Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 19, № 1. С. 7–18
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1385

Дифференциальные уравнения и математическая физика

УДК 517.927.25

О ПОЛНОТЕ ОДНОЙ ПАРЫ БИОРТОГОНАЛЬНО СОПРЯЖЕННЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ*

А. А. Гималтдинова[1], *К. В. Курман*[2]

[1] Поволжская государственная социально-гуманитарная академия,
Россия, 443099, Самара, ул. М. Горького, 65/67.
[2] Башкирский государственный университет, Стерлитамакский филиал,
Россия, 453103, Стерлитамак, ул. Ленина, 47 а.

Аннотация

В работе изучена спектральная задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на конечном отрезке с разрывным коэффициентом при старшей производной. На концах отрезка заданы краевые условия первого рода, во внутренней точке заданы условия сопряжения по функции и первой производной. Найдены собственные значения с соответствующей асимптотикой как корни трансцендентного уравнения. Система собственных функций представляет собой тригонометрические синусы на одной половине отрезка и гиперболические синусы — на другой. Система собственных функций неортогональна в пространстве квадратично суммируемых функций. Построена соответствующая ей биортогональная система функций как решение сопряженной задачи. При доказательстве полноты биортогональной системы использована известная теорема Келдыша о полноте системы собственных функций несамосопряженного оператора.

Ключевые слова: собственные значения, собственные функции, сопряженная задача, полная система функций.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1385

При доказательстве единственности решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных можно применять метод

Образец для цитирования
Гималтдинова А. А., Курман К. В. О полноте одной пары биортогонально сопряженных систем функций // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 1. С. 7–18. doi: 10.14498/vsgtu1385.

Сведения об авторах
Альфира Авкалевна Гималтдинова (к.ф.-м.н., доц.; alfiragimaltdinova@mail.ru; автор, ведущий переписку), докторант, каф. математики и методики обучения.
Ксения Владимировна Курман (kseniakurman@yandex.ru), аспирант, каф. математического анализа.

*Настоящая статья представляет собой расширенный вариант доклада [1], сделанного авторами на Четвёртой международной конференции «Математическая физика и её приложения» (Россия, Самара, 25 августа – 1 сентября 2014).

В. И. Ильина [2], использующий полноту в L_2 соответствующей системы собственных функций. Таким методом, например, исследована задача Дирихле для уравнений смешанного типа с одной линией изменения типа в прямоугольной области в работах [3, 4].

При изучении задачи Дирихле для уравнения Лаврентьева—Бицадзе с двумя линиями изменения типа

$$Lu \equiv (\operatorname{sign} x)u_{xx} + (\operatorname{sign} y)u_{yy} = 0$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, $\alpha, \beta > 0$, возникает следующая спектральная задача.

Задача. *Найти значения $\lambda = \mu^2 \in \mathbb{C}$ и соответствующие функции $X(x)$, удовлетворяющие условиям*:

$$(\operatorname{sign} x)X'' + \lambda X = 0, \quad x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \tag{1}$$

$$X(0+0) = X(0-0), \;\; X'(0+0) = X'(0-0), \;\; X(1) = X(-1) = 0. \tag{2}$$

В работе [5] изучена похожая задача, найдена система собственных функций и исследована на полноту, только коэффициент при старшей производной в дифференциальном уравнении был кусочно-постоянным с положительными значениями.

Ранее в работе [6] доказана полнота и базисность в $L_2(0, 1)$ одной системы разрывных собственных функций для оператора второго порядка с постоянным коэффициентом при старшей производной, но с нелокальными условиями.

Уравнение (1) можно записать в виде $X'' + \lambda(\operatorname{sign} x)X = 0$, то есть имеем задачу с условиями сопряжения во внутренней точке для уравнения со знакопеременной весовой функцией.

В работе [7] изучались спектральные задачи для обыкновенных дифференциальных операторов второго и четвёртого порядка с условиями сопряжения во внутренней точке и с кусочно-постоянным весовым коэффициентом, но система собственных функций не исследована на полноту.

В работе [8] рассмотрены спектральные задачи с незнакоопределенной весовой функцией для самосопряжённого эллиптического оператора, приведены примеры из математической физики, иллюстрирующие возникновение таких задач.

В нашей работе будет построена система собственных функций, соответствующая ей биортогональная система и проведено её исследование на полноту.

Решениями уравнения (1), удовлетворяющими условиям (2), являются функции

$$X(x) = \begin{cases} C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x, & x > 0, \\ C_1 \operatorname{ch} \mu x + C_2 \operatorname{sh} \mu x, & x < 0, \end{cases}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, μ является решением уравнения

$$\operatorname{tg} \mu = -\operatorname{th} \mu. \tag{3}$$

Лемма 1. *Уравнение*

$$\operatorname{tg}(az) = -\operatorname{th}(bz), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a, b > 0, \tag{4}$$

имеет счётное множество корней, состоящее из нуля, простых попарно противоположных действительных и попарно противоположных чисто мнимых корней, для которых справедливо асимптотическое представление

$$z_k^{(1),(2)} = \pm\Big(-\frac{\pi}{4a} + \frac{\pi}{a}k + O\big(e^{-2\pi kb/a}\big)\Big),$$
$$z_k^{(3),(4)} = \pm i\Big(-\frac{\pi}{4b} + \frac{\pi}{b}k + O\big(e^{-2\pi ka/b}\big)\Big),\ k \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Очевидно, $z = 0$ является корнем уравнения (4). Пусть далее $z \neq 0$, $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Пусть $y = 0$. Найдём корни уравнения

$$\operatorname{tg}(ax) = -\operatorname{th}(bx). \tag{5}$$

Рассмотрим $x > 0$, т. к., очевидно, корни попарно противоположны. Из графиков функций $\operatorname{tg}(ax)$ и $-\operatorname{th}(bx)$ видно, что уравнение имеет ровно по одному корню в каждом из интервалов

$$-\frac{\pi}{2a} + \frac{\pi}{a}k < x_k < \frac{\pi}{a}k, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Рассмотрим

$$\operatorname{tg}\left[a\left(x_k - \left(-\frac{\pi}{2a} + \frac{\pi}{a}k\right)\right)\right] = -\operatorname{ctg}(ax_k) = \frac{1}{\operatorname{th}(bx_k)} \to 1 \quad \text{при} \ \ k \to \infty,$$

тогда

$$ax_k + \frac{\pi}{2} - \pi k \to \frac{\pi}{4},$$

поэтому

$$x_k \to -\frac{\pi}{4a} + \frac{\pi}{a}k \quad \text{при } k \to \infty.$$

Пусть

$$x_k = -\frac{\pi}{4a} + \frac{\pi}{a}k + \varepsilon(k),$$

где $\lim_{k\to\infty} \varepsilon(k) = 0$. Подставим их в уравнение (5):

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k + a\varepsilon\right) = -\operatorname{th}\left(-\frac{\pi b}{4a} + \frac{\pi bk}{a} + b\varepsilon\right).$$

Обозначим

$$-\frac{\pi b}{4a} + \frac{\pi bk}{a} = s,$$

тогда последнее равенство приводится к виду

$$\big(1 - \operatorname{tg}(a\varepsilon)\big)\big(1 + \operatorname{th} s \cdot \operatorname{th}(b\varepsilon)\big) = \big(1 + \operatorname{tg}(a\varepsilon)\big)\big(\operatorname{th} s + \operatorname{th}(b\varepsilon)\big).$$

Используя асимптотические равенства

$$\operatorname{tg} x = x + o(x), \quad \operatorname{th} x = x + o(x) \quad \text{при} \ \ x \to 0,$$

$$\operatorname{th} s = \frac{1-e^{-2s}}{1+e^{-2s}} = 1 - 2e^{-2s} + o(e^{-2s}) \quad \text{при} \quad s \to +\infty,$$

после преобразований получим

$$\varepsilon(k) = \frac{1}{a} e^{b(-2\pi k + \pi/2)/a} + o(e^{-2\pi kb/a}).$$

Тогда

$$x_k = -\frac{\pi}{4a} + \frac{\pi}{a}k + \frac{1}{a}e^{b(-2\pi k+\pi/2)/a} + o(e^{-2\pi kb/a})$$

или

$$x_k = -\frac{\pi}{4a} + \frac{\pi}{a}k + O(e^{-2\pi kb/a}).$$

2. При $x = 0$ получим $\operatorname{tg}(aiy) = -\operatorname{th}(biy)$ или $\operatorname{th}(ay) = -\operatorname{tg}(by)$, откуда найдём

$$y_k = -\frac{\pi}{4b} + \frac{\pi}{b}k + O(e^{-2\pi ka/b}).$$

3. Докажем, что исходное уравнение не имеет других корней. Пусть $z = x + iy$, $x \neq 0$, $y \neq 0$.

Используя формулы

$$\operatorname{tg}(x+iy) = \frac{\sin 2x + i \operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}, \quad \operatorname{th}(x+iy) = \frac{\operatorname{sh} 2x + i \sin 2y}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y},$$

из (4) получим

$$\begin{cases} \dfrac{\sin 2ax}{\cos 2ax + \operatorname{ch} 2ay} = -\dfrac{\operatorname{sh} 2bx}{\operatorname{ch} 2bx + \cos 2by}, \\ \dfrac{\operatorname{sh} 2ay}{\cos 2ax + \operatorname{ch} 2ay} = -\dfrac{\sin 2by}{\operatorname{ch} 2bx + \cos 2by}. \end{cases}$$

Очевидно, $x \neq \pi n/(2a)$, $y \neq \pi m/(2b)$, $n, m \in \mathbb{Z}$, тогда из последней системы получим уравнение

$$\frac{\operatorname{sh}(2bx)}{\sin 2ax} = \frac{\sin(2by)}{\operatorname{sh} 2ay}. \tag{6}$$

Пусть $2ax = t$, $2ay = z$, $b/a = k$, рассмотрим уравнение

$$\frac{\operatorname{sh}(kt)}{k \sin t} = \frac{\sin(kz)}{k \operatorname{sh} z}.$$

Докажем, что для функции

$$f(t) = \frac{\operatorname{sh}(kt)}{k \sin t}$$

неравенство $|f(t)| > 1$ справедливо для всех $t \in \mathbb{R} \backslash \{\pi n\}$.

1. Пусть $t \in (0, \pi)$, тогда $\sin t > 0$. Для функции $f_1(t) = \operatorname{sh}(kt) - k \sin t$ имеем $f_1'(t) = k(\operatorname{ch} kt - \cos t) > 0$, т. е. $f_1(t) > f_1(0) = 0$, поэтому

$$\operatorname{sh}(kt) > k \sin t \quad \text{или} \quad \frac{\operatorname{sh}(kt)}{k \sin t} > 1.$$

2. Пусть $t \in (\pi, 2\pi)$, тогда $\sin t < 0$. Для функции $f_2(t) = \mathrm{sh}(kt) + k\sin t$ справедливо $f_2'(t) = k(\mathrm{ch}\, kt + \cos t) > 0$, т. е. $f_2(t) > f_2(\pi) = \mathrm{sh}\,\pi k$, поэтому

$$\mathrm{sh}(kt) > -k\sin t + \mathrm{sh}\,\pi k > -k\sin t \quad \text{или} \quad \frac{\mathrm{sh}(kt)}{-k\sin t} > 1.$$

Аналогично можно показать выполнение неравенства $|f(t)| > 1$ на всех промежутках $(\pi n, (n+1)\pi)$, $n \geqslant 2$, а в силу чётности функции $f(t)$ оно справедливо и при отрицательных t.

С другой стороны, для функции

$$g(z) = \frac{\sin(kz)}{k\,\mathrm{sh}\, z}$$

справедливо $|g(z)| < 1$ при $y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, что доказывается аналогично.

Таким образом, уравнение (6) не имеет корней.$\square$

В силу леммы 1 уравнение (3) имеет счётное множество отличных от нуля корней μ_k и $i\mu_k$, причём для положительных μ_k справедливо асимптотическое представление

$$\mu_k = -\frac{\pi}{4} + \pi k + O(e^{-2\pi k}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда постоянная λ может принимать значения $\lambda_k = \mu_k^2 > 0$ и $\lambda_k = -\mu_k^2 < 0$, и решениями задачи (1), (2) будут соответственно функции

$$X_k^{(1)}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin[\mu_k(x-1)]}{\cos\mu_k}, & x > 0, \\ \dfrac{\mathrm{sh}[\mu_k(x+1)]}{\mathrm{ch}\,\mu_k}, & x < 0, \end{cases} \qquad X_k^{(2)}(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sh}[\mu_k(x-1)]}{\mathrm{ch}\,\mu_k}, & x > 0, \\ \dfrac{\sin[\mu_k(x+1)]}{\cos\mu_k}, & x < 0. \end{cases}$$

Легко убедиться, что система $\left\{X_k^{(1)}(x),\ X_k^{(2)}(x)\right\}$ неортогональна в пространстве $L_2[-1,1]$. Поэтому рассмотрим сопряжённую задачу:

$$\mathrm{sgn}\, x \cdot Z'' + d \cdot Z = 0, \quad x \in (-1,0) \cup (0,1),$$
$$Z(0-0) = -Z(0+0), \quad Z'(0-0) = -Z'(0+0), \quad Z(-1) = Z(1) = 0.$$

Её решениями являются функции

$$Z_k^{(1)}(x) = \begin{cases} -\dfrac{\sin[\mu_k(x-1)]}{\cos\mu_k}, & x > 0, \\ \dfrac{\mathrm{sh}[\mu_k(x+1)]}{\mathrm{ch}\,\mu_k}, & x < 0, \end{cases} \qquad Z_k^{(2)}(x) = \begin{cases} -\dfrac{\mathrm{sh}[\mu_k(x-1)]}{\mathrm{ch}\,\mu_k}, & x > 0, \\ \dfrac{\sin[\mu_k(x+1)]}{\cos\mu_k}, & x < 0. \end{cases}$$

Система $\left\{Z_k^{(1)};\ Z_k^{(2)}\right\}$ является биортогонально сопряжённой к системе $\left\{X_k^{(1)};\ X_k^{(2)}\right\}$, в чём можно убедиться по определению, вычислив соответствующие интегралы.

Лемма 2. *Система* $\left\{Z_k^{(1)},\ Z_k^{(2)}\right\}$ *полна в пространстве* $L_2[-1,1]$.

Доказательство проводится аналогично работе [5] на основании работы [9].

Рассмотрим оператор L, порождённый дифференциальными операциями $l\tilde{X} = -\tilde{X}''$ при $x \in (-1,0)$ и $l\tilde{X} = \tilde{X}''$ при $x \in (0,1)$ на множестве функций, абсолютно непрерывных вместе со своей первой производной на $[-1,0)$, $(0,1]$ и удовлетворяющих условиям (2).

Рассмотрим оператор $L-\lambda I = L-\mu^2 I$, где $\lambda \in \mathbb{C}$ не является собственным значением оператора L, и обратим его.

Пусть функция $\tilde{X} \in D(L)$ почти всюду на $G = (-1,1)$ является решением уравнения

$$l\tilde{X} - \mu^2\tilde{X} = f(x), \quad f \in L^2(G). \tag{7}$$

Найдём фундаментальную систему решений однородного уравнения, соответствующего (7):

$$\tilde{X}_1(x) = \exp(i\mu x), \quad \tilde{X}_2(x) = \exp(-i\mu x), \quad x \in (-1,0),$$
$$\tilde{X}_3(x) = \exp(\mu x), \quad \tilde{X}_4(x) = \exp(-\mu x), \quad x \in (0,1).$$

Используя метод вариации произвольных постоянных, получим общее решение уравнения (7) в виде

$$\tilde{X}(x) = C_1\tilde{X}_1(x) + C_2\tilde{X}_2(x) + \int_{-1}^{x} f(\xi)\frac{\tilde{X}_1(x)\tilde{X}_2(\xi) - \tilde{X}_1(\xi)\tilde{X}_2(x)}{\tilde{X}_1'(\xi)\tilde{X}_2(\xi) - \tilde{X}_1(\xi)\tilde{X}_2'(\xi)}d\xi =$$
$$= C_1\exp(i\mu x) + C_2\exp(-i\mu x) + \frac{1}{\mu}\int_{-1}^{x} f(\xi)\sin\mu(x-\xi)d\xi, \quad x \in [-1,0],$$

$$\tilde{X}(x) = C_3\tilde{X}_3(x) + C_4\tilde{X}_4(x) + \int_{x}^{1} f(\xi)\frac{\tilde{X}_3(\xi)\tilde{X}_4(x) - \tilde{X}_3(x)\tilde{X}_4(\xi)}{\tilde{X}_3'(\xi)\tilde{X}_4(\xi) - \tilde{X}_3(\xi)\tilde{X}_4'(\xi)}d\xi =$$
$$= C_3\exp(\mu x) + C_4\exp(-\mu x) + \frac{1}{\mu}\int_{x}^{1} f(\xi)\operatorname{sh}\mu(\xi-x)d\xi, \quad x \in [0,1],$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные. Подставляя найденные функции в условия (2), получим систему уравнений

$$C_1 + C_2 - \frac{1}{\mu}\int_{-1}^{0} f(\xi)\sin(\mu\xi)d\xi = C_3 + C_4 + \frac{1}{\mu}\int_{0}^{1} f(\xi)\operatorname{sh}(\mu\xi)d\xi,$$
$$C_1 i\mu - C_2 i\mu + \int_{-1}^{0} f(\xi)\cos(\mu\xi)d\xi = C_3\mu - C_4\mu - \int_{0}^{1} f(\xi)\operatorname{ch}\mu\xi d\xi,$$
$$C_3 e^{\mu} + C_4 e^{-\mu} = 0, \quad C_1 e^{-i\mu} + C_2 e^{i\mu} = 0,$$

которая имеет следующее решение:

$$C_2 = \frac{1-e^{2\mu}}{\mu A}\left(\int_{-1}^{0} f(\xi)\cos(\mu\xi)d\xi + \int_{0}^{1} f(\xi)\operatorname{ch}(\mu\xi)d\xi\right) +$$
$$+ \frac{1+e^{2\mu}}{\mu A}\left(\int_{-1}^{0} f(\xi)\sin(\mu\xi)d\xi + \int_{0}^{1} f(\xi)\operatorname{sh}(\mu\xi)d\xi\right),$$

$$C_3=\frac{1-e^{2i\mu}}{\mu A}\left(\int_{-1}^{0}f(\xi)\cos(\mu\xi)d\xi+\int_0^1 f(\xi)\operatorname{ch}(\mu\xi)d\xi\right)-\\ -\frac{i(1+e^{2\mu})}{\mu A}\left(\int_{-1}^{0}f(\xi)\sin(\mu\xi)d\xi+\int_0^1 f(\xi)\operatorname{sh}(\mu\xi)d\xi\right),$$

$$C_4=-C_3\,e^{2\mu},\qquad C_1=-C_2\,e^{2i\mu},$$

где $A=(1+e^{2\mu})(1-e^{2i\mu})+i(1+e^{2i\mu})(1-e^{2\mu})$. Тогда решение для $x\in[-1,0]$ имеет вид

$$\mu\tilde{X}(x)=\frac{1-e^{2\mu}}{A}\left(\int_{-1}^{0}f(\xi)\cos(\mu\xi)d\xi+\int_0^1 f(\xi)\operatorname{ch}(\mu\xi)d\xi\right)\left(e^{-i\mu x}-e^{2i\mu+i\mu x}\right)+\\ +\frac{1+e^{2\mu}}{A}\left(\int_{-1}^{0}f(\xi)\sin(\mu\xi)d\xi+\int_0^1 f(\xi)\operatorname{sh}(\mu\xi)d\xi\right)\left(e^{-i\mu x}-e^{2i\mu+i\mu x}\right)+\\ +\int_{-1}^{x}f(\xi)\sin(\mu(x-\xi))d\xi \quad (8)$$

и для $x\in[0,1]$ соответственно,

$$\mu\tilde{X}(x)=\frac{1-e^{2i\mu}}{A}\left(\int_{-1}^{0}f(\xi)\cos(\mu\xi)d\xi+\int_0^1 f(\xi)\operatorname{ch}(\mu\xi)d\xi\right)\left(e^{\mu x}-e^{2\mu-\mu x}\right)-\\ -\frac{i(1+e^{2i\mu})}{A}\left(\int_{-1}^{0}f(\xi)\sin(\mu\xi)d\xi+\int_0^1 f(\xi)\operatorname{sh}(\mu\xi)d\xi\right)\left(e^{\mu x}-e^{2\mu-\mu x}\right)+\\ +\int_{x}^{1}f(\xi)\operatorname{sh}(\mu(\xi-x))d\xi. \quad (9)$$

Преобразуем (8) следующим образом:

$$\mu\tilde{X}(x)=\frac{e^{-i\mu x}-e^{2i\mu+i\mu x}}{A}\int_0^1 f(\xi)(e^{\mu\xi}-e^{2\mu-\mu\xi})d\xi+\int_{-1}^{x}f(\xi)\sin(\mu(x-\xi))d\xi+\\ +\frac{e^{-i\mu x}-e^{2i\mu+i\mu x}}{A}\left[(1-e^{2\mu})\int_{-1}^{0}f(\xi)\cos\mu\xi d\xi+(1+e^{2\mu})\int_{-1}^{0}f(\xi)\sin\mu\xi d\xi\right]=\\ =\frac{e^{-i\mu x}-e^{2i\mu+i\mu x}}{A}\int_0^1 f(\xi)(e^{\mu\xi}-e^{2\mu-\mu\xi})d\xi+\int_{-1}^{x}f(\xi)\sin(\mu(x-\xi))d\xi+\\ +\frac{e^{-i\mu x}-e^{2i\mu+i\mu x}}{A}\left[(1-e^{2\mu})\int_{-1}^{x}f(\xi)\cos\mu\xi d\xi+(1+e^{2\mu})\int_{-1}^{x}f(\xi)\sin\mu\xi d\xi\right]+\\ +\frac{e^{-i\mu x}-e^{2i\mu+i\mu x}}{A}\left[(1-e^{2\mu})\int_{x}^{0}f(\xi)\cos\mu\xi d\xi+(1+e^{2\mu})\int_{x}^{0}f(\xi)\sin\mu\xi d\xi\right].$$

Сгруппируем в последней сумме слагаемые с интегралами от -1 до x, тогда получим

$$\mu\tilde{X}(x)=\frac{e^{-i\mu x}-e^{2i\mu+i\mu x}}{A}\int_0^1 f(\xi)(e^{\mu\xi}-e^{2\mu-\mu\xi})d\xi+$$

$$+\frac{(1-e^{2\mu})(e^{i\mu x}+e^{-i\mu x})-i(1+e^{2\mu})(e^{i\mu x}-e^{-i\mu x})}{2A}\int_{-1}^{x} f(\xi)(e^{-i\mu\xi}-e^{2i\mu+i\mu\xi})d\xi+$$
$$+\frac{e^{-i\mu x}-e^{2i\mu+i\mu x}}{A}\left[(1-e^{2\mu})\int_{x}^{0} f(\xi)\cos\mu\xi d\xi+\right.$$
$$\left.+(1+e^{2\mu})\int_{x}^{0} f(\xi)\sin\mu\xi d\xi\right],\quad x\in[-1{,}0]. \quad (10)$$

Найдём оценку решения $\mu\tilde{X}(x)$ в полуплоскости $\mathrm{Im}\mu<0$. Пусть $\mu=\mu_1+$ $+i\mu_2$, $\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R}$. Оценим модули выражений из (10) при $\mu_2<0$. В таблице ниже приведены оценки роста указанных величин для $\mu_1>0$ и $\mu_1<0$.

№	Выражение	$\mu_1>0,\ \mu_2<0$	$\mu_1<0,\ \mu_2<0$
1	$e^{-i\mu x}-e^{2i\mu+i\mu x}$, $x<0$	$Ce^{-\mu_2(2+x)}$	$Ce^{-\mu_2(2+x)}$
2	A	$Ce^{2\mu_1-2\mu_2}$	$Ce^{-2\mu_2}$
3	$e^{\mu\xi}-e^{2\mu-\mu\xi}$, $\xi>0$	$Ce^{\mu_1(2-\xi)}$	$Ce^{\mu_1\xi}$
4	$\int_0^1 f(\xi)(e^{\mu\xi}-e^{2\mu-\mu\xi})d\xi$	$Ce^{2\mu_1}$	C
5	$e^{2\mu}$	$Ce^{2\mu_1}$	$Ce^{2\mu_1}$
6	$\cos\mu\xi$, $\sin\mu\xi$, $\xi<0$	$Ce^{\mu_2\xi}$	$Ce^{\mu_2\xi}$
7	$\int_x^0 f(\xi)\cos(\mu\xi)d\xi$, $\int_x^0 f(\xi)\sin(\mu\xi)d\xi$	$Ce^{\mu_2 x}$	$Ce^{\mu_2 x}$
8	$e^{-i\mu\xi}-e^{2i\mu+i\mu\xi}$, $\xi\leqslant 0$	$Ce^{-\mu_2(2+\xi)}$	$Ce^{-\mu_2(2+\xi)}$
9	$\int_{-1}^x f(\xi)(e^{-i\mu\xi}-e^{2i\mu+i\mu\xi})d\xi$	$Ce^{-\mu_2(2+x)}$	$Ce^{-\mu_2(2+x)}$
10	$e^{i\mu x}\pm e^{-i\mu x}$, $-1\leqslant x\leqslant 0$	$Ce^{\mu_2 x}$	$Ce^{\mu_2 x}$

С учётом полученных оценок можно убедиться, что все слагаемые, входящие в (10), ограничены, более того, являются убывающими. Поэтому для решения (10) справедлива оценка

$$|\mu\tilde{X}(x)|\leqslant C=\mathrm{const}, \quad (11)$$

равномерная по μ при $\mu_2<0$ и $x\in[-1,0]$,

Аналогично преобразуем (9) к виду

$$\mu\tilde{X}(x)=\frac{e^{\mu x}-e^{2\mu-\mu x}}{A}\int_{-1}^{0} f(\xi)(e^{-i\mu\xi}-e^{2i\mu+i\mu\xi})d\xi+$$
$$+\frac{(1-e^{2i\mu})(e^{\mu x}+e^{-\mu x})-i(1+e^{2i\mu})(e^{\mu x}-e^{-\mu x})}{2A}\int_{x}^{1} f(\xi)(e^{\mu\xi}-e^{2\mu-\mu\xi})d\xi+$$
$$+\frac{e^{\mu x}-e^{2\mu-\mu x}}{A}\left[(1-e^{2i\mu})\int_{0}^{x} f(\xi)\,\mathrm{ch}\,\mu\xi d\xi-\right.$$
$$\left.-i(1+e^{2i\mu})\int_{0}^{x} f(\xi)\,\mathrm{sh}\,\mu\xi d\xi\right],\quad x\in[0,1]. \quad (12)$$

Аналогично найдём оценку решения (12). В следующей ниже таблице приведены оценки роста модулей выражений, входящих в (12), при $\mu_2<0$ ($\mu_1>0$

и $\mu_1 < 0$). Таким образом, справедлива оценка (11), равномерная по μ при $\mu_2 < 0$ и $x \in [0, 1]$.

№	Выражение	$\mu_1 > 0,\ \mu_2 < 0$	$\mu_1 < 0,\ \mu_2 < 0$
1	$e^{\mu x} - e^{2\mu - \mu x}$, $x > 0$	$Ce^{\mu_1(2-x)}$	$Ce^{\mu_1 x}$
2	A	$Ce^{2\mu_1 - 2\mu_2}$	$Ce^{-2\mu_2}$
3	$e^{-i\mu\xi} - e^{2i\mu + i\mu\xi}$, $\xi < 0$	$Ce^{-\mu_2(2+\xi)}$	$Ce^{-\mu_2(2+\xi)}$
4	$\int_{-1}^{0} f(\xi)(e^{-i\mu\xi} - e^{2i\mu + i\mu\xi})d\xi$	$Ce^{-2\mu_2}$	$Ce^{-2\mu_2}$
5	$e^{2i\mu}$	$Ce^{-2\mu_2}$	$Ce^{-2\mu_2}$
6	$\operatorname{ch}\mu\xi$, $\operatorname{sh}\mu\xi$, $\xi > 0$	$Ce^{\mu_1\xi}$	$Ce^{-\mu_1\xi}$
7	$\int_{x}^{0} f(\xi)\operatorname{ch}(\mu\xi)d\xi$, $\int_{0}^{x} f(\xi)\operatorname{sh}(\mu\xi)d\xi$	$Ce^{\mu_1 x}$	$Ce^{-\mu_1 x}$
8	$e^{\mu\xi} - e^{2\mu - \mu\xi}$, $\xi \geqslant 0$	$Ce^{\mu_1(2-\xi)}$	$Ce^{\mu_1\xi}$
9	$\int_{x}^{1} f(\xi)(e^{\mu\xi} - e^{2\mu - \mu\xi})d\xi$	$Ce^{\mu_1(2-x)}$	$Ce^{\mu_1 x}$
10	$e^{\mu x} \pm e^{-\mu x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$	$Ce^{\mu_1 x}$	$Ce^{-\mu_1 x}$

Итак, для решения уравнения (7), удовлетворяющего условиям (2), справедлива оценка (11), равномерная по μ при $\mu_2 < 0$ и $x \in [-1, 1]$.

Аналогично работе [9] можно установить, что в окрестности каждого собственного значения ν оператора L для функции $\tilde{X}(x)$ справедливо представление

$$\tilde{X}(x) = -\frac{1}{\lambda - \nu} X(x) \int_{-1}^{1} f(\xi)\overline{Z}(\xi)d\xi + R(x, \lambda), \tag{13}$$

где $X(x)$, $Z(x)$ — собственные функции операторов L и L^*, отвечающие собственному значению ν, а $R(x, \lambda)$ — аналитическая по λ в окрестности точки ν функция.

Пусть $f(x)$ — функция из $L^2(G)$, ортогональная всем собственным функциям $\{Z(x)\}$ оператора L^*. Согласно (13), главная часть резольвенты оператора $L - \lambda I$ обратится в нуль и функция $\tilde{X}(x)$ будет аналитической на всей комплексной плоскости. Но тогда по теореме Фрагмена—Линделефа [10] оценка (11) верна на всей комплексной плоскости (λ), поэтому в силу аналитичности $\tilde{X}(x)$ будем иметь тождество $\tilde{X}(x) \equiv 0$, $x \in \bar{G}$. Тогда из (7) получим, что $f(x) = 0$ на $\bar{G}$.

Таким образом, система $\left\{Z_k^{(1)},\ Z_k^{(2)}\right\}$ полна в пространстве $L_2[-1, 1]$. $\square$

Замечание. Из полноты системы $\{Z_k^{(1)},\ Z_k^{(2)}\}$ в $L_2[-1, 1]$ следует замкнутость системы $\left\{X_k^{(1)},\ X_k^{(2)}\right\}$ в $L_2[-1, 1]$.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14–01–97003-а).

ORCID
Альфира Авкалевна Гималтдинова: http://orcid.org/0000-0001-7535-213X
Ксения Владимировна Курман: http://orcid.org/0000-0001-9586-1089

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гималтдинова А. А., Курман К. В. О полноте одной пары биортогонально сопряженных систем функций / *Четвертая международная конференция «Математическая физика и ее приложения»*: материалы конф.; ред. чл.-корр. РАН И. В. Волович; д.ф.-м.н., проф. В. П. Радченко. Самара: СамГТУ, 2014. С. 122–123.
2. Ильин В. А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // *УМН*, 1960. Т. 15, № 2(92). С. 97–154.
3. Сабитов К. Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // *Докл. РАН*, 2007. Т. 413, № 1. С. 23–26.
4. Сабитов К. Б., Мелишева Е. П. Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области // *Изв. вузов. Матем.*, 2013. № 7. С. 62–76.
5. Ломов И. С. Негладкие собственные функции в задачах математической физики // *Диффер. уравн.*. Т. 47, № 3. С. 358–365.
6. Ломов И. С. Пример разрывного оператора, имеющего разрывный сопряженный. Свойство базисности / *Задачи математической физики и спектральная теория операторов*: Сб. ст. / Научные труды/ Московский энергетический ин-т, Т. 215. М.: МЭИ, 1989. С. 46–50.
7. Митрохин С. И. *Спектральная теория операторов: гладкие, разрывные суммируемые коэффициенты.* М.: Интуит, 2009. 364 с.
8. Егоров И. Е. Пятков С. Г., Попов С. В. *Неклассические дифференциально-операторные уравнения.* Новосибирск: Наука, 2000. 336 с.
9. Келдыш М. В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // *УМН*, 1971. Т. 26, № 4(160). С. 15–41.
10. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. *Пространства основных и обобщенных функций.* М.: Наука, 1958. 308 с.

Поступила в редакцию 19/XII/2014;
в окончательном варианте — 18/II/2014;
принята в печать — 25/II/2015.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 1, pp. 7–18

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1385

MSC: 34L10

ON THE COMPLETENESS OF A PAIR OF BIORTHOGONALLY CONJUGATED SYSTEMS OF FUNCTIONS

A. A. Gimaltdinova, K. V. Kurman

[1] Samara State Academy of Social and Humanities,
65/67, M. Gorky st., Samara, 443099, Russian Federation.
[2] Sterlitamak Branch of Bashkir State University,
47 a, Lenin st., Sterlitamak, 453103, Russian Federation.

Abstract

In this paper we studied the spectral problem for an ordinary second order differential equation on a finite interval with a discontinuous coefficient of the highest derivative. At the ends of the segment the boundary conditions of the first kind are given. We found eigenvalues with their asymptotic behavior as the roots of the transcendental equation. The system of eigenfunctions is the trigonometric sine on one half of the segment, and the hyperbolic sine on the other. The system of eigenfunctions is not orthogonal in the space of square integrable functions. The corresponding biorthogonal system of functions was built as a solution to the dual problem. In the proof of the completeness of the biorthogonal system we used well known Keldysh theorem about the completeness of the eigenfunctions system of a nonselfadjoint operator.

Keywords: eigenvalues, eigenfunctions, adjoint problem, complete system of functions.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1385

Acknowledgments. This work has been supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 14–01–97003-a).

ORCID
Alfira A. Gimaltdinova: http://orcid.org/0000-0001-7535-213X
Ksenija V. Kurman: http://orcid.org/0000-0001-9586-1089

How to cite Reference
Gimaltdinova A. A., Kurman K. V. On the completeness of a pair of biorthogonally conjugated systems of functions, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 1, pp. 7–18. doi: 10.14498/vsgtu1385. (In Russian)

Authors Details
Alfira A. Gimaltdinova (Cand. Phys. & Math. Sci.; alfiragimaltdinova@mail.ru; Corresponding Author), Doctoral Candidate, Dept. of Mathematics and methods of teaching.
Ksenija V. Kurman (kseniakurman@yandex.ru), Postgraduate Student, Dept. of Mathematical Analysis.

*This paper is an extended version of the paper [1], presented at the Mathematical Physics and Its Applications 2014 Conference.

REFERENCES

1. Gimaltdinova A. A., Kurman K. V. On the completeness of a pair of biorthogonally conjugated systems of functions, *The 4nd International Conference "Mathematical Physics and its Applications"*, Book of Abstracts and Conference Materials; ред. I. V. Volovich; V. P. Radchenko. Samara, Samara State Technical Univ., 2014, C. 122–123 (In Russian).
2. Il'in V. A. The solvability of mixed problems for hyperbolic and parabolic equations, *Russian Math. Surveys*, 1960, vol. 15, no. 1, pp. 85–142. doi: 10.1070/RM1960v015n02ABEH004217.
3. Sabitov K. B. Dirichlet problem for mixed-type equations in a rectangular domain, *Dokl. Math.*, 2007, vol. 75, no. 2, pp. 193–196. doi: 10.1134/S1064562407020056.
4. Sabitov K. B., Melisheva E. P., *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2013, vol. 57, no. 7, pp. 53–65. doi: 10.3103/S1066369X13070062.
5. Lomov I. S. Nonsmooth eigenfunctions in problems of mathematical physics, *Differ. Equ.*, 2011, vol. 47, no. 3, pp. 355–362. doi: 10.1134/S0012266111030062.
6. Lomov I. S. Example of discontinuous operator with a discontinuous adjoint operator. Basis property, *Zadachi matematicheskoi fiziki i spektral'naia teoriia operatorov* [Problems of Mathematical Physics and Spectral Theory of Operators], Collection of Scientific Papers of Moscow Power Engineering Institute, vol. 215. Moscow, Moscow Power Engineering Inst, 1989, pp. 46–50 (In Russian).
7. Mitrokhin S. I. *Spektral'naia teoriia operatorov: gladkie, razryvnye summiruemye koeffitsienty* [Spectral Theory of Operators: Smooth, Discontinuous, and Integrable Coefficients]. Moscow, Intuit, 2009, 364 pp. (In Russian)
8. Egorov I. E. Pyatkov S. G., Popov S. V. *Neklassicheskie differentsial'no-operatornye uravneniia* [Nonclassical differential-operator equations]. Novosibirsk, Nauka, 2000, 336 pp. (In Russian)
9. Keldysh M. V. On the completeness of the eigenfunctions of some classes of non-selfadjoint linear operators, *Russian Math. Surveys*, 1971, vol. 26, no. 4, pp. 15–44. doi: 10.1070/RM1971v026n04ABEH003985.
10. Gel'fand I. M., Shilov G. E. *Generalized functions*, vol. 2, Spaces of Fundamental and Generalized Functions. New York, London, Academic Press, 1968, viii+261 pp.. doi: 10.1016/B978-1-4832-2977-5.50001-6

Received 19/XII/2014;
received in revised form 18/II/2014;
accepted 25/II/2015.