Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 19, № 1. С. 63–77
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1369

УДК 517.982.2:517.927

КРАТНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ЗАДАЧА ВАЛЛЕ ПУССЕНА*

В. В. Напалков[1], ***А. У. Муллабаева***[2]

[1] Институт математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра Российской академии наук,
Россия, 450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112.
[2] Башкирский государственный университет,
Россия, 450074, Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

Аннотация

Получено решение кратной интерполяционной задачи Валле Пуссена оператора обобщенной свертки. Основное внимание уделено доказательству секвенциальной достаточности множества решений характеристического уравнения оператора обобщенной свертки. В обобщенном пространстве Баргмана—Фока сопряженным оператором к оператору умножения на переменную z является оператор обобщенного дифференцирования. С помощью этого оператора вводятся операторы обобщенного сдвига и обобщенной свертки. С применением цепочки эквивалентных утверждений получено, что кратная интерполяционная задача Валле Пуссена разрешима тогда и только тогда, когда сюръективна композиция оператора обобщенной свертки с умножением на фиксированную целую функцию $\psi(z)$. Нули функции $\psi(z)$ являются узлами интерполяции. Сюръективность композиции оператора обобщенной свертки с умножением сводится к доказательству секвенциальной достаточности множества нулей характеристической функции оператора обобщенной свертки в множестве решений обобщенного оператора свертки с характеристической функцией $\psi(z)$. При доказательстве секвенциальной достаточности возникла необходимость рассмотрения отношений собственной функции при различных значениях μ_i. Собственные функции с большим значением μ_i уходят на бесконечность быстрее, нежели собственные функции с меньшим значением при z, стремящимся к бесконечности. При одинаковых значениях μ_i производная собственной функции большего порядка уходит на бесконечность быстрее, чем производная меньших порядков. Существенную роль играет тот факт, что ядро оператора обобщенной свертки с характеристической функцией $\psi(z)$ представляет конечную сумму собственных функций и ее производных. С использованием разложения Фишера, теоремы Дьедонне—Шварца и теоремы Майкла о су-

Образец для цитирования
Напалков В. В., Муллабаева А. У. Кратная интерполяционная задача Валле Пуссена // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 1. С. 63–77. doi: 10.14498/vsgtu1369.

Сведения об авторах
Валентин Васильевич Напалков (д.ф.-м.н., проф., чл. корр. РАН; shaig@anrb.ru), директор института.
Айгуль Ураловна Муллабаева (mullabaeva.87@mail.ru; автор, ведущий переписку), аспирант, каф. теории функций и функционального анализа.

*Настоящая статья представляет собой расширенный вариант доклада [1], сделанного авторами на Четвёртой международной конференции «Математическая физика и её приложения» (Россия, Самара, 25 августа – 1 сентября 2014).

ществовании непрерывного правого обратного получено, что если нули характеристической функции оператора обобщенной свертки расположены на положительной вещественной оси в порядке возрастания, то кратная интерполяционная задача Валле Пуссена разрешима в узлах интерполяции.

Ключевые слова: оператор обобщенной свертки, собственная функция оператора обобщенного дифференцирования, представление Фишера, секвенциально достаточное множество, задача Валле Пуссена, узлы интерполяции.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1369

Введение. Многоточечная задача Валле Пуссена [2] — задача отыскания решения обыкновенного дифференциального уравнения n-ного порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \quad x \in [a, b],$$

которое в заданных точках принимает заданные значения

$$y(x_i) = c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad x_i \in [a, b].$$

Считается, что узлы интерполяции занумерованы в порядке возрастания: $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Задача Валле Пуссена (ее также называют многоточечной краевой задачей) для обыкновенных дифференциальных уравнений для конечного числа нулей интенсивно изучалась, например, Ш.-Ж. Валле Пуссеном, Дж. Сансоне, Ю. В. Покорным, А. Ю. Левиным, Е. С. Чичкиным, И. Т. Кигурадзе, В. Я. Дерр и другими [2, 4–11].

Многоточечная задача Валле Пуссена для оператора свертки в случае бесконечного числа узлов интерполяции рассмотрена в работах В. В. Напалкова и его учеников: А. А. Нуятова, К. Р. Зименс, С. Г. Мерзлякова, С. В. Попенова [12–19].

В данной статье рассматривается оператор обобщенной свертки, порожденный оператором обобщенного дифференцирования, который существенно отличается от классического оператора дифференцирования [14, 15, 19].

Пусть $H(\mathbb{C})$ — пространство целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах, $H^*(\mathbb{C})$ — пространство линейных непрерывных функционалов.

В работе [12] рассматривалось обобщенное пространство Баргмана—Фока

$$F_{\alpha,\beta} = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|^2 = \frac{\alpha^{2/\beta}}{\pi \frac{2}{\beta} \Gamma\left(\frac{2}{\beta}\right)} \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-\alpha|z|^\beta} d\mu < \infty \right\},$$

где $d\mu$ — мера Лебега на плоскости, а $\beta > 0$ характеризует порядок функций этого пространства, $\alpha > 0$ — тип.

Главную роль при доказательстве основного результата сыграло введение оператора свертки в пространстве целых функций произвольного положительного порядка β и конечного типа.

В работе [12] мы ввели оператор обобщенного сдвига следующим образом: для любой целой функции $f(z) \in H(\mathbb{C})$ оператором обобщенного сдвига по t

называется оператор

$$S_t f(z) = f(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^n f(z)}{m_1 m_2 \dots m_n} t^n.$$

Рассмотрим в пространстве $H(\mathbb{C})$ оператор обобщенной свертки [12, с. 206], порожденный функционалом F, с характеристической функцией $\widehat{F}(z) = \varphi(z)$:

$$M_\varphi[f](z) = (F_t, S_t f(z)),$$

где $f \in H(\mathbb{C})$, F, $S \in H^*(\mathbb{C})$.

В работе [12] рассматривался оператор обобщенной свертки, и задача Валле Пуссена была решена для случая простых нулей характеристической функции оператора.

Рассмотрим кратную интерполяционную задачу. Пусть задана целая функция $\psi(z)$ с нулями $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$ на положительной оси, пронумерованными в порядке возрастания с соответствующими кратностями n_i. Рассмотрим произвольную последовательность комплексных чисел a_i^j, $i = 1, 2, \dots$; $j = 0, 1, \dots, n_i - 1$.

Задача Валле Пуссена для оператора обобщенной свертки ставится следующим образом: найти решение уравнения

$$M_\varphi[f](z) = 0$$

такое, что

$$f^{(j)}(\mu_i) = a_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n_i - 1.$$

1. Решение задачи Валле Пуссена. Введем множество

$$P_\beta = \Big\{ \varphi(\lambda) \in H(\mathbb{C}) : \quad |\varphi(\lambda)| \leqslant B_1(\varphi) e^{B_2(\varphi)|\lambda|^{\beta/2}} \Big\},$$

$B_1(\varphi)$, $B_2(\varphi) = \mathrm{const} < \infty$ зависят от φ — для каждого φ свои константы.

Рассмотрим нормированные весовые пространства

$$B_n = \Big\{ f(z) \in P_\beta : \|f\|_n = \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| e^{-n|z|^{\beta/2}} < \infty \Big\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что

$$P_\beta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n.$$

Введем в пространстве P_β топологию индуктивного предела (см. [20, с. 402; 21, с. 424])

$$P_\beta = \lim_{n \to \infty} \operatorname{ind} B_n.$$

Отметим важное свойство этой топологии: счетная последовательность функций $f_m(z)$, $m = 1, 2, \dots$, из P_β стремится к нулю при $m \to \infty$ в топологии

пространства P_β тогда и только тогда, когда найдутся числа $\sigma > 0$ и $M > 0$ такие, что
$$|f_m(z)| \leqslant Me^{\sigma|z|^{\beta/2}}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$
и для любого компакта $K_\mathbb{C}$
$$f_m(z) \rightrightarrows 0, \quad m \to \infty \quad \text{на} \quad K_\mathbb{C}.$$

Здесь P_β — пространство целых функций порядка не выше $\beta/2$, $\beta > 0$ и конечного типа [12, 13].

Определение 1 [22]. Пара функций $(\varphi(z), \psi(z))$ называется *парой Фишера*, если пространство $H(\mathbb{C})$ можно представить в виде
$$H(\mathbb{C}) = \ker M_\varphi \oplus \psi \cdot H(\mathbb{C}). \tag{1}$$

В этом случае равенство (1) называется *разложением Фишера*. Если $H(\mathbb{C})$ представимо в виде
$$H(\mathbb{C}) = \ker M_\varphi + \psi \cdot H(\mathbb{C}), \tag{2}$$
то равенство (2) называется *представлением Фишера*.

В этом случае любая целая функция представима в виде
$$f(z) = f_1(z) + f_2(z), \quad f_1(z) \in \ker M_\varphi, \quad f_2(z) \in \psi \cdot H(\mathbb{C}),$$
вообще говоря, не единственным образом.

Пусть последовательность $N_\varphi = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ нулей функции $\varphi(z) \in P_\beta$ положительна и пронумерована в порядке возрастания: $\lambda_k < \lambda_{k+1}$.

Пусть последовательность $N_\psi = \{\mu_i\}_{i=1}^\infty$ нулей функции $\psi(z) \in H(\mathbb{C})$ положительна и пронумерована в порядке возрастания: $\mu_i < \mu_{i+1}$. Предполагаем, что μ_i — корень кратности n_i.

Отметим, что равенство (2) позволяет решать многоточечную задачу Валле Пуссена в классе $\ker M_\varphi$, а именно верна следующая теорема.

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны*:
1. *Многоточечная задача Валле Пуссена для M_φ с данными на N_ψ разрешима.*
2. *Имеет место представление Фишера.*

Доказательство аналогично [19, с. 166].

Наряду с оператором $M_\varphi[f](z)$ введем линейный и непрерывный оператор
$$M_\varphi[\psi(z)y(z)]: \quad H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C}). \tag{3}$$

Лемма 1 [6, Лемма 5]. *Равенство* (2) *эквивалентно сюръективности оператора* (3).

Рассмотрим линейный непрерывный оператор обобщенной свертки $K_\psi[l]$: $P_\beta \to P_\beta$ с характеристической функцией $\psi(z)$, действующий по правилу
$$K_\psi[\varphi](z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \psi(\xi)y(z\xi)g_F(\xi)d\xi, \tag{4}$$

где $g_F(\xi)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $\varphi(z)$, C — замкнутый контур, охватывающий все особые точки $g_F(\xi)$.

Пусть $E = \ker K_\psi[l]$ — конечная линейная комбинация собственных функций и ее производных [13, теорема 2].

Как отмечалось выше, оператор $M_\varphi[\psi\cdot]$ линейно и непрерывно действует из пространства $H(\mathbb{C})$ в $H(\mathbb{C})$, тогда сопряженный оператор $M^*_\varphi[\psi\cdot]$ действует из $H^*(\mathbb{C})$ в $H^*(\mathbb{C})$ линейно и непрерывно. Поскольку пространства $H^*(\mathbb{C})$ и P_β топологически изоморфны [12], то оператор $M^*_\varphi[\psi\cdot]$ порождает линейный и непрерывный оператор $\widehat{M^*_\varphi[\psi\cdot]}$: $P_\beta \to P_\beta$. Нетрудно видеть, что оператор $\widehat{M^*_\varphi[\psi\cdot]}$ действует по правилу:

$$\text{если } G(z) \in P_\beta, \text{ то} \quad \widehat{M^*_\varphi[\psi \cdot G]}(\lambda) = K_\psi[\varphi(z)G(z)](\lambda),$$

где K_ψ — оператор вида (4). Информацию об операторе $M_\varphi[\psi\cdot]$ можно найти в работах [19, с. 166; 23]. Так как $H(\mathbb{C})$ — пространство Фреше, то в силу теоремы Дьедонне—Шварца [24] получаем следующий результат.

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения*:

1. *Замкнутость* $\operatorname{im} M_\varphi[\psi\cdot]$ *в* $H(\mathbb{C})$ *эквивалентна замкнутости* $\operatorname{im} K_\psi[\varphi\cdot]$ *в* P_β.
2. *Инъективность* $K_\psi[\varphi\cdot]$ *эквивалентна всюду плотности образа оператора* $M_\varphi[\psi\cdot]$ *в* $H(\mathbb{C})$.

Введем понятие секвенциальной достаточности множества $L \subset \mathbb{C}$ в некотором подпространстве Q пространства P_β с индуцированной из P_β топологией.

Определение 2. Будем говорить, что L — *секвенциально достаточное множество в* Q, если из выполнения следующих условий:

1) для любой последовательности функций $q_k(z) \in Q$ найдутся числа $\sigma > 0$ и $M > 0$ такие, что

$$|q_k(z)| \leqslant M e^{\sigma|z|^{\frac{\beta}{2}}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in L;$$

2) для любого компакта $K_L \subset L$: $q_k(z) \rightrightarrows 0$, $k \to \infty$ на K_L

вытекает сходимость этой последовательности на пространстве Q.

Теорема 3. *Если* N_φ — *секвенциально достаточное множество в пространстве* E, *то оператор* $K_\psi[\varphi\cdot]$ *инъективен и* $\operatorname{im} K_\psi[\varphi\cdot]$ *замкнут в* P_β.

Доказательство такое же, как и в [19].

Из приведенных выше теорем лемм, получаем следующий результат.

Теорема 4. *Пусть* $\varphi \in P_\beta$ — *характеристическая функция оператора* M_φ, $\psi \in H(\mathbb{C})$ *и* N_φ *является секвенциально достаточным множеством в* E, *тогда разрешима многоточечная задача Валле Пуссена для* M_φ *с данными на* N_ψ.

Покажем, что справедливо условие секвенциальной достаточности.

2. Вспомогательные леммы. При доказательстве того, что множество N_φ — секвенциально достаточное, нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 2. *Предел отношения производных собственных функций оператора обобщенного дифференцирования вдоль вещественной оси равен*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y^{(r)}(\mu x)}{y^{(n)}(\mu x)}=0 \text{ при } r<n.$$

Доказательство. Для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ существует число $L(\varepsilon)$, начиная с которого

$$\frac{\mu^{n-r}}{(l-r+1)\dots(l-n+2)}<\varepsilon.$$

Рассмотрим отношение $y^{(r)}(\mu x)/y^{(n)}(\mu x)$. Разложение в ряд n-ной производной имеет вид:

$$y_\mu^{(n)}(\mu x)=x^n\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{m_1m_2\dots m_k}(\mu x)^{k-n}.$$

Зафиксируем некоторое целое число $l>L(\varepsilon)$ и выделим из числителя и знаменателя многочлены $(l-1)$-й степени:

$$\frac{y^{(r)}(\mu x)}{y^{(n)}(\mu x)}=\frac{Q_{l-1}(\mu x)+\sum_{k=l}^{\infty}\frac{k(k-1)\dots(k-r+1)}{m_1m_2\dots m_k}\mu^{k-r}x^k}{P_{l-1}(\mu x)+\sum_{k=l}^{\infty}\frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{m_1m_2\dots m_k}\mu^{k-n}x^k}.$$

Обозначим для краткости записи через Σ_1 ряд в числителе и через Σ_2 — ряд в знаменателе.

Для любого ε существует число $X_1(\varepsilon)$ такое, что при $x>X_1(\varepsilon)$ выполняется оценка

$$\frac{Q_{l-1}}{P_{l-1}+\Sigma_2}<\varepsilon,$$

и число $X_2(\varepsilon)$ такое, что при $x>X_2(\varepsilon)$ верно следующее неравенство:

$$\frac{P_{l-1}}{\Sigma_1}<\varepsilon.$$

Возьмем в качестве $X(\varepsilon)=\max\{X_1(\varepsilon),X_2(\varepsilon)\}$; для $x>X(\varepsilon)$ последнее выражение имеет оценку

$$\frac{y^{(r)}(\mu x)}{y^{(n)}(\mu x)}\leqslant\varepsilon+\frac{\Sigma_1}{P_l(\mu x)+\Sigma_2}\leqslant\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon+\Sigma_2/\Sigma_1}<\varepsilon+\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2}.$$

Рассмотрим отношение рядов. Вынесем множители при первом слагаемом из числителя и знаменателя:

$$\frac{y^{(r)}(\mu x)}{y^{(n)}(\mu x)}<\varepsilon+\frac{\mu^{n-r}}{(l-r)\dots(l-n+1)}\cdot\frac{\sum_{k=l}^{\infty}\frac{k(k-1)\dots(k-r+1)}{l(l-1)\dots(l-r+1)}\frac{\mu^kx^k}{m_1m_2\dots m_k}}{\sum_{k=l}^{\infty}\frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{l(l-1)\dots(l-n+1)}\frac{\mu^kx^k}{m_1m_2\dots m_k}}.$$

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\frac{a_k^1}{a_k^2} = \frac{\frac{k(k-1)\dots(k-r+1)}{l(l-1)\dots(l-r+1)}}{\frac{k(k-1)\dots(k-r+1)}{l(l-1)\dots(l-r+1)}} \frac{1}{\frac{(k-r)\dots(k-n+1)}{(l-r)\dots(l-n+1)}} = \frac{(l-r)}{(k-r)} \dots \frac{(l-n+1)}{(k-n+1)}.$$

Поскольку $k \geqslant l$, получаем, что $a_k^1/a_k^2 < 1$ и сумма ряда в числителе меньше, чем в знаменателе. Заменим ряд в числителе рядом в знаменателе, тогда

$$\frac{y^{(r)}(\mu x)}{y^{(n)}(\mu x)} < \varepsilon + \frac{\mu^{n-r}}{(l-r)\dots(l-n+1)} < 2\varepsilon.$$

Поскольку ε выбирается произвольным образом, при $X(\varepsilon) \to \infty$ последнее отношение $y^{(r)}(\mu x)/y^{(n)}(\mu x) \to 0$. Таким образом, лемма доказана. $\square$

Лемма 3. *Предел отношения производных собственных функций оператора обобщенного дифференцирования с различными μ_k вдоль вещественной оси*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y^{(r)}(\mu_k x)}{y^{(s)}(\mu_{k+1} x)} = 0, \quad \mu_k < \mu_{k+1}, \ \forall r, s.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала отношение производной к собственной функции при различных μ_k.

Аналогично лемме 2, для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует число $L(\varepsilon)$, начиная с которого

$$\left(\frac{\mu_k}{\mu_{k+1}}\right)^{l-r} \frac{l(l-1)\dots(l-r+1)}{(\mu_{k+1})^r} < \varepsilon.$$

Зафиксируем некоторое целое число $l > L(\varepsilon)$ и выделим из числителя и знаменателя многочлены $(l-1)$-й степени:

$$\frac{y^{(r)}(\mu_k x)}{y(\mu_{k+1} x)} = \frac{Q_{l-1}(\mu_k x) + \sum_{i=l}^{\infty} \frac{i(i-1)\dots(i-r+1)}{m_1 m_2 \dots m_i} \mu_k^{i-r} x^i}{P_{l-1}(\mu_{k+1} x) + \sum_{i=l}^{\infty} \frac{(\mu_{k+1} x)^i}{m_1 m_2 \dots m_i}}. \tag{5}$$

Обозначим для краткости записи через Σ_1 ряд в числителе и через Σ_2 — ряд в знаменателе.

Для любого ε существует число $X_1(\varepsilon)$ такое, что при $x > X_1(\varepsilon)$ выполняется оценка

$$\frac{Q_{l-1}}{P_{l-1} + \Sigma_2} < \varepsilon,$$

и число $X_2(\varepsilon)$ такое, что при $x > X_2(\varepsilon)$ верно следующее неравенство:

$$\frac{P_{l-1}}{\Sigma_1} < \varepsilon.$$

Возьмем в качестве $X(\varepsilon) = \max\{X_1(\varepsilon), X_2(\varepsilon)\}$; для $x > X(\varepsilon)$ последнее выражение имеет оценку

$$\frac{y^{(r)}(\mu x)}{y^{(n)}(\mu x)} < \varepsilon + \frac{\Sigma_1}{\Sigma_2}.$$

Вынесем общий множитель в числителе и в знаменателе, получим

$$\frac{y^{(r)}(\mu_k x)}{y(\mu_{k+1}x)} < \varepsilon + \frac{l\ldots(l-r+1)\mu_k^{l-r}x^l}{(\mu_{k+1}x)^l}\cdot\frac{\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(l+N)\ldots(l+N-r+1)}{l\ldots(l-r+1)}\frac{\mu_k^N x^N}{m_1m_2\ldots m_{l+N}}}{\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(\mu_{k+1}x)^N}{m_1m_2\ldots m_{l+N}}}.$$

Для того чтобы можно было сравнить эти два ряда, каждый член ряда числителя умножим и поделим на μ_{k+1}. Рассмотрим общий член ряда в числителе:

$$u_N^1 = \frac{x^N\mu_{k+1}^N}{m_1m_2\ldots m_{l+N}}\Big(\frac{\mu_k}{\mu_{k+1}}\Big)^N\Big(1+\frac{N}{l}\Big)\Big(1+\frac{N}{l-1}\Big)\ldots\Big(1+\frac{N}{l-r+1}\Big),$$

$N = 0, 1, 2, \ldots$.

Найдем максимальный член ряда и оценим им ряд в числителе. Обозначим $\mu_k/\mu_{k+1} = \eta$, $\eta < 1$, тогда

$$q(N) = \eta^N\Big(1+\frac{N}{l}\Big)\Big(1+\frac{N}{l-1}\Big)\ldots\Big(1+\frac{N}{l-r+1}\Big).$$

Для $q(N)$ может быть получена следующая оценка сверху:

$$q(N) < \eta^N\Big(1+\frac{N}{l-r+1}\Big)^r = \vartheta(N),$$

$$\vartheta'(N) = (\eta)^N\Big(1+\frac{N}{l-r+1}\Big)^r\Big(\ln\eta+\frac{r}{l+N-r+1}\Big) = 0.$$

Откуда находим, что максимум достигается при $N = -(l-r+1+r/\ln\eta)$. Обозначим наибольшее значение функции $\vartheta(N)$ через T. Следовательно, $q(N) < T$. С учетом последней оценки сумма ряда в числителе равна сумме ряда в знаменателе.

Отношение (5) имеет оценку

$$\frac{y^{(r)}(\mu_k x)}{y(\mu_{k+1}x)} < \varepsilon + \Big(\frac{\mu_k}{\mu_{k+1}}\Big)^{l-r}\frac{l(l-1)\ldots(l-r+1)}{(\mu_{k+1})^r}T.$$

При $l > L(\varepsilon)$ получаем

$$\frac{y^{(r)}(\mu_k x)}{y(\mu_{k+1}x)} < 2\varepsilon.$$

Итак, поскольку ε выбирается произвольным образом, при $x > X(\varepsilon)$ отношение собственной функции к любой производной собственной функции с большим значением μ_k будет сколь угодно малой величиной.

Согласно лемме 2, отношение

$$\frac{y(\mu_{k+1}x)}{y^{(s)}(\mu_{k+1}x)} \to 0 \quad \text{при } x\to\infty,$$

откуда легко установить справедливость данной леммы. □

3. N_φ — множество единственности и секвенциальной достаточности.

Теорема 5. *N_φ — секвенциально достаточное множество в E.*

Доказательство. Покажем, что если последовательность $r_n(z) \in E$ стремится к нулю на любом компакте K из множества N_φ, то эта последовательность стремится к нулю на любом компакте $Q_\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$. Учитывая дискретность множества N_φ, условие сходимости к нулю на любом компакте K множества N_φ можно записать следующим образом: последовательность функций из E $r_n(z) \to 0$ при $n \to \infty$ на любом компакте K множества N_φ тогда и только тогда, когда найдутся числа $\sigma > 0$ и $M > 0$ такие, что

$$|r_n(\lambda_k)| \leqslant M e^{\sigma \lambda_k^{\beta/2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \tag{6}$$

$$r_n(\lambda_k) \to 0, \quad n \to \infty \quad \text{на компакте} \quad K. \tag{7}$$

В работе [12, стр. 208] было показано, что любой элемент $r(z) \in E$ записывается в виде

$$r(z) = \sum_{i=1}^{Q} \sum_{j=0}^{n_i-1} c_{ij} z^j y^{(j)}(\mu_i z),$$

где μ_i — нули кратности n_i характеристической функции $\psi(z)$ оператора $K_\psi[l]$, и лишь конечное число коэффициентов c_{ij} отлично от нуля. Итак, пусть последовательность

$$r_n(z) = \sum_{i=1}^{Q_n} \sum_{j=0}^{n_i-1} c_{ij}^n z^j y^{(j)}(\mu_i z) \tag{8}$$

стремится к нулю на каждом компакте K из множества N_φ. Нам нужно показать, что $r_n \to 0$ равномерно на любом компакте $Q_\mathbb{C}$ из плоскости $\mathbb{C}$.

1. В представлении (8) участвует конечное число слагаемых. В силу оценки (6) число членов в каждой последовательности r_n ограничено. В представлении (8) слагаемые расположены в порядке возрастания, согласно доказанным выше леммам 2 и 3. Пусть последний член, который удовлетворяет оценке (6), — это собственная функция или ее производная с числом μ_k. Следующий член со значением μ_{k+1} превышает оценку (6), и поэтому включим его в представление (8) с нулевым коэффициентом. Таким образом, если в представление (8), удовлетворяющей оценке (6), вошли слагаемые с показателями $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k, \mu_{k+1}$ с кратностями соответственно $n_1, n_2, \ldots, n_k, 1$, то количество членов не больше числа $n_1 + n_2 + \ldots + n_k + 1$.
2. Докажем дальше, что если последовательность $r_n(z)$ стремится к нулю на любом компакте K из множества N_φ, то коэффициенты c_{ij}^n стремятся к нулю при $n \to \infty$.

Мы показали, что в представлении (8) участвуют лишь те $y^{(j)}(\mu_i z)$ с отличными от нуля коэффициентами с показателями μ_i, которые удовлетворяют оценке (6). После перенумеровывания можно считать, что для некоторого t

$$r_n(z) = \sum_{i=1}^{t_n} \sum_{j=0}^{n_i-1} c_{ij}^n z^j y^{(j)}(\mu_i z) + 0 \cdot y(\mu_{k+1} z), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Если набор из p нулей λ_{k_l} выбрать так, что определитель матрицы

$$A = \left(\lambda_{k_l}^{j} y^{(j)}(\mu_i \lambda_{k_l})\right)_{i,l}, \quad l = 1, 2, \ldots, p, \ i = 1, 2, \ldots, k, \ j = 0, 1, \ldots, n_i - 1$$

отличен от нуля, то коэффициенты c_{ij}^{n} являются решениями системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{t_n} \sum_{j=0}^{n_i - 1} c_{ij}^{n} \lambda_{k_l}^{j} y^{(j)}(\mu_i \lambda_{k_l}) + 0 \cdot y(\mu_{k+1} \lambda_{k_l}) = r_n(\lambda_{k_l}), \quad l = 1, 2, \ldots, p.$$

Построение определителя происходит по той же схеме, что и в работе [12, теорема 5]. Напомним, что λ_k — это последовательность нулей функции $\varphi(z)$, расположенных на вещественной положительной оси в порядке возрастания. Согласно лемме 2, λ_{k_l} можно выбрать таким образом, что

$$\frac{y^{(r)}(\mu \lambda_{k_l})}{y^{(n)}(\mu \lambda_{k_l})} < \varepsilon$$

при $r < n$ (в лемме 2 в качестве x нужно взять λ_{k_l}). Для доказательства секвенциальной достаточности множества N_φ выбираем подпоследовательность $\lambda_{k_j} \in \mathbb{R}_+$ и, следовательно, главные миноры

$$\Delta_t = \left(\lambda_{k_l}^{j} y^{(j)}(\mu_1 \lambda_{k_l})\right)_{i,l}, \quad i, l = 1, 2, \ldots, n_1 - 1$$

отличны от нуля. Для упрощения записи опустим пока μ_1. В главном миноре второго порядка

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} y(\lambda_{k_1}) & \lambda_{k_1} y'(\lambda_{k_1}) \\ y(\lambda_{k_2}) & \lambda_{k_2} y'(\lambda_{k_2}) \end{vmatrix}$$

λ_{k_2} может быть выбран настолько большим, что

$$\Delta_2 = \lambda_{k_2} y'(\lambda_{k_2}) \Big(y(\lambda_{k_1}) - \frac{y(\lambda_{k_2})}{\lambda_{k_2} y'(\lambda_{k_2})} \lambda_{k_1} y'(\lambda_{k_1}) \Big) > 0.$$

Аналогичным образом доказывается, что $\Delta_3 > 0$, ..., $\Delta_t > 0$. Для этого разложим определитель Δ_t, где $t \leqslant n_1 - 1$, по последней строке:

$$\Delta_t = \lambda_{k_t}^{t-1} y^{(t-1)}(\lambda_{k_t}) \begin{vmatrix} y(\lambda_{k_1}) & \ldots & \lambda_{k_1}^{t-2} y^{(t-2)}(\lambda_{k_1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y(\lambda_{k_{t-1}}) & \ldots & \lambda_{k_{t-1}}^{t-2} y^{(t-2)}(\lambda_{k_{t-1}}) \end{vmatrix} + \ldots +$$
$$+ (-1)^{t+1} \lambda_{k_1}^{t-1} y^{(t-1)}(\lambda_{k_1}) \begin{vmatrix} y(\lambda_{k_2}) & \ldots & \lambda_{k_2}^{t-2} y^{(t-2)}(\lambda_{k_2}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y(\lambda_{k_t}) & \ldots & \lambda_{k_t}^{t-2} y^{(t-2)}(\lambda_{k_t}) \end{vmatrix}.$$

Поскольку $\Delta_{t-1} > 0$, первое слагаемое в разложении определителя Δ_t отлично от нуля, при этом, выбирая λ_{k_t} большим, можно достичь того, что Δ_t будет больше нуля.

Построение определителя для остальных μ_i, удовлетворяющих оценке (6), происходит по той же схеме. В главном миноре второго порядка

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} y(\mu_1\lambda_{k_1}) & y(\mu_2\lambda_{k_1}) \\ y(\mu_1\lambda_{k_2}) & y(\mu_2\lambda_{k_2}) \end{vmatrix} = y(\mu_2\lambda_{k_2})\Big(y(\mu_1\lambda_{k_1}) - \frac{y(\mu_1\lambda_{k_2})}{y(\mu_2\lambda_{k_2})}y(\mu_2\lambda_{k_1})\Big),$$

согласно [13, лемма 1], λ_{k_2} можно выбирать таким образом, чтобы $\Delta_2 > 0$. Построение определителя завершается выбором λ_{k_p}, при котором следующий определитель отличен от нуля:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} y(\mu_1\lambda_{k_1}) & \dots & \lambda_{k_1}^{n_1-1}y^{(n_1-1)}(\mu_1\lambda_{k_1}) & \dots & y(\mu_{k+1}\lambda_{k_1}) \\ y(\mu_1\lambda_{k_2}) & \dots & \lambda_{k_2}^{n_1-1}y^{(n_1-1)}(\mu_1\lambda_{k_2}) & \dots & y(\mu_{k+1}\lambda_{k_2}) \\ y(\mu_1\lambda_{k_3}) & \dots & \lambda_{k_3}^{n_1-1}y^{(n_1-1)}(\mu_1\lambda_{k_3}) & \dots & y(\mu_{k+1}\lambda_{k_3}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y(\mu_1\lambda_{k_p}) & \dots & \lambda_{k_p}^{n_1-1}y^{(n_1-1)}(\mu_1\lambda_{k_p}) & \dots & y(\mu_{k+1}\lambda_{k_p}) \end{vmatrix},$$

где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k + 1 = p$. По лемме 3, выбирая λ_{k_p} очень большим, можно достичь того, что Δ_p будет больше нуля.

По правилу Крамера

$$c_{ij}^n = \frac{\Delta_i}{\Delta_p},$$

где Δ_i — определитель матрицы, полученной из Δ_p заменой i-того столбца столбцом свободных членов. Согласно условию (7), при $n \to \infty$ столбец свободных членов стремится к нулю, а следовательно, и все $\Delta_i \to 0$ при $n \to \infty$. Тем самым получаем, что $c_{ij}^n \to 0$ при $n \to \infty$.

Мы доказали, что $c_{ij}^n \to 0$ при любом i. Поэтому для любого компакта $Q_{\mathbb{C}}$ функция $z^j y^{(j)}(\mu_i z)$ ограничена на этом компакте, коэффициенты стремятся к нулю, тогда и вся линейная комбинация (9) стремится к нулю при $n \to \infty$. Из этого следует, что $r_n(z) \to 0$ в для всех точек $z \in Q_{\mathbb{C}}$.

Таким образом, N_φ является секвенциально достаточным множеством в E. Теорема доказана. □

Из этой теоремы вытекает следующий результат: множество N_φ — множество единственности в E.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 14–01–00720-а, № 14–01–97037-р-поволжье-я).

ORCID
Валентин Васильевич Напалков: http://orcid.org/0000-0001-7462-0286
Айгуль Ураловна Муллабаева: http://orcid.org/0000-0002-9052-2229

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Муллабаева А. У., Напалков В. В. Кратная интерполяционная задача Валле Пуссена / *Четвертая международная конференция «Математическая физика и ее приложения»*: материалы конф.; ред. чл.-корр. РАН И. В. Волович; д.ф.-м.н., проф. В. П. Радченко. Самара: СамГТУ, 2014. С. 259–260.
2. de La Vallée Poussin Ch. J. Sur l'equation differentielle lineaire du second ordre. Determination d'une integrale par deux valeurs assignees. Extension aux equation d'ordre n // *J. Math. pures et appl.*, 1929. vol. 8, no. 2. pp. 125–144 (In French).
3. Сансоне Дж. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* М.: Ин. лит., 1953. 345 с.

4. Покорный Ю. В. О нулях функции Грина задачи Валле Пуссена // *Матем. сб.*, 2008. Т. 199, № 6. С. 105–136. doi: 10.4213/sm3860.
5. Кигурадзе И. Т. Об условиях неосцилляционности сингулярных линейных дифференциальных уравнений второго порядка // *Матем. заметки*, 1969. Т. 6, № 5. С. 633–639.
6. Чичкин Е. С. К вопросу о неосцилляции для линейных уравнений четвертого порядка // *Изв. вузов. Матем.*, 1958. № 3. С. 248–250.
7. Чичкин Е. С. О неосцилляции решений нелинейных дифференциальных уравнений 3-го и 4-го порядков // *Изв. вузов. Матем.*, 1959. № 5. С. 219–221.
8. Левин А. Ю. Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x = 0$ // *УМН*, 1969. Т. 24, № 2(146). С. 43–96.
9. Покорный Ю. В. О неклассической задаче Валле–Пуссена // *Диффер. уравн.*, 1978. Т. 14, № 6. С. 1018–1027.
10. Дерр В. Я. К обобщенной задаче Валле–Пуссена // *Диффер. уравн.*, 1987. Т. 23, № 11. С. 1861–1872.
11. Дерр В. Я Неосцилляция решений линейного квазидифференциального уравнения // *Известия института математики и информатики Удмуртского государственного университета*, 1999. № 1(16). С. 3–105.
12. Напалков В. В., Муллабаева А. У. Об одном классе дифференциальных операторов и их применении / Тр. ИММ УрО РАН, Т. 20, 2014. С. 201–214.
13. Напалков В. В., Муллабаева А. У. Интерполяционная задача в ядре оператора, порожденного обобщеными пространствами Баргмана—Фока // *ДАН*, 2014. Т. 454, № 2. С. 149–151.
14. Напалков В. В., Попенов С. В. Голоморфная задача Коши для оператора свертки в аналитически равномерных пространствах и разложения Фишера // *ДАН*, 2001. Т. 2, № 381. С. 164–166.
15. Напалков В. В., Нуятов А. А. Многоточечная задача Валле Пуссена для операторов свертки // *Матем. сб.*, 2012. Т. 203, № 2. С. 77–86. doi: 10.4213/sm7763.
16. Напалков В. В., Забирова К. Р. Операторы свертки Данкла и их свойства // *ДАН*, 2013. Т. 449, № 6. С. 632–634.
17. Забирова К. Р., Напалков В. В. Операторы свёртки Данкла и многоточечная задача Валле–Пуссена // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. № 1(30). С. 70–81. doi: 10.14498/vsgtu1139.
18. Мерзляков С. Г., Попенов С. В. Кратная интерполяция рядами экспонент в $H(\mathbb{C})$ с узлами на вещественной оси // *Уфимск. матем. журн.*, 2013. Т. 5, № 3. С. 130–143.
19. Напалков В. В. Комплексный анализ и задача Коши для операторов свертки / *Аналитические и геометрические вопросы комплексного анализа*: Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Анатолия Георгиевича Витушкина / Тр. МИАН, Т. 235. М.: Наука, 2001. С. 165–168.
20. Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ в нормированых пространствах.* М.: Физматгиз, 1959. 684 с.
21. Ткаченко В. А. Спектральная теория в пространствах аналитических функционалов для операторов, порождаемых умножением на независимую переменную // *Матем. сб.*, 1980. Т. 112(154), № 3(7). С. 421–466.
22. Shapiro H. S. An Algebraic Theorem of E. Fischer, and the Holomorphic Goursat Problem // *Bull. London Math. Soc.*, 1989. vol. 21, no. 6. pp. 513–537. doi: 10.1112/blms/21.6.513.
23. Meril A., Struppa D. C. Equivalence of Cauchy Problems for Entire and Exponential Type Functions // *Bull. London Math. Soc.*, 1985. vol. 17, no. 5. pp. 469–473. doi: 10.1112/blms/17.5.469.
24. Dieudonné J., Schwartz L. La dualité dans les espaces $(\mathscr{F})$ et $(\mathscr{L}\mathscr{F})$ // *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, 1949. vol. 1. pp. 61–101 (In French).

Поступила в редакцию 15/XII/2014;
в окончательном варианте — 10/II/2015;
принята в печать — 25/II/2015.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 1, pp. 63–77

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1369

MSC: 46E10; 30D10, 30E20, 30H20

THE MULTIPLE INTERPOLATION DE LA VALLÉE POUSSIN PROBLEM*

***V. V. Napalkov*[1], *A. U. Mullabaeva*[2]**

[1] Institute of Mathematics with Computing Centre,
Ufa Science Centre, Russian Academy of Sciences
112, Chernyshevskiy st., Ufa, 450077, Russian Federation.
[2] Bashkir State University,
32, Zaki Validi st., Ufa, 450074, Russian Federation.

Abstract

This article is concerned with the solving of multiple interpolation de La Vallée Poussin problem for generalized convolution operator. Particular attention is paid to the proving of the sequential sufficiency of the set of solutions of the generalized convolution operator characteristic equation. In the generalized Bargmann–Fock space the adjoint operator of multiplication by the variable z is the generalized differential operator. Using this operator we introduce the generalized shift and generalized convolution operators. Applying the chain of equivalent assertions we obtain the fact that the multiple interpolation de La Vallée Poussin problem is solvable if and only if the composition of generalized convolution operator with multiplication by the fixed entire function $\psi(z)$ is surjective. Zeros of the function $\psi(z)$ are the nodes of interpolation. The surjectivity of composition of the generalized convolution operator with the multiplication comes down to the proof of the sequential sufficiency of the set of zeros of a generalized convolution operator characteristic function in the set of solutions of the generalized convolution operator with the characteristic function $\psi(z)$. In the proof of the sequential sufficiency it became necessary to consider the relation of eigenfunctions for different values of μ_i. The eigenfunction with great value of μ_i tends to infinity faster than eigenfunction with a lower value for z tends to infinity. The derivative of the eigenfunction of higher order tends to infinity faster than lower-order derivatives with the same values of μ_i. A significant role is played by the fact that the kernel of the generalized convolution operator with characteristic function $\psi(z)$ is a finite sum of its eigenfunction and its derivatives. Using the Fischer representation, Dieudonne–Schwartz theorem

How to cite Reference
N a p a l k o v V. V., M u l l a b a e v a A. U. The multiple interpolation de La Vallée Poussin problem, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 1, pp. 63–77. doi: 10.14498/vsgtu1369. (In Russian)

Authors Details
Valentin V. Napalkov (Dr. Phys. & Math. Sci., Corresponding member of RAS; shaig@anrb.ru), Director of Institute.
Aigul U. Mullabaeva (mullabaeva.87@mail.ru; Corresponding Author), Postgraduate Student, Dept. of Theory of Functions and Functional Analysis.

*This paper is an extended version of the paper [1], presented at the Mathematical Physics and Its Applications 2014 Conference.

and Michael's theorem on the existence of a continuous right inverse we obtain that if the zeros of the characteristic function of a generalized convolution operator are located on the positive real axis in order of increasing then multiple interpolation de La Vallée Poussin problem is solvable in the interpolation nodes.

Keywords: generalized convolution operator, eigenfunctions of the generalized differentiation operator, Fischer representation, sequentially sufficient set, de La Vallée Poussin problem, interpolation nodes.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1369

Acknowledgments. This work has been supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 14–01–00720-a, no. 14–01–97037-r-povolzh'e-ya).

ORCID
Valentin V. Napalkov: http://orcid.org/0000-0001-7462-0286
Aigul U. Mullabaeva: http://orcid.org/0000-0002-9052-2229

REFERENCES

1. Mullabaeva A. U., Napalkov V. V. Multiple interpolation de La Vallée Poussin problem, *The 4nd International Conference "Mathematical Physics and its Applications"*, Book of Abstracts and Conference Materials; eds. I. V. Volovich; V. P. Radchenko. Samara, Samara State Technical Univ., 2014, pp. 259–260 (In Russian).
2. de La Vallée Poussin Ch. J. Sur l'equation differentielle lineaire du second ordre. Determination d'une integrale par deux valeurs assignees. Extension aux equation d'ordre n, *J. Math. pures et appl.*, 1929, vol. 8, no. 2, pp. 125–144 (In French).
3. Sansone J. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniia* [Ordinary Differential Equations]. Moscow, In. lit., 1953, 345 pp. (In Russian)
4. Pokornyi Yu. V. Zeros of the Green's function for the de la Vallée-Poussin problem, *Sb. Math.*, 2008, vol. 199, no. 6, pp. 891–921. doi: 10.1070/SM2008v199n06ABEH003946.
5. Kiguradze I. T. Conditions for non-oscillation of singular linear differential equations of second order, *Math. Notes*, 1969, vol. 6, no. 5, pp. 843–847. doi: 10.1007/BF01101415.
6. Chichkin E. S. The non-oscillation problem for linear equations of fourth order, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1958, no. 3, pp. 248–250 (In Russian).
7. Chichkin E. S. On the non-oscillation of solutions of non-linear differential equations of third and fourth order, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1959, no. 5, pp. 219–221 (In Russian).
8. Levin A. Yu. Non-oscillation of solutions of the equation $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x = 0$, *Russian Math. Surveys*, 1969, vol. 24, no. 2, pp. 43–99. doi: 10.1070/RM1969v024n02ABEH001342.
9. Pokornyi Yu. V. A nonclassical de la Vallée–Poussin problem, *Differ. Equ.*, vol. 14, no. 1978, pp. 725–732.
10. Derr V. Ya. A generalized la Vallée–Poussin problem, *Differ. Equ.*, 1987, vol. 23, no. 11, pp. 1254–1263.
11. Derr V. Ya Nonoscillation of Solutions of a Linear Quasidifferential Equation, *Izvestiia Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta* [Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.], 1999, no. 1(16), pp. 3–105 (In Russian).
12. Napalkov V. V., Mullabaeva A. U. On one class of differential operators and their application, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, 20, 2014, pp. 201–214 (In Russian).
13. Napalkov V. V., Mullabaeva A. U. Interpolation problem in kernels of operators generated by generalized Bargmann–Fock spaces, *Dokl. Math.*, 2014, vol. 89, no. 1, pp. 42–44. doi: 10.1134/s1064562414010104.
14. Napalkov V. V., Popenov S. V. The holomorphic Cauchy problem for the convolution operator in analytically uniform spaces, and Fisher expansions, *Dokl. Math.*, 2001, vol. 64, no. 3, pp. 330–332.

15. Napalkov V. V., Nuyatov A. A. The multipoint de la Vallée–Poussin problem for a convolution operator, *Sb. Math.*, 2012, vol. 203, no. 2, pp. 224–233. doi: 10.1070/SM2012v203n02ABEH004220.
16. Zabirova K. R., Napalkov V. V. Dunkl convolution operators and their properties, *Dokl. Math.*, 2013, vol. 87, no. 2, pp. 218–219. doi: 10.1134/s1064562413020051.
17. Zabirova K. R., Napalkov V. V. The Dunkl convolution operators and multipoint de la Vallée–Poussin problem, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2013, vol. 1(30), pp. 70–81 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1139.
18. Merzlyakov S. G., Popenov S. V. Interpolation with multiplicity by series of exponentials in $H(\mathbb{C})$ with nodes on the real axis, *Ufa Math. Journal*, 2013, vol. 5, no. 3, pp. 127–140. doi: 10.13108/2013-5-3-127.
19. Napalkov V. V. Complex analysis and the Cauchy problem for convolution operators, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2001, vol. 235, pp. 158–161.
20. Kantorovich L. V., Akilov G. P. *Funktsional'nyi analiz v normirovanykh prostranstvakh* [Functional analysis in normed spaces]. Moscow, Fizmatgiz, 1959, 684 pp. (In Russian)
21. Tkachenko V. A. Spectral theory in spaces of analytic functionals for operators generated by multiplication by the independent variable, *Math. USSR-Sb.*, 1981, vol. 40, no. 3, pp. 387–427. doi: 10.1070/SM1981v040n03ABEH001833.
22. Shapiro H. S. An Algebraic Theorem of E. Fischer, and the Holomorphic Goursat Problem, *Bull. London Math. Soc.*, 1989, vol. 21, no. 6, pp. 513–537. doi: 10.1112/blms/21.6.513.
23. Meril A., Struppa D. C. Equivalence of Cauchy Problems for Entire and Exponential Type Functions, *Bull. London Math. Soc.*, 1985, vol. 17, no. 5, pp. 469–473. doi: 10.1112/blms/17.5.469.
24. Dieudonné J., Schwartz L. La dualité dans les espaces $(\mathscr{F})$ et $(\mathscr{L}\mathscr{F})$, *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, 1949, vol. 1, pp. 61–101 (In French).

Received 15/XII/2014;
received in revised form 10/II/2015;
accepted 25/II/2015.