xi,t-\xi-\alpha)d\alpha\right] d\xi - \\ - \frac{1}{2}\int_0^{t/2} H(t-2\xi)d\xi. \quad (26)$$

В последнем интеграле сделаем замену переменных $\eta = t - 2\xi$. После этого, продифференцировав последнее равенство еще раз, получим уравнение (23) относительно функции $H(t)$. Для замыкания системы интегральных уравнений (20)–(22) используются очевидные равенства (23)–(25).

Для того чтобы показать эквивалентность обратной задачи системе интегральных уравнений, мы должны убедиться в уместности обратных преобразований. Сделаем это на примере уравнения (22). Заменив в этом уравнении t на $t - 2\tau$, умножим обе части полученного на $d\tau$ и проинтегрируем по τ в пределах от нуля до $t/2$. В повторных интегралах получаемого равенства изменим порядок интегрирования. Используя условия (17) в обратную сторону, после несложных выкладок приходим к уравнению (20). Равенства (18) и (19) непосредственно следуют из формулы (20). Для полноты системы интегральных уравнений используются равенства (23)–(25). Для получения этих равенств проинтегрируем уравнение (24) по t в пределах от нуля до t. При этом мы получим равенство (23), верность которого устанавливается интегрированием по частям. Формула (25) получена из формулы (6) с использованием равенства $\widetilde{k}(t) = k(t)\exp\big(h(0)t/2\big)$. □

Замечание. В уравнениях системы (20)–(25) присутствуют неизвестные числа $h(0)$ и $h'(0)$. Для их определения поступаем следующим образом. Из формулы (6) следует, что $h(0) = -k(0)$. Продифференцировав уравнение (6), выразим $k'(0)$ через числа $h(0)$ и $h'(0)$:

$$k'(0) = -h'(0) + h^2(0). \quad (27)$$

Далее, полагая $t = 0$, из равенств (17) и (19) с учетом (11) и (27) получим

$$-7h^2(0) - 4h'(0) = -8f_0(0).$$

Мы получили одно уравнение относительно неизвестных чисел. Для получения второго уравнения положим $t=0$ в уравнении (26). После упрощений приходим к уравнению

$$-3h^2(0)-4h'(0)=-8f_0(0).$$

Разрешив эту систему уравнений, находим неизвестные числа:

$$h(0)=0, \quad h'(0)=2f_0(0).$$

В дальнейших исследованиях подставляем найденные значения этих чисел в уравнения (23)–(25).

3. Основной результат. Основным результатом настоящей работы является нижеследующая теорема глобальной однозначной разрешимости обратной задачи.

Теорема. *Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда существует единственное решение обратной задачи (1)–(4) $k(t)\in C^2[0,2l]$ для любого $l>0$.*

Доказательство. Запишем систему уравнений (23)–(25) в виде операторного уравнения

$$\varphi = A\varphi. \tag{28}$$

Здесь φ — векторная функция с компонентами φ_i:

$$\varphi=\big[\varphi_1(x,t),\ \varphi_2(x,t),\ \varphi_3(t),\ \varphi_4(t),\ \varphi_5(t),\ \varphi_6(t)\big],$$

где

$$\varphi_1(x,t)=v(x,t)-\frac{1}{2}\big[\widetilde{k}(t+x)+\widetilde{k}(t-x)\big],$$

$$\varphi_2(x,t)=v_t(x,t)-\frac{1}{2}\big[\widetilde{k}'(t+x)+\widetilde{k}'(t-x)\big]-\frac{x}{2}H(t-x),$$

$$\varphi_3(t)=H(t)-2\widetilde{k}''(t), \quad \varphi_4(t)=\widetilde{k}(t), \quad \varphi_5(t)=\widetilde{k}'(t),$$

$$\varphi_6(t)=\widetilde{k}''(t)+H(t)-h_0\widetilde{k}(t),$$

а оператор A определен на множестве функций $\varphi\in C[D_2]$ и в соответствии с равенствами (23)–(25) имеет вид $A=(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6)$:

$$\begin{aligned}
A_1\varphi = \varphi_{01} + \frac{1}{2}\int_0^x\int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}\Big[h_0\Big(\varphi_1(\xi,\tau)+\frac{1}{2}(\varphi_4(\tau-\xi)+\varphi_4(\tau+\xi)\Big) - \\
-\frac{1}{3}\big(2\varphi_6(\tau-\xi)+\varphi_3(\tau-\xi)-h_0\varphi_4(\tau-\xi)\big)+ \\
+\frac{1}{3}\int_0^{\tau-\xi}\big(2\varphi_6(\alpha)+\varphi_3(\alpha)-h_0\varphi_4(\alpha)\big)\times \\
\times\Big(\varphi_1(\xi,\tau-\alpha)+\frac{1}{2}(\varphi_4(\tau-\alpha-\xi)+\varphi_4(\tau-\alpha+\xi)\Big)d\alpha\Big]d\tau d\xi,
\end{aligned}$$

$$A_2\varphi = \varphi_{02} + \frac{1}{2}\int_0^x \Big[h_0\Big(\varphi_1(\xi, t+x-\xi) - \varphi_1(\xi, t-x+\xi) -$$

$$-\frac{1}{2}\Big(\varphi_4(t+x) + \frac{1}{3}\varphi_4(t+x-2\xi) + \varphi_4(t-x) + \varphi_4(t-x+2\xi)\Big)\Big) -$$

$$-\frac{1}{3}\big(2\varphi_6(t+x-2\xi) + \varphi_3(t+x-2\xi)\big)\Big]d\xi +$$

$$+\frac{1}{6}\int_0^x \int_0^{t+x-2\xi} \big(2\varphi_6(\alpha) + \varphi_3(\alpha) - h_0\varphi_4(\alpha)\big) \times$$

$$\times\Big(\varphi_1(\xi, t+x-\xi-\alpha) + \frac{1}{2}\Big(\varphi_4(t-x-\alpha) + \varphi_4(t+x-2\xi-\alpha)\Big)\Big)d\alpha d\xi -$$

$$-\frac{1}{6}\int_0^x \int_0^{t-x} \big(2\varphi_6(\alpha) + \varphi_3(\alpha) - h_0\varphi_4(\alpha)\big) \times$$

$$\times\Big(\varphi_1(\xi, t+x-\xi-\alpha) + \frac{1}{2}\Big(\varphi_4(t-x-\alpha) + \varphi_4(t+x-2\xi-\alpha)\Big)\Big)d\alpha d\xi,$$

$$A_3\varphi = \varphi_{03} + 2\int_0^{t/2} \Big[h_0\Big(\varphi_2(\xi, t-\xi) + \frac{1}{2}\big(\varphi_5(t-2\xi) + \varphi_5(t)\big) +$$

$$+\frac{\xi}{3}\big(2\varphi_6(t-2\xi) + \varphi_3(t-2\xi) - h_0\varphi_4(t-2\xi)\big)\Big) +$$

$$+\Big(\varphi_2(\xi, t-\xi-\alpha) + \frac{1}{2}\big(\varphi_5(t-2\xi-\alpha) + \varphi_5(t-\alpha)\big) +$$

$$+\frac{\xi}{6}\big(2\varphi_6(t-2\xi-\alpha) + \varphi_3(t-2\xi-\alpha) - h_0\varphi_4(t-2\xi-\alpha)\big)\Big)d\alpha\Big]d\xi. \quad (29)$$

$$A_4\varphi = \varphi_{04} + \frac{1}{3}\int_0^t (t-\tau)[\varphi_6(\tau) - \varphi_3(\tau) - h_0\varphi_4(\tau)]d\tau,$$

$$A_5\varphi = \varphi_{05} + \frac{1}{3}\int_0^t [\varphi_6(\tau) - \varphi_3(\tau) - h_0\varphi_4(\tau)]d\tau,$$

$$A_6\varphi = \varphi_{06} - \frac{1}{3}\int_0^t [\varphi_6(t-\tau) - \varphi_3(t-\tau) - h_0\varphi_4(t-\tau)]\varphi_4(\tau)d\tau,$$

где $\varphi_0 = \big[\varphi_{01}(x,t), \varphi_{02}(x,t), \varphi_{03}(t), \varphi_{04}(t), \varphi_{05}(t), \varphi_{06}(t)\big]$ — векторная функция с компонентами φ_{0i}:

$$\varphi_{01}(x,t) = \frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x} \widetilde{f}_0(\tau)d\tau, \quad \varphi_{02}(x,t) = \frac{1}{2}\big[\widetilde{f}_0(t+x) - \widetilde{f}_0(t-x)\big],$$

$$\varphi_{03}(t) = 2\widetilde{f}_0'(t) - \frac{h_0^2}{4}t, \quad \varphi_{04}(t) = -2f_0(0)t, \quad \varphi_{05}(t) = -2f_0(0), \quad \varphi_{06}(t) = 0.$$

Обозначим через C_σ банахово пространство непрерывных функций, порожденных семейством весовых норм

$$\|\varphi\|_\sigma = \max\Big\{\sup_{(x,t)\in D_2}\big|\varphi_i(x,t)e^{-\sigma(t+(1+\theta)x)}\big|, i=\overline{1,2};\ \sup_{t\in[0,T]}\big|\varphi_j(t)e^{-\sigma t}\big|, j=\overline{3,6}\Big\},$$

где $\sigma \geqslant 0,\ 0 < \theta < 1$.

Очевидно, что при $\sigma = 0$ это пространство является пространством непрерывных функций с обычной нормой, которую далее будем обозначать через $\|\varphi\|$.

В силу неравенства

$$e^{-\sigma t}\|\varphi\| \leqslant \|\varphi\|_\sigma \leqslant \|\varphi\|$$

нормы $\|\varphi\|_\sigma$ и $\|\varphi\|$ эквивалентны для любого фиксированного $l \in (0,\infty)$. Число σ выберем позже.

Пусть $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|) = \{\varphi : \|\varphi - \varphi_0\| \leqslant \|\varphi_0\|\}$ — шар радиуса $\|\varphi_0\|$ с центром в точке φ_0 некоторого весового пространства $C_\sigma(\sigma \geqslant 0)$, в котором

$$\|\varphi_0\| = \max(\|\varphi_{01}\|, \|\varphi_{02}\|, \|\varphi_{03}\|, \|\varphi_{04}\|, \|\varphi_{05}\|, \|\varphi_{06}\|).$$

Нетрудно заметить, что для $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$ имеет место оценка

$$\|\varphi\|_\sigma \leqslant \|\varphi_0\|_\sigma + \|\varphi_0\| \leqslant 2\|\varphi_0\|.$$

Пусть $\varphi(x,t) \in Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$. Покажем, что при подходящем выборе $\sigma > 0$ оператор A переводит шар в шар, т.е. $A\varphi \in Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$. На самом деле, составляя с помощью равенств (28) норму разностей, имеем

$$\begin{aligned}
\|A_1\varphi - \varphi_{01}\| &= \sup_{(x,t)\in D_2} \left|(A_1\varphi - \varphi_{01})e^{-\sigma(t+(1+\theta)x)}\right| = \\
&= \sup_{(x,t)\in D_2} \left|\frac{1}{2}\int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} \Big[h_0\Big(\varphi_1(\xi,\tau)e^{-\sigma(\tau+(1+\theta)\xi)}e^{-\sigma(t-\tau+(1+\theta)(x-\xi))} + \right. \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big(\varphi_4(\tau-\xi)e^{-\sigma(\tau-\xi)}e^{-\sigma(t-\tau+\xi)} + \varphi_4(\tau+\xi)e^{-\sigma(\tau+\xi)}e^{-\sigma(t-\tau-\xi)}\Big)\Big) - \\
&\quad - \frac{1}{3}\Big(2\varphi_6(\tau-\xi) + \varphi_3(\tau-\xi) - h_0\varphi_4(\tau-\xi)\Big)e^{-\sigma(\tau-\xi)}e^{-\sigma(t-\tau+\xi)} + \\
&\quad + \frac{1}{3}\int_0^{\tau-\xi}\big(2\varphi_6(\alpha) + \varphi_3(\alpha) - h_0\varphi_4(\alpha)\big)e^{-\sigma\alpha} \times \\
&\quad \times \Big(\varphi_1(\xi,\tau-\alpha)e^{-\sigma(\tau-\alpha+(1+\theta)\xi)}e^{-\sigma(t-\tau+(1+\theta)(x-\xi)-\alpha)} + \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big(\varphi_4(\tau-\alpha-\xi)e^{-\sigma(\tau-\alpha-\xi)}e^{-\sigma(t-\tau+\xi)} + \\
&\quad \left. + \varphi_4(\tau-\alpha+\xi)e^{-\sigma(\tau-\alpha+\xi)}e^{-\sigma(t-\tau-\xi)}\Big)\Big)d\alpha\Big]d\tau d\xi\right| \leqslant \\
&\leqslant \frac{\|\varphi_0\|}{\sigma} l\Big[\Big(\frac{7h_0}{3} + 1\Big) + 8h_1\|\varphi_0\|l\Big] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\|\varphi_0\|}{\sigma}\alpha_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|A_2\varphi - \varphi_{02}\| &= \sup_{(x,t)\in D_2} \left|(A_2\varphi - \varphi_{02})e^{-\sigma(t+(1+\theta)x)}\right| \leqslant \\
&\leqslant \frac{\|\varphi_0\|}{\sigma}\Big[\frac{11h_0}{3} + 2(3+h_0)\|\varphi_0\|l\Big] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\|\varphi_0\|}{\sigma}\alpha_2,
\end{aligned}$$

$$\|A_3\varphi - \varphi_{03}\| = \sup_{t\in[0;T]} \left|(A_3\varphi - \varphi_{03})e^{-\sigma t}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2\|\varphi_0\|}{\sigma}\left[\frac{7}{2}h_0 + h_1 l\big(1 + h_0 + (4 + lh_1)\|\varphi_0\|\big)\right] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\|\varphi_0\|}{\sigma}\alpha_3,$$

$$\|A_4\varphi - \varphi_{04}\| = \sup_{t\in[0;T]} \left|(A_4\varphi - \varphi_{04})e^{-\sigma t}\right| \leqslant \frac{2\|\varphi_0\|}{\sigma}\frac{(2+h_0)l}{3} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\|\varphi_0\|}{\sigma}\alpha_4,$$

$$\|A_5\varphi - \varphi_{05}\| = \sup_{t\in[0;T]} \left|(A_5\varphi - \varphi_{05})e^{-\sigma t}\right| \leqslant \frac{2\|\varphi_0\|}{\sigma}\frac{2+h_0}{3} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\|\varphi_0\|}{\sigma}\alpha_5,$$

$$\|A_6\varphi - \varphi_{06}\| = \sup_{t\in[0;T]} \left|(A_6\varphi - \varphi_{06})e^{-\sigma t}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2\|\varphi_0\|}{\sigma}\left[2f_0(0)l + \frac{2}{3}\|\varphi_0\|(2+h_0)l^2\right]\frac{2+h_0}{3} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\|\varphi_0\|}{\sigma}\alpha_6,$$

где $h_1 = 1 + h_0/3$. Последнее неравенство получено с помощью четвертого и шестого уравнений системы (29)

Выбирая $\sigma \geqslant \alpha_0 = \max(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$, получим, что A переводит шар $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$ в шар $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$.

Пусть теперь φ^1, φ^2 — любые два элемента из $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$. Тогда, используя вспомогательные неравенства вида

$$|\varphi_i^1\varphi_j^1 - \varphi_i^2\varphi_j^2|e^{-\sigma t} \leqslant |\varphi_i^1|\,|\varphi_j^1 - \varphi_j^2|e^{-\sigma t} + |\varphi_j^2|\,|\varphi_i^1 - \varphi_i^2|e^{-\sigma t} \leqslant 4\|\varphi_0\|\,\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma$$

для $(x,t) \in D_2$, получим

$$\|A_1\varphi^1 - A_1\varphi^2\|_\sigma = \sup_{(x,t)\in D_2} \left|(A_1\varphi^1 - A_1\varphi^2)e^{-\sigma(t+(1+\theta)x)}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma}{\sigma} l\left[\left(\frac{7h_0}{6} + \frac{1}{2}\right) + 8h_1\|\varphi_0\|l\right] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma}{\sigma}\beta_1,$$

$$\|A_2\varphi^1 - A_2\varphi^2\|_\sigma = \sup_{(x,t)\in D_2} \left|(A_2\varphi^1 - A_2\varphi^2)e^{-\sigma(t+(1+\theta)x)}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma}{\sigma}\left[\frac{11h_0}{6} + 2(3+h_0)\|\varphi_0\|l\right] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma}{\sigma}\beta_2,$$

$$\|A_3\varphi^1 - A_3\varphi^2\|_\sigma = \sup_{t\in[0;2l]} \left|(A_3\varphi^1 - A_3\varphi^2)e^{-\sigma t}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma}{\sigma}\left[\frac{7}{2}h_0 + \frac{1}{2}h_1 l\big(1 + h_0 + 2(4 + lh_1)\|\varphi_0\|\big)\right] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma}{\sigma}\beta_3,$$

$$\|A_4\varphi^1 - A_4\varphi^2\|_\sigma = \sup_{t\in[0;2l]} \left|(A_4\varphi^1 - A_4\varphi^2)e^{-\sigma t}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma}{\sigma}\frac{(2+h_0)l}{3} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma}{\sigma}\beta_4,$$

$$\|A_5\varphi^1 - A_5\varphi^2\|_\sigma = \sup_{t\in[0;2l]} \left|(A_5\varphi^1 - A_5\varphi^2)e^{-\sigma t}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\|\varphi^1-\varphi^2\|_\sigma}{\sigma}\frac{2+h_0}{3} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\|\varphi^1-\varphi^2\|_\sigma}{\sigma}\beta_5,$$

$$\|A_6\varphi^1 - A_6\varphi^2\|_\sigma = \sup_{t\in[0;2l]} \left|(A_6\varphi^1 - A_6\varphi^2)e^{-\sigma t}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\|\varphi^1-\varphi^2\|_\sigma}{\sigma}\left[2f_0(0)l + \frac{4}{3}\|\varphi_0\|(2+h_0)l^2\right]\frac{2+h_0}{3} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\|\varphi^1-\varphi^2\|_\sigma}{\sigma}\beta_6.$$

Проведенные исследования показали, что если число σ будет выбрано из условия $\sigma > \max(\alpha_0, \beta_0)$, где $\beta_0 = \max(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6)$, то оператор A является сжимающим на $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$. Тогда, согласно теореме Банаха [22], существует единственное решение уравнения (28) в $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$ при любом фиксированном $l > 0$. $\square$

В итоге имеем, что $k(t) = \widetilde{k}(t)$, так как $h(0) = 0$.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Lorenzi A., Sinestrari E. Stability results for a partial integrodifferential inverse problem / *Volterra integrodifferential equations in Banach spaces and applications, Proc. Conf., Trento/Italy 1987* / Pitman Res. Notes Math. Ser., 190, 1989. pp. 271–294.
2. Lorenzi A., Paparoni E. Direct and inverse problems in the theory of materials with memory // *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 1992. vol. 87. pp. 105–138.
3. Lorenzi A. An identification problem related to a nonlinear hyperbolic integro-differential equation // *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, 1994. vol. 22, no. 1. pp. 21–44. DOI: https://doi.org/10.1016/0362-546X(94)90003-5.
4. Сафаров Ж. Ш., Дурдиев Д. К. Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения акустики // *Диффер. уравн.*, 2018. Т. 54, № 1. С. 136–144. EDN: QLHNCP. DOI: https://doi.org/10.1134/S0374064118010119.
5. Safarov J. S Global solvability of the one-dimensional inverse problem for the integro-differential equation of acoustics // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2018. vol. 11, no. 6. pp. 753–763. EDN: YPMSKT. DOI: https://doi.org/10.17516/1997-1397-2018-11-6-753-763.
6. Романов В. Г. Об определении коэффициентов в уравнениях вязкоупругости // *Сиб. матем. журн.*, 2014. Т. 55, № 3. С. 617–626. EDN: SJBRGD.
7. Дурдиев Д. К., Сафаров Ж. Ш. Обратная задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости в ограниченной области // *Матем. заметки*, 2015. Т. 97, № 6. С. 855–867. EDN: UAJXTD. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm10659.
8. Рахмонов А. А. Дурдиев У. Д., Бозоров З. Р. Задача определения скорости звука и функции памяти анизотропной среды // *Теор. и матем. физика*, 2021. Т. 207, № 1. С. 112–132. EDN: VQBJPL. DOI: https://doi.org/10.4213/tmf10035.
9. Guidetti D. Reconstruction of a convolution kernel in a parabolic problem with a memory term in the boundary conditions // *Bruno Pini Mathematical Analysis Seminar*, 2013. vol. 4, no. 1. pp. 47–55. DOI: https://doi.org/10.6092/issn.2240-2829/4154.

10. Cavaterra C., Guidetti D. Identification of a convolution kernel in a control problem for the heat equation with a boundary memory term // *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 2014. vol. 193, no. 3. pp. 779–816. DOI: https://doi.org/10.1007/s10231-012-0301-y.
11. Janno J., von Wolfersdorf L. Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity // *Math. Methods Appl. Sci.*, 1997. vol. 20, no. 4. pp. 291–314. DOI: https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1476(19970310)20:4<291::AID-MMA860>3.0.CO;2-W.
12. Дурдиев Д. К., Рахмонов А. А Задача об определении двумерного ядра в системе интегро-дифференциальных уравнений вязкоупругой пористой среды // *Сиб. журн. индустр. матем.*, 2020. Т. 23, № 2. С. 63–80. EDN: KIFSZH. DOI: https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2020.23.205.
13. Durdiev D. K., Nuriddinov Zh. Z Determination of a multidimensional kernel in some parabolic integro-differential equation // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2021. vol. 14, no. 1. pp. 117–127. EDN: RMPPXU. DOI: https://doi.org/10.17516/1997-1397-2021-14-1-117-127.
14. Safarov J. Sh. Two-dimensional inverse problem for an integro-differential equation of hyperbolic type // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2022. vol. 15, no. 5. pp. 651–662. EDN: ADDBPG. DOI: https://doi.org/10.17516/1997-1397-2022-15-5-651-662.
15. Дурдиев Д. К., Сафаров Ж. Ш. Локальная разрешимость задачи определения пространственной части многомерного ядра в интегро-дифференциальном уравнении гиперболического типа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. № 4. С. 37–47. EDN: PUQBLB. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1097.
16. Дурдиев Д. К., Сафаров Ж. Ш. Задача об определении двумерного ядра уравнения вязкоупругости со слабо горизонтальной неоднородностью // *Сиб. журн. индустр. матем.*, 2022. Т. 25, № 1. С. 14–38. EDN: BVTEGR. DOI: https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2022.25.102.
17. Дурдиев Д. К., Сафаров Ж. Ш. Задача определения памяти среды со слабо горизонтальной неоднородностью // *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2022. Т. 32, № 3. С. 383–402. EDN: ILHEXI. DOI: https://doi.org/10.35634/vm220303.
18. Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д. О глобальной разрешимости одной многомерной обратной задачи для уравнения с памятью // *Сиб. матем. журн.*, 2021. Т. 62, № 2. С. 269–285. EDN: IAZZFL. DOI: https://doi.org/10.33048/smzh.2021.62.203.
19. Алексеев А. С., Добринский В. И. Некоторые вопросы практического использования обратных динамических задач сейсмики / *Математические проблемы геофизики.* Вып. 6, ч. 2. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1975. С. 7–53.
20. Janno J., von Wolfersdorf L. Inverse problems for identification of memory kernels in heat flow // *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 1996. vol. 4, no. 1. pp. 39–66. DOI: https://doi.org/10.1515/jiip.1996.4.1.39.
21. Durdiev D., Shishkina E., Sitnik S. The explicit formula for solution of anomalous diffusion equation in the multi-dimensional space // *Lobachevskii J. Math.*, 2021. vol. 42, no. 6. pp. 1264–1273, arXiv: 2009.10594 [math.CA]. DOI: https://doi.org/10.1134/S199508022106007X.
22. Коломогоров А. Н., Фомин С. В *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука, 1976. 542 с.
23. Владимиров В. С. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1988. 512 с.
24. Романов В. Г. *Обратные задачи математической физики.* М.: Наука, 1984. 310 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 1, pp. 29–44
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1997

MSC: 35H10, 35R30, 45K05

Inverse problem for an integro-differential equation of hyperbolic type with additional information of a special form in a bounded domain

J. Sh. Safarov[1,2]

[1] V. I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, 4, University st., Tashkent, 100174, Uzbekistan.
[2] Tashkent University of Information Technologies, 108, Amir Timur st., Tashkent, 100202, Uzbekistan.

Abstract

A one-dimensional inverse problem of determining the kernel of the integral term of an integro-differential equation of hyperbolic type in a variable-bounded domain x is considered. Firstly, the direct problem is investigated, for the regular part of which the Cauchy problem on the axis $x = 0$ is obtained using the method of singularity extraction. Subsequently, an integral equation for the unknown function is derived by the d'Alembert formula.

For the direct problem, the inverse problem of determining the kernel entering the integral term of the equation is studied. To find it, an additional condition is specified in a special form. As a result, the inverse problem is reduced to an equivalent system of integral equations for unknown functions. The principle of contraction mappings in the space of continuous functions with weighted norms is applied to the obtained system.

For the given problem, a theorem of global unique solvability has been proven, which is the main result of the study.

Keywords: integro-differential equation, inverse problem, integral kernel, contraction mapping principle, Banach theorem.

Received: 27th January, 2023 / Revised: 16th January, 2024 /
Accepted: 4th March, 2024 / First online: 15th July, 2024

Differential Equations and Mathematical Physics
Research Article

Please cite this article in press as:
Safarov J. Sh. Inverse problem for an integro-differential equation of hyperbolic type with additional information of a special form in a bounded domain, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 1, pp. 29–44. EDN: WSCTDR. DOI: 10.14498/vsgtu1997 (In Russian).

Author's Details:
Jurabek Sh. Safarov https://orcid.org/0000-0001-9249-835X
Dr. Phys. & Math. Sci.; Senior Researcher; Lab. of Differential Equations and their Applications[1]; Professor; Dept. of Higher Mathematics[2]; e-mail: j.safarov65@mail.ru

Competing interests. I have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. I take full responsibility for submitting the final version of the manuscript for publication. The final version of the manuscript has been approved by me.

Funding. The research was conducted without funding.

References

1. Lorenzi A., Sinestrari E. Stability results for a partial integrodifferential inverse problem, In: *Volterra integrodifferential equations in Banach spaces and applications, Proc. Conf., Trento/Italy 1987*, Pitman Res. Notes Math. Ser., 190, 1989, pp. 271–294.
2. Lorenzi A., Paparoni E. Direct and inverse problems in the theory of materials with memory, *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 1992, vol. 87, pp. 105–138.
3. Lorenzi A. An identification problem related to a nonlinear hyperbolic integro-differential equation, *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, 1994, vol. 22, no. 1, pp. 21–44. DOI: https://doi.org/10.1016/0362-546X(94)90003-5.
4. Safarov Z. S., Durdiev D. K. Inverse problem for an integro-differential equation of acoustics, *Differ. Equat.*, 2018, vol. 54, no. 1, pp. 134–142. EDN: SBEEZR. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266118010111.
5. Safarov J. S Global solvability of the one-dimensional inverse problem for the integro-differential equation of acoustics, *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2018, vol. 11, no. 6, pp. 753–763. EDN: YPMSKT. DOI: https://doi.org/10.17516/1997-1397-2018-11-6-753-763.
6. Romanov V. G. On the determination of the coefficients in the viscoelasticity equations, *Siberian Math. J.*, 2014, vol. 55, no. 3, pp. 503–510. EDN: UGODUV. DOI: https://doi.org/10.1134/S0037446614030124.
7. Durdiev D. K., Safarov Z. S. Inverse problem of determining the one-dimensional kernel of the viscoelasticity equation in a bounded domain, *Math. Notes*, 2015, vol. 97, no. 6, pp. 867–877. EDN: UTMWIN. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434615050223.
8. Rahmonov A. A., Durdiev U. D., Bozorov Z. R. Problem of determining the speed of sound and the memory of an anisotropic medium, *Theoret. and Math. Phys.*, 2021, vol. 207, no. 1, pp. 494–513. EDN: IWWZQA. DOI: https://doi.org/10.1134/S0040577921040085.
9. Guidetti D. Reconstruction of a convolution kernel in a parabolic problem with a memory term in the boundary conditions, *Bruno Pini Mathematical Analysis Seminar*, 2013, vol. 4, no. 1, pp. 47–55. DOI: https://doi.org/10.6092/issn.2240-2829/4154.
10. Cavaterra C., Guidetti D. Identification of a convolution kernel in a control problem for the heat equation with a boundary memory term, *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 2014, vol. 193, no. 3, pp. 779–816. DOI: https://doi.org/10.1007/s10231-012-0301-y.
11. Janno J., von Wolfersdorf L. Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity, *Math. Methods Appl. Sci.*, 1997, vol. 20, no. 4, pp. 291–314. DOI: https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1476(19970310)20:4<291::AID-MMA860>3.0.CO;2-W.
12. Durdiev D. K., Rakhmonov A. A. The problem of determining the 2D kernel in a system of integro-differential equations of a viscoelastic porous medium, *J. Appl. Industr. Math.*, 2020, vol. 14, no. 2, pp. 281–295. EDN: GRSYPW. DOI: https://doi.org/10.1134/S1990478920020076.
13. Durdiev D. K., Nuriddinov Zh. Z Determination of a multidimensional kernel in some parabolic integro-differential equation, *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2021, vol. 14, no. 1, pp. 117–127. EDN: RMPPXU. DOI: https://doi.org/10.17516/1997-1397-2021-14-1-117-127.
14. Safarov J. Sh. Two-dimensional inverse problem for an integro-differential equation of hyperbolic type, *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2022, vol. 15, no. 5, pp. 651–662. EDN: ADDBPG. DOI: https://doi.org/10.17516/1997-1397-2022-15-5-651-662.
15. Durdiev D. K., Safarov Zh. Sh. The local solvability of a problem of determining the spatial part of a multidimensional kernel in the integro-differential equation of hyperbolic type,

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2012, no. 4, pp. 37–47 (In Russian). EDN: PUQBLB. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1097.

16. Durdiev D. K., Safarov J. Sh. Problem of determining the two-dimensional kernel of the viscoelasticity equation with a weakly horizontal inhomogeneity, *J. Appl. Ind. Math.*, 2022, vol. 16, no. 1, pp. 22–44. EDN: ANKIMT. DOI: https://doi.org/10.1134/s1990478922010033.
17. Durdiev D. K., Safarov J. Sh. The problem of determining the memory of an environment with weak horizontal heterogeneity, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2022, vol. 32, no. 3, pp. 383–402 (In Russian). EDN: ILHEXI. DOI: https://doi.org/10.35634/vm220303.
18. Durdiev D. K., Totieva Z. D. About global solvability of a multidimensional inverse problem for an equation with memory /, *Siberian Math. J.*, 2021, vol. 62, no. 2, pp. 215–229. EDN: VRTEUJ. DOI: https://doi.org/10.1134/S0037446621020038.
19. Alekseev A. S., Dobrinskii V. I. Some questions of practical use of inverse dynamical problems of seismics, In: *Matematicheskie problemy geofiziki* [Mathematical Problems of Geophysics]. Iss. 6, no. 2. Novosibirsk, Computing Center of the USSR Academy of Sciences, 1975, pp. 7–53 (In Russian).
20. Janno J., von Wolfersdorf L. Inverse problems for identification of memory kernels in heat flow, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 1996, vol. 4, no. 1, pp. 39–66. DOI: https://doi.org/10.1515/jiip.1996.4.1.39.
21. Durdiev D., Shishkina E., Sitnik S. The explicit formula for solution of anomalous diffusion equation in the multi-dimensional space, *Lobachevskii J. Math.*, 2021, vol. 42, no. 6, pp. 1264–1273, arXiv: 2009.10594 [math.CA]. DOI: https://doi.org/10.1134/S199508022106007X.
22. Kolmogorov A. N., Fomin S. V *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis]. Moscow, Nauka, 1976, 542 pp. (In Russian)
23. Vladimirov V. S. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1988, 512 pp. (In Russian)
24. Romanov V. G. *Obratnye zadachi matematicheskoi fiziki* [Inverse Problem for Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1984, 310 pp. (In Russian)