Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 19, № 1. С. 44–62
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1386

УДК 517.956.25

О РЕШЕНИЯХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕСТЕПЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ*

Л. М. Кожевникова, А. А. Хаджи

Башкирский государственный университет, Стерлитамакский филиал,
Россия, 453103, Стерлитамак, ул. Ленина, 47 а.

Аннотация

В работе выделен некоторый класс анизотропных эллиптических уравнений второго порядка дивергентного вида с младшими членами с нестепенными нелинейностями

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(a_\alpha(\mathbf{x},u,\nabla u))_{x_\alpha} - a_0(\mathbf{x},u,\nabla u) = 0.$$

На каратеодориевы функции, входящие в уравнение, накладывается условие совокупной монотонности. Ограничения на рост функций формулируются в терминах специального класса выпуклых функций. Эти требования обеспечивают ограниченность, коэрцитивность, монотонность и семинепрерывность соответствующего эллиптического оператора. Для рассматриваемых уравнений с нестепенными нелинейностями исследованы качественные свойства решений задачи Дирихле в неограниченных областях $\Omega \subset \mathbb{R}_n$, $n \geqslant 2$. Установлены существование и единственность обобщённых решений в анизотропных пространствах Соболева—Орлича. Кроме того, для произвольных неограниченных областей обобщены теоремы вложения анизотропных пространств Соболева—Орлича. Это позволило доказать глобальную ограниченность решений задачи Дирихле. Использована оригинальная геометрическая характеристика для неограниченных областей, расположенных вдоль выделенной оси. В терминах этой характеристики установлена экспоненциальная оценка скорости убывания на бесконечности решений рассматриваемой задачи с финитными данными.

Ключевые слова: анизотропное эллиптическое уравнение, пространство Соболева—Орлича, нестепенные нелинейности, существование решения, неограниченная область, ограниченность решения, убывание решения.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1386

Образец для цитирования
Кожевникова Л. М., Хаджи А. А. О решениях эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 1. С. 44–62. doi: 10.14498/vsgtu1386.

Сведения об авторах
Лариса Михайловна Кожевникова (д.ф.-м.н., доц.; kosul@gmail.ru; автор, ведущий переписку), профессор, каф. математического анализа.
Анна Александровна Хаджи (anna_5955@mail.ru), старший преподаватель, каф. общенаучных дисциплин.

*Настоящая статья представляет собой расширенный вариант доклада [1], сделанного автором на Четвёртой международной конференции «Математическая физика и её приложения» (Россия, Самара, 25 августа – 1 сентября 2014).

Введение. Пусть Ω — произвольная неограниченная область пространства $\mathbb{R}_n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}_n$, $n \geqslant 2$. Для анизотропного квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка рассматривается задача Дирихле

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (a_\alpha(\mathbf{x}, u, \nabla u))_{x_\alpha} - a_0(\mathbf{x}, u, \nabla u) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \tag{1}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Предполагается, что функции $a_\alpha(\mathbf{x}, p_0, p)$, $\alpha = 0, \ldots, n$, измеримы по $\mathbf{x} \in \Omega$ для $\mathbf{p} = (p_0, p) = (p_0, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}_{n+1}$, непрерывны по $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_{n+1}$ для почти всех $\mathbf{x} \in \Omega$. Ограничения на нелинейные функции $a_\alpha(\mathbf{x}, p_0, p)$, $\alpha = 0, \ldots, n$, формулируются в терминах N-функций, они будут приведены ниже.

В работе исследуются вопросы существования, ограниченности и убывания на бесконечности решений задачи (1), (2) в неограниченных областях Ω.

Существование решений для уравнений вида (1) в ограниченных областях изучалось в работах [2–5]. В нашей работе на каратеодориевы функции, входящие в уравнение, наряду с условием монотонности наложены требования, которые позволяют установить существование единственного обобщённого решения задачи (1), (2) в произвольной неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}_n$.

После нового доказательства теоремы Э. де Джорджи [6] при помощи итерационной техники, данного Ю. Мозером в работе [7], вопросы ограниченности и непрерывности по Гёльдеру обобщённых решений различных классов линейных и квазилинейных эллиптических уравнений с изотропными степенными нелинейностями исследовались в работах С. Н. Кружкова [8], Дж. Серрина [9], Е. М. Ландиса [10] и других авторов.

И. М. Колодий [11] установил ограниченность решений некоторого класса анизотропных эллиптических уравнений со степенными нелинейностями в ограниченных областях. При этом требование ограниченности области является существенным условием в его доказательстве. Для неограниченных областей этот результат был получен в работе [12]. Попытка А. Г. Королёва [13] осуществить дальнейшее распространение техники Мозера на эллиптические дифференциальные уравнения с анизотропными нестепеными нелинейностями содержит досадную ошибку.

Развивая метод априорных оценок для срезок [14, гл. II, § 5, лемма 5.1], В. С. Климов в работе [15] для некоторого вида изотропных эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями доказал глобальную ограниченность решений в ограниченных областях. А. Г. Королёв [16] получил интегральный вариант теоремы вложения для функций из пространства Соболева—Орлича, на его основе он доказал ограниченность решений для некоторого класса анизотропных эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в ограниченных областях. Авторы настоящей статьи наложили требования на структуру уравнения, позволившие установить ограниченность решений в неограниченных областях.

Изучению поведения на бесконечности решений линейных эллиптических уравнений в неограниченных областях посвящены работы О. А. Олейник, Г. А. Иосифьяна [17], Е. М. Ландиса, Г. П. Панасенко, В. А. Кондратьева, И. Копачека, Д. М. Леквеишвили, О. А. Олейник [18], Л. М. Кожевниковой [19], Ф. Х. Мукминова, В. Ф. Гилимшиной [20] и других авторов. В работе [21] Л. М. Кожевниковой, Р. Х. Каримовым для решений квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка установлены оценки сверху и доказана их точность. Л. М. Кожевниковой, А. А. Хаджи [22] этот результат обобщён на некоторый класс анизотропных эллиптических уравнений второго порядка. Для уравнений с нестепенными нелинейностями исследование скорости убывания решений на бесконечности в неограниченных областях ранее не проводилось.

1. Пространства Соболева—Орлича. Приведём необходимые сведения из теории N-функций и пространств Соболева—Орлича [23]. Неотрицательная непрерывная выпуклая вниз функция $M(z)$, $z \in \mathbb{R}_1$ называется N-функцией, если она чётна и

$$\lim_{z\to 0}\frac{M(z)}{z}=0, \qquad \lim_{z\to\infty}\frac{M(z)}{z}=\infty.$$

Отметим, что $M(\varepsilon u) \leqslant \varepsilon M(u)$ при $0<\varepsilon\leqslant 1$. Для N-функции $M(z)$ имеет место интегральное представление

$$M(z)=\int_0^{|z|} m(t)dt,$$

где $m(t)$ — положительная при $t>0$, не убывающая и непрерывная справа функция при $t \geqslant 0$ такая, что

$$m(0)=0, \qquad \lim_{t\to\infty} m(t)=\infty.$$

N-функция

$$\overline{M}(z)=\sup_{y\geqslant 0}(y|z|-M(y))$$

называется дополнительной к N-функции $M(z)$. Известно следующее неравенство Юнга:

$$|zy| \leqslant M(z)+\overline{M}(y), \qquad z,y\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Кроме того, имеет место равенство

$$|z|m(|z|)=\overline{M}(m(|z|))+M(z), \qquad z\geqslant z_0 \quad z\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Для N-функций $P(z)$, $M(z)$ записывают $P(z)\prec M(z)$, если существуют числа $l>0$, $z_0\geqslant 0$ такие, что

$$P(z)\leqslant M(lz).$$

N-функции $P(z)$, $M(z)$ называются сравнимыми, если имеет место одно из соотношений: $P(z)\prec M(z)$ или $M(z)\prec P(z)$. N-функции $P(z)$ и $M(z)$ называются эквивалентными, если $P(z)\prec M(z)$ и $M(z)\prec P(z)$.

N-функция $M(z)$ удовлетворяет Δ_2-условию при больших значениях z, если существуют такие числа $c>0$, $z_0\geqslant 0$, что $M(2z)\leqslant cM(z)$ для любых $z\geqslant z_0$. Δ_2-условие эквивалентно выполнению неравенства

$$M(lz)\leqslant c(l)M(z), \qquad z\geqslant z_0, \tag{5}$$

где l — любое число, большее единицы, $c(l) > 0$.

N-функция $M(z)$ удовлетворяет Δ_2-условию тогда и только тогда, когда существуют положительные числа $c > 1$, $z_0 \geqslant 0$ такие, что при $z \geqslant z_0$ справедливо неравенство

$$zm(z) < cM(z). \tag{6}$$

В каждом классе эквивалентных N-функций, подчиняющихся Δ_2-условию, имеются N-функции, удовлетворяющие неравенству (5) при всех $z \geqslant 0$. В дальнейшем в работе предполагается, что Δ_2-условие для рассматриваемых N-функций выполняется при всех значениях $z \geqslant 0$ (т. е. $z_0 = 0$).

Для N-функции $M(z)$ ввиду выпуклости и неравенства (5) существует $c > 0$ такое, что справедливо неравенство

$$M(y+z) \leqslant cM(z) + cM(y), \quad z, y \geqslant 0. \tag{7}$$

Пусть $Q \subset \mathbb{R}_n$. Классом Орлича $K_M(Q)$, соответствующем N-функции $M(z)$, называется множество измеримых в Q функций v таких, что

$$\int_Q M(v(\mathbf{x}))d\mathbf{x} < \infty.$$

Пространством Орлича $L_M(Q)$ называется линейная оболочка $K_M(Q)$ с нормой Люксембурга

$$\|v\|_{L_M(Q)} = \|v\|_{M,Q} = \inf\left\{k \geqslant 0 \;\middle|\; \int_Q M\Big(\frac{v(\mathbf{x})}{k}\Big)d\mathbf{x} \leqslant 1\right\}.$$

При $Q = \Omega$ будем использовать обозначение $\|\cdot\|_{M,\Omega} = \|\cdot\|_M$. Класс Орлича $K_M(Q)$ совпадает с пространством Орлича $L_M(Q)$ тогда и только тогда, когда $M(z)$ удовлетворяет Δ_2-условию.

Для функций $v \in L_M(Q)$, $u \in L_{\overline{M}}(Q)$ имеют место неравенство Гёльдера

$$\left|\int_Q u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right| \leqslant 2\|v\|_{M,Q}\|u\|_{\overline{M},Q} \tag{8}$$

и неравенство

$$\|v\|_{M,Q} \leqslant \int_Q M(v)d\mathbf{x} + 1. \tag{9}$$

Кроме того, если N-функция $M(z)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то для $v \in L_M(Q)$ справедливы неравенства

$$\int_Q M(v)d\mathbf{x} = \int_Q M\left(\|v\|_{M,Q}\frac{v}{\|v\|_{M,Q}}\right)d\mathbf{x} \leqslant \int_Q M\left(l\frac{v}{\|v\|_{M,Q}}\right)d\mathbf{x} \leqslant$$
$$\leqslant c(l)\int_Q M\left(\frac{v}{\|v\|_{M,Q}}\right)d\mathbf{x} = c(l), \quad l = \max\left(\|v\|_{M,Q}, 1\right). \tag{10}$$

Лемма 1. *Если N-функция $M(z)$ удовлетворяет Δ_2-условию, $v(\mathbf{x})$, $v^i(\mathbf{x}) \in L_M(Q)$, $i = 1, 2, \ldots$, $v^i(\mathbf{x}) \to v(\mathbf{x})$ в $L_M(Q)$, то*

$$\int_Q M(v^i)d\mathbf{x} \to \int_Q M(v)d\mathbf{x}, \quad i \to \infty. \tag{11}$$

Доказательство. Ввиду справедливости Δ_2-условия сходимость по норме равносильна сходимости в среднем [23, гл. II, § 9, теорема 9.4], следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер i_0 такой, что

$$\int_Q M(v^i - v)d\mathbf{x} < \varepsilon, \quad i \geqslant i_0. \tag{12}$$

Сходимость $v^i(\mathbf{x}) \to v(\mathbf{x})$ в $L_M(Q)$ влечёт ограниченность множества $\|v^i\|_{M,Q}$, $i = 1, 2, \ldots$. В свою очередь, из неравенства (10) следует существование числа $C_1 > 0$ такого, что

$$M(v^i) \leqslant C_1, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

Далее, пользуясь формулой Лагранжа, неравенствами (3), (5), для любого $\varepsilon \in (0, 1]$ и фиксированного $\theta \in [0, 1]$ выводим

$$\left|\int_Q (M(v^i) - M(v))d\mathbf{x}\right| \leqslant \int_Q |v^i - v| m(|\theta v^i + (1-\theta)v|)d\mathbf{x} \leqslant$$
$$\leqslant \int_Q \left\{ M\Big(\frac{1}{\varepsilon}(v^i - v)\Big) + \overline{M}\left(\varepsilon m(|\theta v^i + (1-\theta)v|)\right)\right\} d\mathbf{x} \leqslant$$
$$\leqslant \int_Q \left\{ C_2 M(v^i - v) + \varepsilon \overline{M}\left(m(|\theta v^i + (1-\theta)v|)\right)\right\} d\mathbf{x}. \tag{14}$$

Применяя (4), (6), (7), устанавливаем цепочку неравенств

$$\overline{M}\left(m(|\theta v^i + (1-\theta)v|)\right) \leqslant |\theta v^i + (1-\theta)v| m(|\theta v^i + (1-\theta)v|) \leqslant$$
$$\leqslant cM(\theta v^i + (1-\theta)v) \leqslant C_3(M(v^i) + M(v)). \tag{15}$$

Соединяя (14), (15), (13), (12), при $i \geqslant i_0$ получаем неравенства

$$\left|\int_Q \left(M(v^i) - M(v)\right) d\mathbf{x}\right| \leqslant C_2 \int_Q M(v^i - v)d\mathbf{x} + \varepsilon C_3 \int_Q (M(v^i) + M(v))d\mathbf{x} \leqslant C_4\varepsilon.$$

Таким образом, сходимость (11) доказана. □

Пусть $B_1(z), \ldots, B_n(z)$ — N-функции, определим пространство Соболева—Орлича $\overset{\circ}{H}{}^1_B(Q)$ как пополнение $C_0^\infty(Q)$ по норме

$$\|v\|_{\overset{\circ}{H}{}^1_B(Q)} = \sum_{\alpha=1}^n \|v_{x_\alpha}\|_{B_\alpha, Q}.$$

Положим

$$h(t) = t^{-\frac{1}{n}} \left(\prod_{\alpha=1}^n B_\alpha^{-1}(t)\right)^{1/n}$$

и будем предполагать, что

$$\int_0^1 t^{-1} h(t)dt < \infty.$$

Тогда можно определить N-функцию $B^*(z)$ по формуле

$$(B^*)^{-1}(z) = \int_0^{|z|} t^{-1} h(t) dt.$$

Теоремы вложения для пространства $\overset{\circ}{H}{}^1_B(Q)$ установлены в [15, 24]. Приведем теорему вложения А. Г. Королёва [24], доказанную для ограниченных областей Q.

Лемма 2. *Пусть* $v \in \overset{\circ}{H}{}^1_B(Q)$.

1) *Если*

$$\int_1^\infty t^{-1} h(t) dt = \infty, \tag{16}$$

то

$$\|v\|_{B^*,Q} \leqslant A_1 \sum_{\alpha=1}^n \|v_{x_\alpha}\|_{B_\alpha,Q}; \tag{17}$$

2) *если*

$$\int_1^\infty t^{-1} h(t) dt < \infty, \tag{18}$$

то

$$\sup_Q |v| \leqslant A_2 \sum_{\alpha=1}^n \|v_{x_\alpha}\|_{B_\alpha,Q}. \tag{19}$$

Здесь

$$A_1 = \frac{n-1}{n}, \quad A_2 = \int_0^\infty \frac{h(t)}{t} dt.$$

Замечание 1. Лемма 2 справедлива также и для произвольных неограниченных областей $\Omega \subset \mathbb{R}_n$. Действительно, пусть $v(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{H}{}^1_B(\Omega)$, тогда существует последовательность $v^i(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $v^i(\mathbf{x}) \to v(\mathbf{x})$ в $\overset{\circ}{H}{}^1_B(\Omega)$. Записывая неравенства (17), (19) для функций v^i и выполняя предельный переход при $i \to \infty$, установим их и для функции $v \in \overset{\circ}{H}{}^1_B(\Omega)$.

Пример 1. Возьмём $n = 2$, $B_1(z) = z^{[5/4,3/2]}$, $B_2(z) = z^{[5/3,2]}$. Здесь использовано обозначение

$$z^{[a,b]} = \begin{cases} z^a, & z \leqslant 1, \\ z^b, & z > 1. \end{cases}$$

Поскольку

$$h(t) = t^{[1/5,1/12]}, \quad \int_0^1 t^{-1} h(t) dt < \infty, \quad \int_1^\infty t^{-1} h(t) dt = \infty,$$

можно определить функции

$$(B^*)^{-1}(z) = \int_0^{|z|} \frac{t^{[1/5,1/12]}}{t} dt = \begin{cases} 5|z|^{1/5}, & z \leqslant 1 \\ 12|z|^{1/12} - 7, & z > 1, \end{cases}$$

$$B^*(z) = \begin{cases} (z/5)^5, & z \leqslant 5, \\ ((z+7)/12)^{12}, & z > 5. \end{cases}$$

При этом справедливо неравенство (17).

Пример 2. Положим $n = 3$, $B_1(z) = z^{[3/2,7/2]}$, $B_2(z) = z^{[3,7]}$, $B_3(z) = z^{[3,7/3]}$. Поскольку

$$h(t) = t^{[1/9,-1/21]}, \quad \int_0^\infty t^{-1}h(t)dt < \infty,$$

справедливо неравенство (19).

Если N-функция $B^*(z)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то из (5) следует, что определена и конечна функция

$$\Lambda(z) = \sup_{t>0} \frac{B^*(zt)}{B^*(t)}$$

и при всех значениях $t, z \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства

$$B^*(tz) \leqslant B^*(t)\Lambda(z), \quad \Lambda(zt) \leqslant \Lambda(z)\Lambda(t).$$

Приведём еще одну теорему вложения А. Г. Королёва [16], доказанную также для ограниченных областей Q.

Лемма 3. *Пусть* $v \in \overset{\circ}{H}{}^1_B(Q)$, *выполнено условие* (16) *и функции* $B_\alpha(z)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, $B^*(z)$ *удовлетворяют* Δ_2*-условию, тогда справедливо неравенство*

$$\int_Q B^*(v(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \leqslant \chi\left(A_3 \sum_{\alpha=1}^n \int_Q B_\alpha(v_{x_\alpha})d\mathbf{x}\right). \tag{20}$$

Здесь A_3 *зависит от* n, $\chi(z) = z\Lambda(z^{1/n})$, $z \geqslant 0$.

Замечание 2. Лемма 3 справедлива также и для произвольных неограниченных областей $\Omega \subset \mathbb{R}_n$. Действительно, пусть $v(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{H}{}^1_B(\Omega)$, тогда существует последовательность $v^i(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $v^i(\mathbf{x}) \to v(\mathbf{x})$ в $\overset{\circ}{H}{}^1_B(\Omega)$. Применяя лемму 1, имеем

$$\int_\Omega B_\alpha(u^i_{x_\alpha})d\mathbf{x} \to \int_\Omega B_\alpha(u_{x_\alpha})d\mathbf{x}, \quad \alpha = 1, \ldots, n,$$

$$\int_\Omega B^*(u^i)d\mathbf{x} \to \int_\Omega B^*(u)d\mathbf{x}, \quad i \to \infty.$$

Записывая неравенство (20) для функций u^i, пользуясь непрерывностью функции $\chi(z)$, выполняя предельный переход при $i \to \infty$, устанавливаем его и для функции $u \in \overset{\circ}{H}{}^1_B(\Omega)$.

2. Формулировка основных результатов. Пусть существуют неотрицательные функции $\psi_1(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x}) \in L_1(\Omega)$, $\varphi^{-1}(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x}), \varphi_1(\mathbf{x}) \in L_\infty(\Omega)$ такие, что для п. в. $\mathbf{x} \in \Omega$, $\mathbf{p} = (p_0, p)$, $\mathbf{q} = (q_0, q) \in \mathbb{R}_{n+1}$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$, справедливы следующие неравенства:

$$\sum_{\alpha=0}^{n} a_\alpha(\mathbf{x}, p_0, p) p_\alpha \geqslant \varphi(\mathbf{x}) \sum_{\alpha=0}^{n} B_\alpha(p_\alpha) - \psi(\mathbf{x}); \tag{21}$$

$$\sum_{\alpha=0}^{n} \overline{B}_\alpha(a_\alpha(\mathbf{x}, p_0, p)) \leqslant \varphi_1(\mathbf{x}) \sum_{\alpha=0}^{n} B_\alpha(p_\alpha) + \psi_1(\mathbf{x}); \tag{22}$$

$$\sum_{\alpha=0}^{n} (a_\alpha(\mathbf{x}, p_0, p) - a_\alpha(\mathbf{x}, q_0, q))(p_\alpha - q_\alpha) > 0. \tag{23}$$

Здесь $B_0(z), B_1(z), \ldots, B_n(z)$ — N–функции, удовлетворяющие Δ_2-условию. В случае выполнения условия (16) будем считать

$$B_0(z) \prec B^*(z),$$

а при выполнении (18) $B_0(z)$ — произвольная N-функция.

Определим пространство Соболева—Орлича $\overset{\circ}{W}{}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$ как пополнение $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)} = \|u\|_{B_0} + \|u\|_{\overset{\circ}{H}{}^1_{B}(\Omega)}.$$

Определим оператор $\mathbf{B} : \overset{\circ}{W}{}^1_{\mathbf{B}}(\Omega) \to L_1(\Omega)$ формулой

$$\mathbf{B}(v) = B_0(v) + \sum_{\alpha=1}^{n} B_\alpha(v_{x_\alpha}), \quad v \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\mathbf{B}}(\Omega).$$

Пусть $Q \subseteq \Omega$ (Q может совпадать с Ω), для $v \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$ определим функционал $\mathbf{A}(u)$ $\big(u \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)\big)$ равенством

$$(\mathbf{A}(u), v)_Q = \int_Q \left(\sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha(\mathbf{x}, u, \nabla u) v_{x_\alpha} + a_0(\mathbf{x}, u, \nabla u) v \right) d\mathbf{x}. \tag{24}$$

Если $Q = \Omega$, то будем писать $(\mathbf{A}(u), v)_\Omega = (\mathbf{A}(u), v)$. Через $\| \cdot \|_{m,Q}$ будем обозначать норму в пространстве $L_m(Q)$, $1 \leqslant m \leqslant \infty$, при $Q = \Omega$ индекс Q будет опускаться.

Определение 1. *Обобщённым решением задачи* (1), (2) назовём функцию $u(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$(\mathbf{A}(u), v) = 0 \tag{25}$$

для любой функции $v(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$.

Пусть N-функции

$$B_\alpha(z) = \int_0^{|z|} b_\alpha(t) dt$$

кроме Δ_2-условия удовлетворяют требованию

$$\lim_{\lambda\to\infty}\inf_{z>0}\frac{b_\alpha(\lambda z)}{b_\alpha(z)}=\infty,\quad \alpha=0,1,\ldots,n. \tag{26}$$

Пример 3. Легко проверить, что функция

$$B(u)=|u|^a(|\ln|u||+1),\quad a>1,$$

удовлетворяет Δ_2-условию и (26).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (21)–(23), (26), тогда существует единственное решение $u(\mathbf{x})$ задачи (1), (2) и $\mathscr{M}_1>0$ такое, что справедлива оценка*

$$\|\mathbf{B}(u)\|_1\leqslant \mathscr{M}_1\|\psi\|_1. \tag{27}$$

При дополнительном требовании, согласно которому

$$\text{функция } \sum_{\alpha=1}^n a_\alpha(\mathbf{x},p_0,p)p_\alpha \left[\begin{array}{lll}\text{монотонно не убывает} & \text{при} & p_0\geqslant 0,\\ \text{монотонно не возрастает} & \text{при} & p_0<0\end{array}\right], \tag{28}$$

доказана ограниченность решения задачи (1), (2).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (21)–(23), (28), (26), (16), N-функция $B^*(z)$ удовлетворяет Δ_2-условию и*

$$\psi\in L_{l/(l-1)}(\Omega),\quad l\geqslant 1, \tag{29}$$

где l такое, что $t^{1/l-1}\Lambda(t^{1/(ln)})\to 0$ при $t\to 0$. Тогда для обобщённого решения задачи (1), (2) $u(\mathbf{x})$ существует $\mathscr{M}_2>0$ такое, что справедлива оценка

$$\sup_\Omega |u|\leqslant \mathscr{M}_2. \tag{30}$$

Замечание 3. В случае выполнения условия (18) ограниченность решения задачи (1), (2) следует из неравенств (19), (27).

Далее приведём результат для областей, расположенных вдоль выделенной оси Ox_s, $s\in\{1,2,\ldots,n\}$ (область Ω лежит в полупространстве $x_s>0$, сечение $\gamma_r=\{\mathbf{x}\in\Omega\mid x_s=r\}$ не пусто, связно и ограничено при любом $r>0$). Ниже будет использовано следующее обозначение:

$$\Omega_c^d[s]=\{\mathbf{x}\in\Omega\mid c<x_s<d\},$$

при этом значения $c=0,\ d=\infty$ опускаются.

С целью изучения поведения решения задачи (1), (2) при $x_s\to\infty$ определим функции

$$\nu_i(r)=\inf_{v\in C_0^\infty(\Omega)}\sup\left\{z\;\middle|\;\int_{\gamma_r}B_i(zv)d\mathbf{x}'_s\leqslant\int_{\gamma_r}B_i(v_{x_i})d\mathbf{x}'_s\right\}, \tag{31}$$

$$\overline{\nu}_s(x) = \min_{i=\overline{1,n}, i\neq s} \nu_i(x),$$

где $\mathbf{x}'_s = \{x_1, x_2, \ldots, x_{s-1}, x_{s+1}, \ldots, x_n\}$.

Пусть существуют числа $\beta_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, $i \neq s$, $0 < z^* \leqslant \infty$ такие, что

$$B_s(z) \leqslant \sum_{i=1, i\neq s}^{n} \beta_i B_i(z), \quad 0 \leqslant z \leqslant z^*. \tag{32}$$

Предположим, что

$$\operatorname{supp} \psi_1, \psi \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_n \mid x_s < R_0\}, \quad R_0 > 0. \tag{33}$$

В следующей теореме установлена оценка, характеризующая скорость убывания решения при $x_s \to \infty$.

Теорема 3. *Пусть область Ω расположена вдоль оси Ox_s, $s \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и выполнены условия (21)–(23), (26), (32), (33). Если $z^* \neq \infty$, то решение задачи (1)–(2) предполагается ограниченным. Тогда существуют положительные числа κ, $\mathscr{M}$ такие, что при всех $r \geqslant 2R_0$ справедлива оценка*

$$\|\mathbf{B}(u)\|_{1,\Omega_r} \leqslant \mathscr{M} \exp\left(-\kappa \int_{2R_0}^{r} \overline{\nu}^*_s(\rho) d\rho\right), \tag{34}$$

где $\overline{\nu}^*_s(\rho) = \min\{\overline{\nu}_s(\rho), z^*\}$.

3. Существование и единственность обобщённого решения. Обозначим $\|\varphi\|_\infty = \widehat{a}$, $\|1/\varphi\|_\infty = 1/\overline{a}$, $\|\varphi_1\|_\infty = \widehat{a}_1$. Покажем, что определение обобщённого решения задачи (1), (2) корректно. Из условия (22) и неравенства (9) следует оценка

$$\sum_{\alpha=0}^{n} \|a_\alpha(\mathbf{x}, u, \nabla u)\|_{\overline{B}_\alpha} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\alpha=0}^{n} \int_\Omega \overline{B}_\alpha(a_\alpha(\mathbf{x}, u, \nabla u)) d\mathbf{x} + n + 1 \leqslant \widehat{a}_1 \|\mathbf{B}(u)\|_1 + \|\psi_1\|_1 + n + 1. \tag{35}$$

Используя неравенство Гёльдера (8) и оценку (35), для функций $u(\mathbf{x})$, $v(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$ выводим

$$|(\mathbf{A}(u), v)| \leqslant \int_\Omega \left(\sum_{\alpha=1}^{n} |a_\alpha(\mathbf{x}, u, \nabla u)||v_{x_\alpha}| + |a_0(\mathbf{x}, u, \nabla u)||v|\right) d\mathbf{x} \leqslant$$
$$\leqslant 2 \sum_{\alpha=1}^{n} \|a_\alpha(\mathbf{x}, u, \nabla u)\|_{\overline{B}_\alpha} \|v_{x_\alpha}\|_{B_\alpha} + 2\|a_0(\mathbf{x}, u, \nabla u)\|_{\overline{B}_0} \|v\|_{B_0} \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \|v\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)} < \infty. \tag{36}$$

Таким образом, интегралы, входящие в (25), конечны.

Замечание 4. Из условий (26) следует существование $\lambda_0 > 0$ такого, что для любых $\lambda \geqslant \lambda_0$ и любых $z \geqslant 0$ справедливы неравенства

$$b_\alpha(\lambda z) \geqslant 2b_\alpha(z), \quad \alpha = 0, 1, \ldots, n.$$

Последние неравенства обеспечивают выполнение для любых $z \in \mathbb{R}$ условий

$$B_\alpha(z) \leqslant \frac{1}{2\lambda} B_\alpha(\lambda z), \quad \lambda \geqslant \lambda_0, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, n.$$

Тогда, согласно [23, I, § 4, теорема 4.2], N-функции $\overline{B}_\alpha(z)$, $\alpha = 0, 1, \ldots, n$, удовлетворяют Δ_2-условию.

Доказательство теоремы 1. Единственность следует из условия строгой монотонности (23). Полагая в равенстве (25) $v = u$, применяя (21), получаем неравенство (27). Точно так же выводится неравенство

$$\overline{a}\|\mathbf{B}(u)\|_1 \leqslant \|\psi\|_1 + (\mathbf{A}(u), u). \tag{37}$$

По элементу $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$ определим элемент $\mathbf{A}(u) \in \big(\overset{\circ}{W}{}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)\big)'$ равенством (24). Оператор $\mathbf{A}$ определён (см. (36)), проверим условия теоремы Ж. Л. Лионса [25, гл. II, § 2, теорема 2.1].

1) Из неравенств (36), (35), согласно (9), следует слабая ограниченность множества $\{\mathbf{A}(u), u \in \Theta\}$ на ограниченном множестве $\Theta \subset \overset{\circ}{W}{}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$. Тогда $\{\mathbf{A}(u), u \in \Theta\}$ ограничено в $\left(\overset{\circ}{W}{}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)\right)'$, т. е. оператор $\mathbf{A}$ ограничен.

2) Монотонность оператора $\mathbf{A}$ обеспечивается условием (23).

3) Докажем коэрцитивность оператора $\mathbf{A}$. Пользуясь (37), выводим

$$\frac{(\mathbf{A}(u), u)}{\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)}} \geqslant \frac{1}{\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)}} \left(\overline{a}\|\mathbf{B}(u)\|_1 - \|\psi\|_1\right) =$$
$$= \frac{1}{\|u\|_{\overset{\circ}{H}{}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)} + \|u\|_{B_0}} \left(\overline{a}\int_\Omega \left(\sum_{\alpha=1}^{n} B_\alpha(u_{x_\alpha}) + B_0(u)\right) d\mathbf{x} - C_2\right). \tag{38}$$

Далее из условий (26) следует, что для любого $R > 0$ найдётся $\lambda_0 > 0$ такое, что при достаточно больших $\|u\|_{B_0} > \lambda_0$, $\|u_{x_\alpha}\|_{B_\alpha} > \lambda_0$, $\alpha = 1, \ldots, n$, справедливы неравенства

$$b_0(|u|) > Rb_0\Big(\frac{|u|}{\|u\|_{B_0}}\Big), \quad b_\alpha(|u_{x_\alpha}|) > Rb_\alpha\Big(\frac{|u_{x_\alpha}|}{\|u_{x_\alpha}\|_{B_\alpha}}\Big), \ \alpha = 1, \ldots, n. \tag{39}$$

Пусть $\|u^i\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)} \to \infty$ при $i \to \infty$, можно считать, что

$$\|u^i_{x_1}\|_{B_1} + \ldots + \|u^i_{x_n}\|_{B_n} + \|u^i\|_{B_0} > (n+1)\lambda_0, \quad i \geqslant i_0.$$

При каждом $i \geqslant i_0$ найдётся хотя бы одно слагаемое больше λ_0. Пусть для определённости при фиксированном $i \geqslant i_0$ наибольшим является первое слагаемое:

$$\|u^i_{x_1}\|_{B_1} > \lambda_0.$$

Соединяя (38), (6), получаем

$$\frac{(\mathbf{A}(u^i),u^i)}{\|u^i\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)}} \geqslant \frac{\overline{a}}{c}\frac{1}{(n+1)\|u^i_{x_1}\|_{B_1}}\int_\Omega |u^i_{x_1}|b_1(|u^i_{x_1}|)d\mathbf{x}-\frac{C_2}{(n+1)\lambda_0}.$$

Далее, применяя (39), выводим

$$\frac{(\mathbf{A}(u^i),u^i)}{\|u^k\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)}} \geqslant R\frac{C_3}{\|u^i_{x_1}\|_{B_1}}\int_\Omega |u^i_{x_1}|b_1\Big(\frac{|u^i_{x_1}|}{\|u^i_{x_1}\|_{B_1}}\Big)d\mathbf{x}-C_4 \geqslant$$

$$\geqslant RC_3\int_Q B_1\Big(\frac{u^i_{x_1}}{\|u^i_{x_1}\|_{B_1}}\Big)d\mathbf{x}-C_4=RC_3-C_4.$$

Таким образом, ввиду произвольности R и i, $i\geqslant i_0$, установлена коэрцетивность оператора $\mathbf{A}$.

4) Семинепрерывность оператора $\mathbf{A}$ вытекает из непрерывности функций $a_\alpha(\mathbf{x},p_0,p)$, $\alpha=0,1,\dots,n$, по $(p_0,p)\in\mathbb{R}_n$ и теоремы Лебега.

Согласно теореме Ж. Л. Лионса [25, гл. II, § 2, теорема 2.1] существует $u\in\overset{\circ}{W}{}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$ такая, что $\mathbf{A}(u)=\mathbf{0}$. Таким образом, для любого $v\in\overset{\circ}{W}{}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$ справедливо тождество (25). $\square$

4. Ограниченность решения. Доказательство теоремы 2 основано на применении следующей леммы [16].

Лемма 4. *Пусть N-функция $B^*(z)$ удовлетворяет Δ_2-условию, $\mu(t)$ — неотрицательная невозрастающая функция на $[a,\infty)$ такая, что*

$$\mu(h)\leqslant cg_0(\mu(k))/B^*(h-k),\quad h>k>a,$$

где $g_0(t)$, $t\geqslant 0$ — функция, удовлетворяющая условиям

$$g_0(zt)\leqslant g_0(z)g_0(t),\quad t/g_0(t)\to\infty \textit{ при } t\to 0.$$

Тогда существует число $\varrho>0$ такое, что $\mu(a+\varrho)=0$.

Доказательство теоремы 2. Для $k>0$ определим функцию

$$u^{(k)}=\operatorname{sign}u\max(|u|-k,0).$$

Из принадлежности $u\in\overset{\circ}{W}{}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$ следует принадлежность $u^{(k)}\in\overset{\circ}{W}{}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$, кроме того, $u_{x_\alpha}=u^{(k)}_{x_\alpha}$ на множестве $E_k=\{\mathbf{x}\in\Omega\mid |u(\mathbf{x})|\geqslant k\}$. Пользуясь (27), выводим

$$\operatorname{mes}E_kB_0(k)\leqslant\int_{E_k}B_0(u)d\mathbf{x}\leqslant\int_\Omega B_0(u)d\mathbf{x}\leqslant C_1,$$

откуда следует

$$\operatorname{mes}E_k\leqslant\frac{C_1}{B_0(k)}.$$

Из определения множества E_k имеем $u^{(k)}(\mathbf{x})=0$ в $\mathbb{R}_n\setminus E_k$. В (25) положим $v=u^{(k)}$, тогда получим

$$(\mathbf{A}(u),u^{(k)})_{E_k}=0.$$

Из условия (23) следует неравенство

$$(a_0(\mathbf{x},u,\nabla u)-a_0(\mathbf{x},u^{(k)},\nabla u^{(k)}))(u-u^{(k)})\geqslant 0 \quad \text{для} \quad \mathbf{x}\in E_k,$$

из которого несложно установить

$$a_0(\mathbf{x},u,\nabla u)u^{(k)}\geqslant a_0(\mathbf{x},u^{(k)},\nabla u^{(k)})u^{(k)}.$$

Кроме того, из (28) вытекает

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha(\mathbf{x},u,\nabla u^{(k)})u^{(k)}_{x_\alpha}\geqslant \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha(\mathbf{x},u^{(k)},\nabla u^{(k)})u^{(k)}_{x_\alpha}.$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$(\mathbf{A}(u^{(k)}),u^{(k)})_{E_k}\leqslant 0.$$

Далее, применяя (21), выводим соотношение

$$\overline{a}\|\mathbf{B}(u^{(k)})\|_{1,E_k}\leqslant \|\psi\|_{1,E_k},$$

из которого, согласно (29), получаем

$$\int_{E_k}\sum_{\alpha=1}^{n} B_\alpha(u^{(k)}_{x_\alpha})d\mathbf{x}\leqslant \|\mathbf{B}(u^{(k)})\|_{1,E_k}\leqslant$$
$$\leqslant C_2\|\psi\|_{l/(l-1)}(\operatorname{mes} E_k)^{1/l}=C_3(\operatorname{mes} E_k)^{1/l}. \quad (40)$$

Имеет место следующая цепочка неравенств: $\forall h>k$ $E_h\subset E_k$ и

$$B^*(h-k)\operatorname{mes} E_h\leqslant \int_{E_h} B^*(|\,u\,|-k)d\mathbf{x}=\int_{E_h} B^*(u^{(k)})d\mathbf{x}\leqslant \int_{E_k} B^*(u^{(k)})d\mathbf{x}.$$

Тогда из (40), применяя (20), выводим

$$B^*(h-k)\operatorname{mes} E_h\leqslant \chi(C_4(\operatorname{mes} E_k)^{1/l})\leqslant C_5\chi((\operatorname{mes} E_k)^{1/l}).$$

Утверждение теоремы вытекает из леммы 4, применённой к функциям $\mu(t)=$ $=\operatorname{mes} E_t$ и $g_0(t)=\chi(t^{1/l})=t^{1/l}\Lambda(t^{1/(ln)})$. $\square$

5. Убывание решения. Далее будем предполагать, что область Ω расположена вдоль выделенной оси Ox_s, $s\in\{1,2,\ldots,n\}$. Для функций $v(\mathbf{x})\in \overset{\circ}{H}{}^{1}_{B}(\Omega)$ имеет место аналог неравенства Фридрихса:

$$\int_{\Omega^r} B_s\Big(\frac{v(\mathbf{x})}{r}\Big)d\mathbf{x}\leqslant \int_{\Omega^r} B_s(v_{x_s}(\mathbf{x}))d\mathbf{x}, \quad r>0, \tag{41}$$

(см. [26, неравенство (57)]).

Доказательство теоремы 3. Пусть $\theta_+(x)$, $x > 0$ — абсолютно непрерывная функция, равная единице при $x \geqslant r$, нулю при $x \leqslant R_0$, линейная при $x \in [R_0, 2R_0]$ и удовлетворяющая уравнению

$$\theta_+'(x) = \delta \overline{\nu}_s^*(x)\theta_+(x), \quad x \in (2R_0, r), \tag{42}$$

(постоянную δ определим позднее). Решая это уравнение, находим

$$\theta_+(x) = \exp\left(-\delta \int_x^r \overline{\nu}_s^*(\rho)d\rho\right), \quad x \in (2R_0, r),$$

тогда имеем

$$\theta_+'(x) = \frac{\theta_+(2R_0)}{R_0} = \frac{1}{R_0}\exp\left(-\delta \int_{2R_0}^r \overline{\nu}_s^*(\rho)d\rho\right), \quad x \in (R_0,2R_0). \tag{43}$$

Подставив в (25) $v = u\theta_+(x_s)$, получим

$$\int_\Omega \left\{ \left(\sum_{\alpha=1}^n a_\alpha(\mathbf{x}, u, \nabla u)u_{x_\alpha} + a_0(\mathbf{x}, u, \nabla u)u\right)\theta_+(x_s) + \right.$$
$$\left. + a_s(\mathbf{x},u, \nabla u)u\theta_+'(x_s)\right\}d\mathbf{x} = 0.$$

Используя (21), (42), (43), (33) и учитывая, что носители функций θ и ψ, ψ_1 не пересекаются, получим

$$\overline{a}\int_\Omega \theta_+(x_s)\mathbf{B}(u)d\mathbf{x} \leqslant \int_{\Omega^r_{2R_0}} |u||a_s(\mathbf{x}, u, \nabla u)|\delta\overline{\nu}_s^*(x_s)\theta_+(x_s)d\mathbf{x} +$$
$$+ \int_{\Omega^{2R_0}_{R_0}} |u|\,|a_s(\mathbf{x}, u, \nabla u)|\frac{\theta_+(2R_0)}{R_0}d\mathbf{x} = I_1 + I_2. \tag{44}$$

Далее, пользуясь неравенством $\overline{\nu}_s^*(x_s) \leqslant z^*$ и ограниченностью функции $u(\mathbf{x})$ (см. (30)), при помощи (22), (32) в предположении $\frac{\delta}{\varepsilon}\mathscr{M}_2 \leqslant 1$ оценим первый интеграл:

$$I_1 \leqslant \int_{\Omega^r_{2R_0}} \theta_+(x_s)\left(\overline{B}_s(\varepsilon a_s(\mathbf{x}, u, \nabla u)) + B_s\Big(u\overline{\nu}_s^*(x_s)\frac{\delta}{\varepsilon}\Big)\right)d\mathbf{x} \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\Omega^r_{2R_0}} \theta_+(x_s)\Big(\varepsilon\widehat{a}_1\mathbf{B}(u) + \sum_{i=1, i\neq s}^n \beta_i B_i\Big(u\nu_i(x_s)\frac{\delta}{\varepsilon}\Big)\Big)d\mathbf{x}.$$

Выберем теперь $\varepsilon = \overline{a}/(4\widehat{a}_1)$, а также δ так, чтобы

$$\frac{\delta}{\varepsilon} \leqslant \max\{1, \mathscr{M}_2^{-1}\}, \quad \frac{\delta}{\varepsilon}\max_{i=\overline{1,n}, i\neq s}\beta_i \leqslant \frac{\overline{a}}{4}.$$

Тогда, воспользовавшись определением (31) функций ν_i, получим

$$I_1 \leqslant \frac{\overline{a}}{4} \int_{\Omega^r_{2R_0}} \theta_+(x_s)\Bigg(\mathbf{B}(u) + \sum_{i=1, i\neq s}^{n} B_i(u\nu_i)\Bigg) d\mathbf{x} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\overline{a}}{4} \int_{\Omega^r_{2R_0}} \theta_+(x_s)\Bigg(\mathbf{B}(u) + \sum_{i=1, i\neq s}^{n} B_i(u_{x_i})\Bigg) d\mathbf{x} \leqslant \frac{\overline{a}}{2} \int_{\Omega^r_{2R_0}} \theta_+(x_s)\mathbf{B}(u) d\mathbf{x}.$$

Теперь, используя условие (22) и неравенства (41), (5), выводим

$$I_2 \leqslant \theta_+(2R_0) \int_{\Omega^{2R_0}_{R_0}} \left(B_s\Big(\frac{u}{R_0}\Big) + \overline{B}_s(a_s(\mathbf{x}, u, \nabla u))\right) d\mathbf{x} \leqslant$$

$$\leqslant \theta_+(2R_0) \int_{\Omega^{2R_0}} \big(B_s(2u_{x_s}) + \widehat{a}_1 \mathbf{B}(u)\big) d\mathbf{x} \leqslant \theta_+(2R_0) C_1 \|\mathbf{B}(u)\|_{1,\Omega^{2R_0}}.$$

Подставляя в (44) оценки для I_1, I_2 и применяя (27), выводим (34). $\square$

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13–01–00081-а).

ORCID
Лариса Михайловна Кожевникова: http://orcid.org/0000-0002-6458-5998
Анна Александровна Хаджи: http://orcid.org/0000-0003-0979-5893

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кожевникова Л. М., Хаджи А. А. О решениях эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях / *Четвертая международная конференция «Математическая физика и ее приложения»*: материалы конф.; ред. чл.-корр. РАН И. В. Волович; д.ф.-м.н., проф. В. П. Радченко. Самара: СамГТУ, 2014. С. 199–200.
2. Вишик М. И. О разрешимости первой краевой задачи для квазилинейных уравнений с быстрорастущими коэффициентами в классах Орлича // *ДАН СССР*, 1963. Т. 151, № 4. С. 758–761.
3. Дубинский Ю. А. Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях // *Матем. сб.*, 1965. Т. 67(109), № 4. С. 609–642.
4. Donaldson T. Nonlinear elliptic boundary value problems in Orlicz–Sobolev spaces // *J. Diff. Eq.*, 1971. vol. 10, no. 3. pp. 507–528. doi: 10.1016/0022-0396(71)90009-x.
5. Климов В. С. Краевые задачи в пространствах Орлича–Соболева / *Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений*. Ярославль: Ярославский государственный университет, 1976. С. 75–93.
6. De Giorgi E. Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari // *Mem. Acad. Sci. Torino, Serie III*, 1957. vol. 3. pp. 25–43 (In Italian) ; De Giorgi E. On the differentiability and the analiticity of extremals of regular multiple integrals / *Selected papers*; eds. Luigi Ambrosio, Gianni Dal Maso, Marco Forti, Mario Miranda, and Sergio Spagnolo. Berlin, New York: Springer-Verlag, 2006. pp. 149–166.
7. Moser J. A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations // *Comm. Pure Appl. Math.*, 1960. vol. 13, no. 3. pp. 457–468. doi: 10.1002/cpa.3160130308.
8. Кружков С. Н. Априорные оценки и некоторые свойства решений эллиптических и параболических уравнений // *Матем. сб.*, 1964. Т. 65(107), № 4. С. 522–570.

9. Serrin J. Local behavior of solutions of quasi-linear equations // *Acta Math.*, 1964. vol. 111, no. 1. pp. 247–302. doi: 10.1007/BF02391014.
10. Ландис Е. М. Новое доказательство теоремы Е. Де Джорджи / Тр. ММО, Т. 16. М.: Издательство Московского университета, 1967. С. 319–328.
11. Колодий И. М. Об ограниченности обобщенных решений эллиптических дифференциальных уравнений // *Вестн. Моск. унив., Сер. 1.*, 1970. № 5. С. 45–52.
12. Кожевникова Л. М., Хаджи А. А. Ограниченность решений анизотропных эллиптических уравнений второго порядка в неограниченных областях // *Уфимск. матем. журн.*, 2014. Т. 6, № 2. С. 67–77.
13. Королев А. Г. Об ограниченности обобщенных решений эллиптических дифференциальных уравнений с нестепенными нелинеиностями // *Матем. сб.*, 1989. Т. 180, № 1. С. 78–100.
14. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* М.: Наука, 1973. 578 с.
15. Климов В. С. Теоремы вложения для пространств Орлича и их приложения к краевым задачам // *Сиб. матем. журн.*, 1972. Т. 13. С. 334–348.
16. Королев А. Г. Об ограниченности обобщенных решений эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями // *Матем. заметки*, 1987. Т. 42, № 2. С. 244–255.
17. Олейник О. А., Иосифьян Г. А. О поведении на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с некомпактной границей // *Матем. сб.*, 1980. Т. 112(154), № 4(8). С. 588–610.
18. Кондратьев В. А., Копачек И., Леквеишвили Д. М., Олейник О. А. Неулучшаемые оценки в пространствах Гельдера и точный принцип Сен-Венана для решений бигармонического уравнения / *Современные проблемы математики. Дифференциальные уравнения, математический анализ и их приложения*: Сборник статей. Посвящается академику Льву Семеновичу Понтрягину к его семидесятипятилетию / Тр. МИАН СССР, Т. 166, 1984. С. 91–106.
19. Кожевникова Л. М. Поведение на бесконечности решений псевдодифференциальных эллиптических уравнений в неограниченных областях // *Матем. сб.*, 2008. Т. 199, № 8. С. 61–94. doi: 10.4213/sm4235.
20. Гилимшина В. Ф., Мукминов Ф. Х. Об убывании решения неравномерно эллиптического уравнения // *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011. Т. 75, № 1. С. 53–70. doi: 10.4213/im3292.
21. Кожевникова Л. М., Каримов Р. Х. Поведение на бесконечности решений квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка в неограниченных областях // *Уфимск. матем. журн.*, 2010. Т. 2, № 2. С. 53–66.
22. Кожевникова Л. М., Хаджи А. А. Решения анизотопных эллиптических уравнений в неограниченных областях // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. Т. 1(30). С. 90–96. doi: 10.14498/vsgtu1163.
23. Рутицкий Я. Б., Красносельский М. А. *Выпуклые функции и пространства Орлича.* М.: Физматлит, 1958. 587 с.
24. Королев А. Г. Теоремы вложения анизотропных пространств Соболева–Орлича // *Вестн. Моск. унив., Сер. 1.*, 1983. № 1. С. 32–37.
25. Лионс Ж. Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* М.: Мир, 1972. 596 с.
26. Андриянова Э. Р. Оценки скорости убывания решения параболического уравнения с нестепенными нелинейностями // *Уфимск. матем. журн.*, 2014. Т. 6, № 2. С. 3–25.

Поступила в редакцию 15/XII/2014;
в окончательном варианте — 13/II/2015;
принята в печать — 25/II/2015.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 1, pp. 44–62

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1386

MSC: 35J62, 35J25, 35J15

ON SOLUTIONS OF ELLIPTIC EQUATIONS WITH NONPOWER NONLINEARITIES IN UNBOUNDED DOMAINS*

L. M. Kozhevnikova, A. A. Khadzhi

Sterlitamak Branch of Bashkir State University,
47 a, Lenin st., Sterlitamak, 453103, Russian Federation.

Abstract

The paper highlighted some class of anisotropic elliptic equations of second order in divergence form with younger members with nonpower nonlinearities

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(a_\alpha(\mathbf{x},u,\nabla u))_{x_\alpha} - a_0(\mathbf{x},u,\nabla u) = 0.$$

The condition of total monotony is imposed on the Caratheodory functions included in the equation. Restrictions on the growth of the functions are formulated in terms of a special class of convex functions. These requirements provide limited, coercive, monotone and semicontinuous corresponding elliptic operator. For the considered equations with nonpower nonlinearities the qualitative properties of solutions of the Dirichlet problem in unbounded domains $\Omega \subset \mathbb{R}_n$, $n \geqslant 2$ are studied. The existence and uniqueness of generalized solutions in anisotropic Sobolev–Orlicz spaces are proved. Moreover, for arbitrary unbounded domains, the Embedding theorems for anisotropic Sobolev–Orlicz spaces are generalized. It makes possible to prove the global boundedness of solutions of the Dirichlet problem. The original geometric characteristic for unbounded domains along the selected axis is used. In terms of the characteristic the exponential estimate for the rate of decrease at infinity of solutions of the problem with finite data is set.

Keywords: anisotropic elliptic equations, Sobolev–Orlicz space, nonpower nonlinearity, the existence of solution, unbounded domains, boundedness of solutions, decay of solution.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1386

How to cite Reference
Kozhevnikova L. M., Khadzhi A. A. On solutions of elliptic equations with nonpower nonlinearities in unbounded domains, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 1, pp. 44–62. doi: 10.14498/vsgtu1386. (In Russian)

Authors Details
Larisa M. Kozhevnikova (Dr. Phys. & Math. Sci.; kosul@gmail.ru; Corresponding Author), Professor, Dept. of Mathematical Analysis.
Anna A. Khadzhi (anna_5955@mail.ru), Senior Teacher, Dept. of Scientific Disciplines.

*This paper is an extended version of the paper [1], presented at the Mathematical Physics and Its Applications 2014 Conference.

Acknowledgments. This work has been supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 13–01–00081-a).

ORCID
Larisa M. Kozhevnikova: http://orcid.org/0000-0002-6458-5998
Anna A. Khadzhi: http://orcid.org/0000-0003-0979-5893

REFERENCES

1. Kozhevnikova L. M., Khadzhi A. A. On solutions of elliptic equations with nonpower nonlinearities in unbounded domains, *The 4nd International Conference "Mathematical Physics and its Applications"*, Book of Abstracts and Conference Materials; eds. I. V. Volovich; V. P. Radchenko. Samara, Samara State Technical Univ., 2014, pp. 199-200 (In Russian).
2. Vishik M. I. Solvability of the first boundary value problem for quasilinear equations with rapidly increasing coefficients in Orlicz classes, *Sov. Math., Dokl.*, 1963, vol. 4, pp. 1060–1064 (In Russian).
3. Dubinskii Yu. A. Weak convergence for nonlinear elliptic and parabolic equations, *Mat. Sb. (N.S.)*, 1965, vol. 67(109), no. 4, pp. 609–642 (In Russian).
4. Donaldson T. Nonlinear elliptic boundary value problems in Orlicz–Sobolev spaces, *J. Diff. Eq.*, 1971, vol. 10, no. 3, pp. 507–528. doi: 10.1016/0022-0396(71)90009-x.
5. Klimov V. S. Boundary value problems in Orlicz–Sobolev spaces, *Kachestvennye i priblizhennye metody issledovaniia operatornykh uravnenii* [Qualitative methods for investigating operator equation]. Yaroslavl, Yaroslavl State Univ., 1976, pp. 75–93 (In Russian).
6. De Giorgi E. Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari, *Mem. Acad. Sci. Torino, Serie III*, 1957, vol. 3, pp. 25–43 (In Italian) ; De Giorgi E. On the differentiability and the analiticity of extremals of regular multiple integrals, *Selected papers*; eds. Luigi Ambrosio, Gianni Dal Maso, Marco Forti, Mario Miranda, and Sergio Spagnolo. Berlin, New York, Springer-Verlag, 2006, pp. 149–166.
7. Moser J. A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1960, vol. 13, no. 3, pp. 457–468. doi: 10.1002/cpa.3160130308.
8. Kruzhkov S. N. A priori bounds and some properties of solutions of elliptic and parabolic equations, *Mat. Sb. (N.S.)*, 1964, vol. 65(107), no. 4, pp. 522–570 (In Russian).
9. Serrin J. Local behavior of solutions of quasi-linear equations, *Acta Math.*, 1964, vol. 111, no. 1, pp. 247–302. doi: 10.1007/BF02391014.
10. Landis E. M. A new proof of E. De Giorgi's theorem, Tr. Mosk. Mat. Obs., 16. Moscow, MSU, 1967, pp. 319–328 (In Russian).
11. Kolodij I. M. The boundedness of generalized solutions of elliptic differential equations, *Mosc. Univ. Math. Bull.*, 1972, vol. 25, no. 5-6, pp. 31–37.
12. Kozhevnikova L. M., Khadzhi A. A. Boundedness of solutions to anisotropic second order elliptic equations in unbounded domains, *Ufa Math. Journal*, 2014, vol. 6, no. 2, pp. 66–76. doi: 10.13108/2014-6-2-66.
13. Korolev A. G. On boundedness of generalized solutions of elliptic differential equations with nonpower nonlinearities, *Math. USSR-Sb.*, 1990, vol. 66, no. 1, pp. 83–106. doi: 10.1070/SM1990v066n01ABEH001166.
14. Ladyzhenskaya O. A., Ural'tseva N. N. *Linear and quasilinear elliptic equations*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 46. New York, London, Academic Press, 1968, xviii+495 pp.
15. Klimov V. S. Imbedding theorems for Orlicz spaces and their applications to boundary value problems, *Sib. Math. J.*, 1972, vol. 13, pp. 231-240. doi: 10.1007/BF00971611.
16. Korolev A. G. Boundedness of the generalized solutions of elliptic equations with nonpower nonlinearities, *Math. Notes*, 1987, vol. 42, no. 2, pp. 639–645. doi: 10.1007/BF01240452.

17. Oleinik O. A., Iosif'yan G. A. On the behavior at infinity of solutions of second order elliptic equations in domains with noncompact boundary, *Math. USSR-Sb.*, 1981, vol. 40, no. 4, pp. 527–548. doi: 10.1070/SM1981v040n04ABEH001849.
18. Kondrat'ev V. A., Kopáček J., Lekveishvili D. M., Oleĭnik O. A. Sharp estimates in Hölder spaces and precise Saint-Venant principle for solutions of the biharmonic equation, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1986, vol. 166, pp. 97–116.
19. Kozhevnikova L. M. Behaviour at infinity of solutions of pseudodifferential elliptic equations in unbounded domains, *Sb. Math.*, 2008, vol. 199, no. 8, pp. 1169–1200. doi: 10.1070/SM2008v199n08ABEH003958.
20. Gilimshina V. F. On the decay of solutions of non-uniformly elliptic equations, *Izv. Math.*, 2011, vol. 75, no. 1, pp. 53–71. doi: 10.1070/IM2011v075n01ABEH002527.
21. Karimov R. Kh., Kozhevnikova L. M. Behavior on infinity of decision quasilinear elliptical equations in unbounded domain, *Ufimsk. Mat. Zh.*, 2010, vol. 2, no. 2, pp. 53–66 (In Russian).
22. Kozhevnikova L. M., Khadzhi A. A. Solutions of anisotropic elliptic equations in unbounded domains, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2013, vol. 1(30), pp. 90–96 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1163.
23. Krasnosel'skij M. A.; Rutitskij Ya. B. *Convex functions and Orlicz spaces.* Groningen, P. Noordhoff Ltd., 1961, ix+249 pp.
24. Korolev A. G. Embedding theorems for anisotropic Sobolev–Orlicz spaces, *Mosc. Univ. Math. Bull.*, 1983, vol. 38, no. 1, pp. 37–42.
25. Lions J. L. *Some methods in the mathematical analysis of systems and their control.* Beijing, China, Science Press; New York: Gordon and Breach, Science Publishers, Inc, 1981, xxiii+542 pp.
26. Andriyanova E. R. Estimates of decay rate for solution to parabolic equation with non-power nonlinearities, *Ufa Math. Journal*, 2014, vol. 6, no. 2, pp. 3–24. doi: 10.13108/2014-6-2-3.

Received 15/XII/2014;
received in revised form 13/II/2015;
accepted 25/II/2015.